Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bewegung durch eine Potentialmulde

Die eindimensionale, dämpfungsfreie Bewegung eines Teilchens der Masse m sei durch

$$x(t) = \frac{x_0}{\cosh(\Omega t)} \tag{1}$$

mit positiven Konstanten x_0 und Ω gegeben.

a) Bestimmen sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens, und drücken Sie diese durch $x(t)$ aus. An welchem Ort befindet sich der Umkehrpunkt der Bewegung, und wo ist die Geschwindigkeit maximal? Skizzieren Sie die Abhängigkeit $v(x)$ für den gesamten Bewegungsablauf $-\infty < t < \infty$, und geben Sie an, in welcher Richtung die Kurve $v(x)$ durchlaufen wird. (13 Punkte)

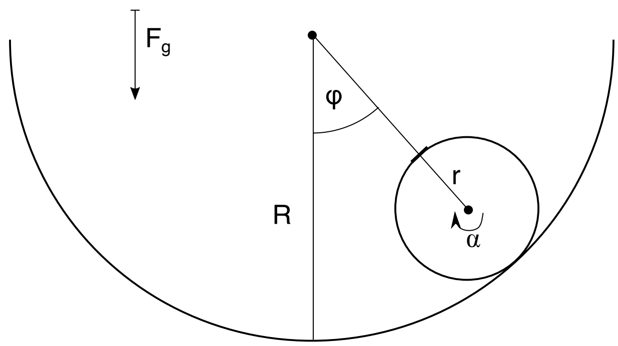
b) Bestimmen Sie das Potential $V(x)$, in dem sich das Teilchen bewegt. Dabei soll der Potentialnullpunkt so gewählt sein, dass die durch (1) beschriebene Bewegung zur Energie $E = 0$ gehöre. Skizzieren Sie den Potentialverlauf. (5 Punkte)

   Zur Kontrolle: Das Potential besitzt die Form $V(x) = Ax^2(B - x^2)$ mit $AB < 0$.

c) Entwickeln Sie das Potential bis zur zweiten Ordnung in x um den Punkt $x = 0$, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in diesem genäherten Potential. Welche Bedingung müssen die in der allgemeinen Lösung auftretenden Konstanten erfüllen, wenn die Bewegung bei $E = 0$ erfolgen soll? Wie sind die Konstanten demnach zu wählen, um die Bewegung bei großen Zeiten t zu beschreiben? (7 Punkte)

Aufgabe 2: **Murmel in sphärischer Schale**

Betrachtet wird eine homogene starre Vollkugel (Radius r, Masse m), die in einer sphärischen Schale (Radius $R > r$) unter dem Einfluss der Gravitation ohne Schlupf rollt. Die Kugel wird auf eine bestimmte Höhe in der Schale gerollt, losgelassen und führt dann Schwingungen um die Ruhelage aus. Die Bewegung findet also nur in einer Ebene statt, und kann durch einen Winkel φ beschrieben werden, siehe Abbildung. Die Kugel hat ständig Kontakt zur Schale.



a) Wird die Schwingungsdauer der Kugel um die Ruhelage kleiner, gleich, oder größer sein als die Schwingungsdauer eines Fadenpendels der gleichem Masse und einer Länge $R-r$, welches mit der gleichen Auslenkung gestartet wird? Geben Sie eine qualitative Begründung. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I der Kugel für die Drehung um ihren Mittelpunkt als Funktion von m und r. Gehen Sie dazu von der Formel

$$I = \int \mathrm{d}^3x \, \rho(\vec{x}) \, l^2(\vec{x}) \,, \tag{1}$$

für das Drehmoment aus, wobei $l(\vec{x})$ den Abstand des Punktes $\vec{x}$ von der Drehachse und $\rho(\vec{x})$ die Dichte des Körpers bezeichnen. (5 Punkte)
Kontrolle: $I = c\, mr^2$ für eine bestimmte numerische Konstante $c > 0$.

c) Weisen Sie die Rollbedingung $(R-r)\dot{\varphi} = r\dot{\alpha}$ für die Kugel nach. (2 Punkte)

d) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Verwenden Sie dabei φ als generalisierte Koordinate. (8 Punkte)

e) Leiten Sie die Bewegungsgleichung ab, und nähern Sie sie für kleine Auslenkungen φ. Bestimmen Sie die Frequenz ω von Schwingungen um die Ruhelage. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Ebene Wellen zwischen zwei ideal leitenden Platten

Bei $z = \pm L$ sei senkrecht zur z-Achse jeweils eine unendlich ausgedehnte, ideal leitende Metallplatte angebracht. Zwischen den beiden Platten liege Vakuum vor. Es sollen die ebenen elektromagnetischen Wellen in dieser Anordnung untersucht werden.

a) Eine ebene Welle im ladungs- und stromfreien Vakuum sei durch ein elektrisches Feld $\vec{E}$ und eine magnetische Induktion $\vec{B}$ mit der Orts- und Zeitabhängigkeit

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \exp\left(\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right)\right] , \tag{1}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{B}_0 \exp\left(\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right)\right] , \tag{2}$$

gegeben, wobei $\vec{k}$ den Wellenvektor und ω die Frequenz angibt. Im Folgenden genügt es, mit der komplexen Form in (1) und (2) zu rechnen, ohne zusätzlich den Realteil zu nehmen.

Leiten Sie mit Hilfe geeigneter Maxwellgleichungen Bedingungen für die relativen Lagen von $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ her. Wie viele linear unabhängige Feldmoden gibt es somit für einen gegebenen Wellenvektor $\vec{k}$? (8 Punkte)

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsgesetzes, dass an der Grenzfläche zwischen Vakuum und Metallplatte die Komponente $\vec{E}_\mathrm{t}$ des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche verschwindet. (8 Punkte)

c) Es sollen nun zunächst elektromagnetische Wellen mit vorgegebenem $|\vec{k}|$ untersucht werden, für die $k_z \neq 0$ ist und k_x sowie k_y mit $k_x^2 + k_y^2 < |\vec{k}|^2$ fest vorgegeben seien. Leiten Sie geeignete Linearkombinationen von elektrischen Feldern der Form (1) her, mit denen sich die in den ersten beiden Teilaufgaben hergeleiteten Bedingungen erfüllen lassen. Welche Werte kann die z-Komponente des Wellenvektors jeweils annehmen? Wie viele linear unabhängige Feldmoden gibt es für die einzelnen Linearkombinationen? (7 Punkte)

d) Nun soll der Spezialfall $k_x^2 + k_y^2 = |\vec{k}|^2$ betrachtet werden. In welche Richtung muss der in (1) auftretende Feldvektor $\vec{E}_0$ zeigen? Wie viele linear unabhängige Feldmoden gibt es demnach in diesem Fall? (2 Punkte)

Aufgabe 2: **Metallkugel im homogenen elektrischen Feld**

Gegeben sei ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ in z-Richtung. Bei der Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben sollen Kugelkoordinaten verwendet werden, wobei der Polarwinkel θ von der z-Achse aus gemessen wird.

a) Geben Sie ein zum Feld $\vec{E}_0$ gehöriges Potential $\Phi_0(r,\theta)$ an. (3 Punkte)

b) Nun wird eine metallische Hohlkugel vom Radius R mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung hinzugefügt. Welches elektrische Feld $\vec{E}$ liegt dann im Innern der Kugel vor? Begründung! (3 Punkte)

c) Für das Potential $\Phi(r,\theta)$ außerhalb der Kugel ($r > R$) wird der Ansatz mit einem zusätzlichen Punktdipol $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ am Ursprung gemacht. Berechnen Sie die Komponenten E_r und E_θ des elektrischen Feldes. Überprüfen Sie die Randbedingung für die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ auf der Kugeloberfläche. (7 Punkte)

Hinweise: Das Dipolpotential hat die Form: $\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}$. *Für den Gradienten eines* (r,θ)*-abhängigen Skalarfeldes gilt:* $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$.

d) Bestimmen Sie die influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\theta)$ auf der Metallkugel aus dem Sprung der Normalkomponente von $\vec{E}$. (3 Punkte)

e) Zuletzt soll die Arbeit W berechnet werden, die zum Aufbau der Influenzladung nötig ist. Bestimmen Sie ausgehend von der Energiedichte $w = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^{\,2}$ die Änderungen Δw_i und Δw_a in den Bereichen $r < R$ und $r > R$, die durch das Einbringen der metallischen Hohlkugel verursacht wurden. Beim anschließenden Volumenintegral ist es vorteilhaft die Winkelintegration zuerst auszuführen, unter Benutzung von $\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \cos^2\theta = \int_{-1}^1 d\zeta\, \zeta^2$ und $\int_0^\pi d\theta\, \sin^3\theta = \int_{-1}^1 d\zeta\, (1-\zeta^2)$. (9 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Entropieänderung durch Reibung

Betrachten Sie einen Körper der Masse m, der sich in einem Medium unter dem Einfluss der Reibungskraft $\vec{F}_R = -\gamma\vec{v}$ bewegt, wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Massenschwerpunktes des Körpers ist. Nehmen Sie an, dass der Körper sich ohne Rotation bewegt und das Medium mit Körper ein abgeschlossenes System bildet.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenschwerpunktes auf, und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \neq \vec{0}$. (3 Punkte)

b) Durch die Reibung wird die mechanische Energie des Körpers in Wärme umgewandelt, die dann den inneren Energien von Medium und Körper, U_M und U_K, zugeführt wird. Berechnen Sie die pro Zeit in Wärme umgewandelte Energie. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Temperatur als Funktion der Zeit und nehmen Sie an, dass zu jeder Zeit Körper und Medium dieselbe Temperatur T besitzen. Es gelten für Körper und Medium die kalorischen Zustandsgleichungen

$$U_{\mathrm{K}} = C_{\mathrm{K}}T + U_{\mathrm{K0}} \qquad \text{bzw.}$$
$$U_{\mathrm{M}} = C_{\mathrm{M}}T + U_{\mathrm{M0}}\,.$$

Dabei sind C_j mit $j \in \{\mathrm{K}, \mathrm{M}\}$ die Wärmekapazitäten der beiden Teilsysteme, und U_{j0} Konstanten. Die Anfangstemperatur zur Zeit $t = 0$ sei T_0. (9 Punkte)

d) Welcher Endtemperatur strebt das System für große Zeiten zu, d.h. für $t \to \infty$? Geben Sie an, ob die Temperatur mit der Zeit ansteigt oder abfällt. (2 Punkte)

e) Die durch Reibung erzeugte und auf die inneren Energien U_K und U_M übertragene Wärme ist mit einer zeitlichen Entropieänderung verbunden. Berechnen Sie die Entropieänderung des aus Medium und Körper bestehenden Systems im Zeitbereich $0 \leq t \leq \infty$. Handelt es sich um eine Zu- oder Abnahme der Entropie dieses Systems? (6 Punkte)

Aufgabe 2: Adiabatische Entmagnetisierung

Ein magnetisches System befinde sich in einem Magnetfeld H und sei charakterisiert durch die (idealisierte) Abhängigkeit der Magnetisierung M von der Temperatur T mit einer Konstanten a

$$M = a\frac{H}{T} \tag{1}$$

und die Wärmekapazität (bei konstantem H-Feld)

$$C_H = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H = a\frac{H_0^2 + H^2}{T^2}\,. \tag{2}$$

Die relevanten thermodynamischen Potentiale sind die Gibb'sche freie Energie G, und die innere Energie U

$$G = U - TS - HM\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + H\mathrm{d}M\,. \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass G das natürliche Potential in den Variablen T und H ist. (3 Punkte)

b) Leiten Sie aus dieser Bedingung die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \tag{5}$$

her. (3 Punkte)

c) Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet für infinitesimale Änderungen

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q\,. \tag{6}$$

Wieso wählt man unterschiedliche Symbole für die Differentiale? Was sind im gegebenen Fall die beiden intensiven Zustandsvariablen? (3 Punkte)

d) Für einen reversiblen Prozess gilt $\delta Q(T,H) = T\mathrm{d}S$. Es soll kein Wärmeaustausch zwischen dem magnetischen System und der Umgebung stattfinden, d.h. es soll gelten

$$\delta Q(H,T) = 0\,. \tag{7}$$

Leiten Sie aus dieser Forderung die Beziehung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\frac{T}{C_H}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \tag{8}$$

her. (7 Punkte)

e) Berechnen Sie hieraus die Änderung der Temperatur, wenn die Magnetfeldstärke bei reversibler Prozessführung von H_i auf Null fällt. Zeigen Sie, dass die Endtemperatur T_f in der Tat kleiner als die Anfangstemperatur T_i ist. (9 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Elektron im Magnetfeld

Betrachten Sie den Zustand eines Elektrons in einem Atom unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes. Die Ortswellenfunktion ist für die Rechnung nicht relevant, daher betrachten Sie im Folgenden nur den Spinzustand $|\,\psi\,\rangle$ des Elektrons. Die Eigenwertgleichungen für die Eigenzustände der z-Komponente des Spinoperators lauten

$$\widehat{S}_z|\uparrow\rangle = +\frac{1}{2}\hbar\,|\uparrow\rangle, \qquad \widehat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\,|\downarrow\rangle. \tag{1}$$

Ohne äußeres Magnetfeld seien die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ Energieeigenzustände zum gleichen Energieeigenwert E. Nach dem Anlegen eines homogenen Magnetfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_x$ sind $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ keine Energieeigenzustände mehr. Der Hamiltonoperator ist dann

$$H = E(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) - \mu B(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)\,, \tag{2}$$

wobei μ eine Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Energieeigenwerte sowie die zugehörigen Eigenzustände. (7 Punkte)

b) Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\uparrow\rangle$. Zum Zeitpunkt $t = T$ wird wieder die z-Komponente des Spins gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_\uparrow(T), P_\downarrow(T)$, das System bei dieser Messung im Zustand $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ zu finden. Vereinfachen Sie die gefundenen Formeln so weit wie möglich. (13 Punkte)

c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus b) physikalisch: Was geschieht mit dem Elektronenspin? (5 Punkte)

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator mit Operatoren

Betrachtet wird der harmonischer Oszillator mit Hamilton-Operator $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Die Stufenoperatoren

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\,, \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\,. \tag{1}$$

erfüllen die Relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Der normierte Eigenzustand von $\hat{H}$ mit Energie $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, \ldots$, wird mit $|n\rangle$ bezeichnet.

a) Argumentieren Sie aus den Angaben der Aufgabenstellung, dass der Anzahloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ die Gleichung $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ erfüllt. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_n|n+1\rangle$, wobei c_n eine nicht verschwindende Konstante ist, die Sie nicht zu bestimmen brauchen. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie allgemein, dass

$$\frac{\partial E_n}{\partial s} = \langle n(s)|\frac{\partial \hat{H}(s)}{\partial s}|n(s)\rangle\,, \tag{2}$$

wobei s einen Parameter bezeichnet, von dem der Hamilton-Operator $\hat{H}$ und die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ beliebig abhängen. (6 Punkte)

d) Verifizieren Sie diese Gleichung für das Beispiel des harmonischen Oszillator für den Fall, dass der Parameter in Gleichung (2) die Masse des Teilchens ist, d.h. $s = m$ (bei konstanter Frequenz ω). Drücken Sie hierzu die Ableitungen der Stufenoperatoren (1) nach der Masse wieder durch die Stufenoperatoren selbst aus. (6 Punkte)

e) Geben Sie den Hamilton-Operator $\hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$ als Funktion von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ an. *(Hinweis: Sie brauchen $\hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$ nicht aus dem Ausdruck $\hat{H}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ herzuleiten, wenn Sie die Antwort wissen)*. Wie lässt sich dann die in der vorigen Teilaufgabe verifizierte Gleichung interpretieren? (6 Punkte)