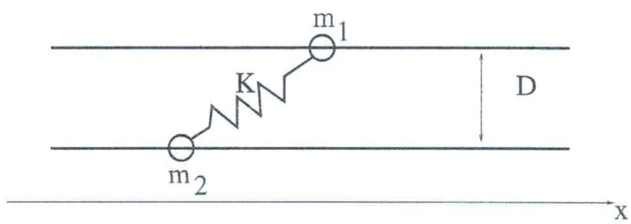
Themenschwerpunkt A

Mechanik

A1

Aufgabe 1: Zwei gekoppelte Massen auf Drähten



Auf zwei geraden, raumfesten Drähten, die im Abstand D voneinander parallel zur x-Achse verlaufen, ist jeweils eine Perle mit Masse m_1 bzw. m_2 gefädelt. Die Perlen sollen als Punktmassen betrachtet werden. Sie gleiten reibungsfrei auf ihrem jeweiligen Draht und sind über eine Hook'sche Feder der Federkonstante K miteinander verbunden. In entspanntem Zustand hat diese Feder die Länge D. Es wirkt keine Schwerkraft.

a) Wählen Sie die x-Koordinaten x_1 und x_2 der Punktmassen als generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. (5 Punkte)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. (5 Punkte)

c) Geben Sie die Erhaltungsgrößen des Problems an und begründen Sie Ihre Aussagen jeweils mit einem Satz in Worten oder einer kurzen Rechnung. (4 Punkte)

d) Leiten Sie aus den beiden Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2 eine Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate $x_r := x_1 - x_2$ her, indem Sie die übliche reduzierte Masse μ einführen.

Zur Kontrolle: Sie sollten eine Gleichung der Form

$$A_1 \ddot{x}_r + A_2 x_r + A_3 \frac{x_r}{\sqrt{x_r^2 + A_4}} = 0$$

mit Konstanten A_1, A_2, A_3, A_4 erhalten. (5 Punkte)

e) Abschließend sollen Sie den wesentlichen Schritt tun, um die Bewegungsgleichung aus Teilaufgabe d) zu lösen. Es genügt dafür, dass Sie die Umkehrfunktion $t(x_r)$ herleiten, d. h. Sie müssen diese nicht nach $x_r(t)$ auflösen. (6 Punkte)

Hinweis: Sie sollten ein Ergebnis der Form

$$t - t_0 = \int_{x_r(t_0)}^{x_r(t)} \frac{1}{F(\tilde{x}_r)} \, \mathrm{d}\tilde{x}_r$$

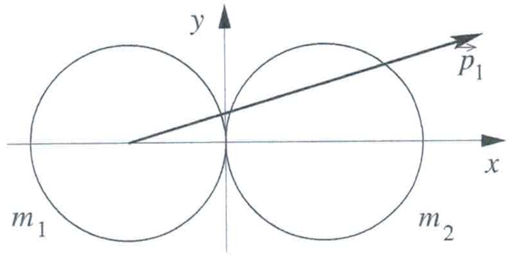
erhalten, wobei $x_r(t_0)$ die Relativkoordinate zum Anfangszeitpunkt t_0 ist und $F(x_r)$ eine Funktion, die Sie bestimmen sollen. Sie dürfen davon ausgehen, dass Ihnen die Energie der Relativbewegung aus der Anfangsbedingung bekannt ist.

Hinweis: Folgende Stammfunktion kann hilfreich sein: $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{ax^2+b}}{a}$.
Wenn Sie Teilaufgabe d) nicht lösen konnten, dann arbeiten Sie hier mit der Kontrollangabe aus Teilaufgabe d).

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Glatter Stoß zweier Massen

Gegeben seien zwei Kugeln mit Massen m_1 bzw. m_2 und gleichen Radien R. Die Masse m_2 sei in Ruhe. Die Masse m_1 mit Impuls $\vec{p}_1$ stoße elastisch auf die Masse m_2, siehe die Abbildung, welche die Situation unmittelbar vor dem Moment des Kontakts wiedergibt. Der Stoß sei glatt, d. h. der Kraftstoß hat nur eine x-Komponente, und es werde kein Drehimpuls ausgetauscht.
Hinweis: Die physikalischen Größen vor und nach dem Stoß sollen ohne bzw. mit einem Strich notiert werden.



a) Welche mechanischen Größen sind hier erhalten? (Begründungen!) (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Impulskomponenten p'_{1y}, p'_{1x}, p'_{2y} und p'_{2x} nach dem Stoß als Funktion von p_{1y}, p_{1x} und den Massen. (8 Punkte)

c) Der Streuwinkel θ ist der Winkel zwischen $\vec{p}'_1$ und $\vec{p}_1$. Bestimmen Sie $\cos\theta$ als Funktion von p_{1y}, p_{1x} und den Massen und anschließend als Funktion von $\sin\alpha$ mit dem Winkel α zwischen der Richtung des Impulses $\vec{p}_1$ und der x-Achse.
Bestimmen Sie θ für die drei voneinander unabhängigen Fälle $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, und $m_1 = m_2$.
Skizzieren Sie in der Skizze des Aufgabenblatts die Impulse $\vec{p}'_1$, $\vec{p}'_2$ unmittelbar nach dem Stoß sowie die Winkel α und θ. (13 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

B1

Aufgabe 1: Geladene Kugel

Eine geladene Kugel mit Radius R habe die kugelsymmetrische Ladungsdichte

$$\rho(r) = Cr \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq R.$$

a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q der Kugel. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(r)$ innerhalb und außerhalb der Kugel als Funktion des Abstandes r. (7 Punkte)

c) Die Energiedichte des elektrostatischen Feldes lautet $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$. Berechnen Sie die Feldenergien $W_{i,a}$ innerhalb bzw. außerhalb der Kugel und zeigen Sie $W_i = W_a/7$. (7 Punkte)

d) Betrachten Sie nun zwei punktförmige Ladungen $Q/2$ im Abstand d. Für welches Verhältnis d/R stimmt die Wechselwirkungsenergie der Punktladungen mit der Gesamtenergie $W_g = W_i + W_a$ der Kugel überein? (3 Punkte)

e) Für welche kugelsymmetrische Ladungsdichte ist die Energie W_g der Kugel bei fester Ladung Q minimal? (5 Punkte)

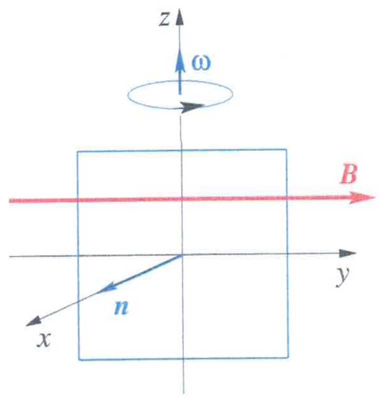
20/25

Aufgabe 2: Rotierende Leiterschleife im magnetischen Feld

Eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Leiterschleife umschließe eine quadratische Fläche (Seitenlänge a) wie in der Skizze (zum Zeitpunkt $t = 0$) angegeben. Ihr Normalenvektor sei

$$\vec{n}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y \,. \tag{1}$$

In der y-Richtung liege ein zeitlich konstantes homogenes magnetisches Induktionsfeld $\vec{B}$ an.



Im Folgenden sollen die Beiträge von den einzelnen Leiterstücken zur Induktionsspannung bestimmt werden. In der Leiterschleife fließe *kein* Strom, vielmehr seien die Ladungselemente dq als *fixiert* angenommen. (Ein Strom fließt erst *nach* dem Aufbau der Induktionsspannung; das soll hier nicht betrachtet werden.)

a) Bestimmen Sie den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife und die gesamte induzierte Spannung $U_{\text{ind}}(t)$ im Leiter mit dem Durchflutungsgesetz. (3 Punkte)

b) Welche Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat ein Ladungselement dq als Funktion des Ortes in den verschiedenen („vertikalen“ und „horizontalen“) Teilen der Leiterschleife und als Funktion der Zeit allein auf Grund der Rotation? (10 Punkte)

c) Bestimmen Sie das Element d$\vec{K}$ der Lorentz-Kraft $\vec{K}$ auf ein Ladungselement dq in den „vertikalen“ und „horizontalen“ Teilen der Leiterschleife als Funktion des Ortes und der Zeit. (7 Punkte)

d) Von der jeweils in Teilaufgabe c berechneten Kraft d$\vec{K}$ (auf dq) kann man auf das induzierte elektrische Feld $\vec{E}$ an den verschiedenen Stellen im Leiter schließen. Was erhält man hier für die induzierten elektrischen Felder in den Leiterstücken und für die induzierte Spannung? Überprüfen Sie das Ergebnis mit der induzierten Spannung von Teilaufgabe a). (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Thermodynamik inkompressibler Medien

Ein inkompressibles Medium genüge der Zustandsgleichung $V = V(T)$, d. h. das Volumen V hänge nur von der absoluten Temperatur T ab. Die Teilchenzahl und die chemische Zusammensetzung des Mediums seien fest.

a) Da die Entropie S eine Zustandgröße ist, muss $\mathrm{d}S = \delta Q/T$ ein vollständiges Differential sein, wobei δQ das Wärmedifferential bezeichnet. Welche Bedingung ergibt sich hieraus im Falle des oben charakterisierten inkompressiblen Mediums, wenn das Differential von S durch die Änderungen $\mathrm{d}T$ der Temperatur T und $\mathrm{d}p$ des Druckes ausgedrückt wird ? (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}T^2} = 0$$

gelten muss, falls die spezifische Wärme des inkompressiblen Mediums bei konstantem Druck C_p nicht vom Druck p abhängt. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie die innere Energie U als Funktion der Temperatur T und des Druckes p für den Fall, dass C_p eine Konstante ist, die weder vom Druck noch von der Temperatur abhängt. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie die Entropie S ebenfalls als Funktion von T und p, wobei wie in Teilaufgabe c) ein konstantes C_p angenommen werden soll. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Zustandsgleichungen eines Gases C2

a) Formulieren Sie den ersten und zweiten Hauptsatz für reversible Prozesse bei Gasen, und leiten Sie damit die folgende (allgemeine) Relation zwischen der kalorischen Zustandsgleichung $U = U(T,V)$ und der thermischen Zustandsgleichung $p = p(T,V)$ eines Gases her:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\,.$$

(7 Punkte)

b) Die innere Energie U und der Druck p eines Gases seien durch die spezielle Relation $pV = U$ miteinander verknüpft. Leiten Sie hieraus eine Differentialgleichung für U her und bestimmen Sie mit dem Ansatz

$$U(T,V) = T^{3/2} f(V)$$

die volumenabhängige Funktion $f(V)$. (4 Punkte)

Zur Kontrolle: $f(V) \sim \sqrt{V}$

c) Berechnen Sie für das Gas in Teilaufgabe b) die Entropie $S(T,V)$ sowie die Wärmekapazitäten $C_V(T,V)$ und $C_p(T,V)$ bei konstantem Volumen bzw. konstantem Druck. (9 Punkte)

d) Zur weiteren Anwendung von Teilaufgabe a) gelte nun die van der Waals-Gleichung

$$p = \frac{NkT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\,.$$

Bestimmen Sie die innere Energie $U(T,V)$ eines van der Waals-Gases mit konstanter isochorer Wärmekapazität C_V. Im Grenzfall $V \to \infty$ ist das Ergebnis des idealen Gases zu reproduzieren.

(5 Punkte)

$$du = -p \cdot dV + T \cdot dS$$

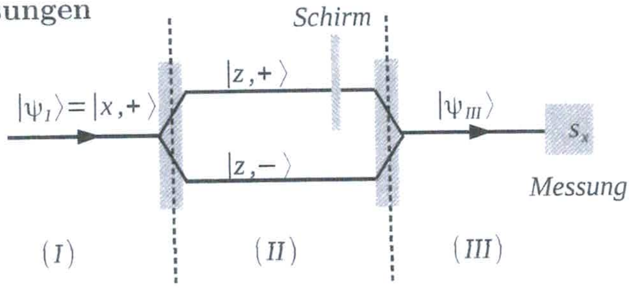
$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T \cdot dV + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V d\cancel{S}\,T$$

-S u V
H F
-p G T

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Spinmessungen



An einem Strahl aus geladenen Quantenteilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ werden verschiedene Messungen durchgeführt. Die Eigenzustände (genauer: deren Eigenvektoren) zu den Spinoperatoren

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mit Eigenwert $\pm\hbar/2$ werden mit $|x,\pm\rangle$, bzw. $|z,\pm\rangle$ bezeichnet. Der Zustand im Bereich (I) sei $|\psi_I\rangle = |x,+\rangle$. In der im Bild gezeigten Versuchsanordnung wird der aus dem Bereich (I) einlaufende Strahl durch einen Stern-Gerlach-Apparat im Bereich (II) in einen oberen Strahl im Zustand $|z,+\rangle$ und einen unteren im Zustand $|z,-\rangle$ aufgeteilt und anschließend wieder zusammengeführt. Die Aufspaltung und Zusammenführung erfolgt ohne relative Phasenverschiebung. Im Bereich (II) findet keine Messung statt. Der obere Weg kann zusätzlich durch Einschub eines Schirms im Bereich (II) blockiert werden.

a) Geben Sie die normierten Eigenzustände der Spinoperatoren $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_z$ mit den zugehörigen Eigenwerten s_x und s_z an. (2 Punkte)

b) Der Schirm sei zunächst entfernt. Geben Sie den Zustand $|\psi_{\text{III}}\rangle$ im Bereich (III) und die Wahrscheinlichkeit $p(x,+)$ dafür an, in diesem Zustand den Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ für den Operator $\hat{s}_x$ zu messen. (2 Punkte)

c) Der Schirm wird nun angebracht, sodass nur der untere Teilchenstrahl den Bereich (III) erreichen kann. Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit $p(x,+)$ für eine Messung im Bereich (III) her. (6 Punkte)

d) Der Schirm werde nun wieder entfernt. Im Bereich (II) seien aber die Energieeigenwerte der Zustände im unteren Teilchenstrahl relativ zu denen im oberen Strahl verschoben (z. B. durch ein Magnetfeld im Bereich (II)), sodass

$$E(s_z = -\tfrac{\hbar}{2}) = E(s_z = +\tfrac{\hbar}{2}) - \Delta E, \qquad \Delta E > 0$$

gilt. Zum Durchlaufen des Bereichs (II) sollen die beiden Teilchenstrahlen die gleiche Zeit τ benötigen. Bestimmen Sie nun wieder die Wahrscheinlichkeit $p(x,+)$ für die Messung des Eigenwertes $+\frac{\hbar}{2}$ im Bereich (III). Drücken Sie dazu den zeitabhängigen Zustand im Bereich (II) zunächst in der Form $|\psi_{\text{II}}(t)\rangle = a_+(t)|x,+\rangle + a_-(t)|x,-\rangle$ aus. Geben Sie die Koeffizienten $a_\pm$ und die Wahrscheinlichkeit $p(x,+)$ an. Kann man die Laufstrecke, und damit τ, so wählen, dass $p(x,+) = 0$? (11 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

e) In der gleichen Situation wie in Teilaufgabe c) wird nun wieder der Schirm in den oberen Teilchenstrahl eingebracht. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit $p(x,+)$? (4 Punkte)

D2

Aufgabe 2: Was man an einer Wellenfunktion ablesen kann

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(r)$, von dem man lediglich weiß, dass es zentralsymmetrisch ist. Gegeben sei außerdem eine Wellenfunktion

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(\pi b^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2b^2} - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2mb^2}t\right\}, \tag{1}$$

welche eine Lösung der zugehörigen zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung sei.

a) Prüfen Sie die Normierung. Warum ist (1) eine Grundzustandswellenfunktion? Bestimmen Sie die zugehörige Energie. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie das zugehörige Potential. Um was für ein System handelt es sich? Vergleichen Sie das Potential mit dem in der herkömmlichen Form. (10 Punkte)

c) Was kann man (fast) ohne Rechnung über die durch die Wellenfunktion (1) definierten Wahrscheinlichkeits(strom)dichten ρ und $\vec{j}$ (in der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$) aussagen? (Begründungen!) Warum gibt die Zahl der Knoten einer Wellenfunktion einen groben Hinweis auf die Anordnung der Energieniveaus? (4 Punkte)

d) Das Drehimpulsquadrat L^2 der klassischen Mechanik ist eine Erhaltungsgröße, weil ein Zentralpotential vorliegt. Unter welcher Voraussetzung ist L^2 im quantenmechanischen Fall eine Erhaltungsgröße? Prüfen Sie das für den hier gegebenen Fall explizit nach. Welchen Eigenwert erhält man gegebenenfalls? (4 Punkte)

Hinweise: Der Operator der kinetischen Energie ist

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} \quad \text{mit} \quad \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

und dem Drehimpuls-Operator $\vec{L}$. Ferner gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$$