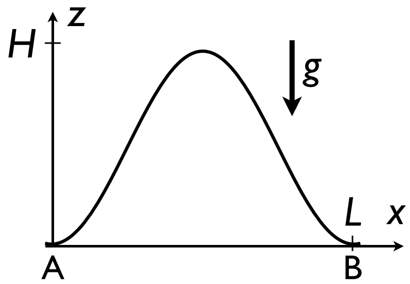
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Berg- und Talfahrt

Eine Straße verbinde die auf der gleichen Höhe über dem Meeresspiegel liegenden Orte A und B. Das Höhenprofil der Straße sei gegeben durch $z(x) = \frac{H}{2}[1 - \cos(2\pi x/L)]$, wobei H ein Maß für die Höhenmodulation ist und L den horizontalen Abstand von A und B bezeichnet; die Variable x kennzeichnet dabei den (horizontalen) Abstand zum Ort A (siehe Skizze).

Ein Fahrzeug mit Masse m starte zur Zeit $t = 0$ bei A und fahre mit konstantem Betrag v der Geschwindigkeit nach B. Dabei wirke die Schwerkraft, sowie aufgrund der Fahrwiderstände eine rücktreibende Kraft $-\gamma\vec{v}$, wobei $\gamma > 0$ eine Reibungskonstante ist.



a) Berechnen Sie den tangentialen und den normalen Einheitsvektor der Straße als Funktion des Parameters $\mu = dz/dx$. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für μ als Funktion von x an. Berechnen Sie weiterhin die horizontale und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit, v_x und v_z, als Funktion von x. (8 Punkte)

b) Geben Sie einen Ausdruck für die Fahrzeit T von A nach B an. Berechnen Sie T explizit näherungsweise in niedrigster nicht-verschwindender Ordnung in H/L.
Hinweis: Taylorentwicklung $\sqrt{1 + \epsilon^2} \approx 1 + \epsilon^2/2$. (8 Punkte)

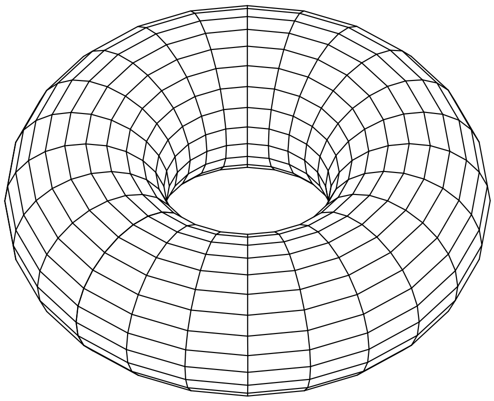
c) Geben Sie die Leistung P in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, der Länge der insgesamt zurückgelegten Strecke und der Konstanten γ an und berechnen Sie die während der gesamten Fahrt geleistete Arbeit W. (9 Punkte)

Aufgabe 2: Kleine Schwingungen um Gleichgewichtslagen

Ein torusförmiger Hohlkörper (z.B. ein Schwimmring) liegt horizontal im Schwerefeld der Erde, siehe die Abbildung. Im Innern kann sich eine Punktmasse der Masse m reibungsfrei auf der Oberfläche des Torus bewegen. Der Torus lässt sich durch zwei Winkel $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ wie folgt parametrisieren,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - a\sin\psi)\cos\varphi \\ (A - a\sin\psi)\sin\varphi \\ -a\cos\psi \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Radien $A > a$ sind dabei wie folgt definiert: Wenn man den Torus auf eine horizontale Ebene projiziert, erhält man einen Kreisring mit Innenradius $A - a$ und Außenradius $A + a$.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion dieses mechanischen Systems auf. Verwenden Sie φ, ψ als generalisierte Koordinaten. (9 Punkte)

b) Welche beiden Erhaltungsgrößen lassen sich unmittelbar aus der Lagrange-Funktion ablesen? Geben Sie die Erhaltungsgrößen und die zugehörigen Symmetrien an. (8 Punkte)

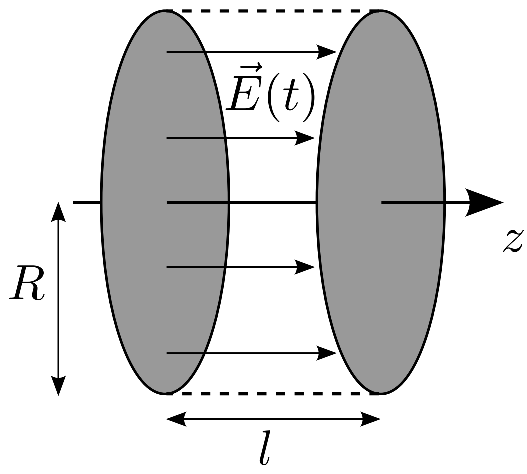
c) Bestimmen Sie die (stabilen) Gleichgewichtslagen der Punktmasse. Berechnen Sie die Frequenzen kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslagen mit Hilfe der linearisierten Bewegungsgleichungen. I nterpretieren Sie das Ergebnis und vergleichen Sie mit einem mathematischen Pendel. (8 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Verschiebungsstrom im Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen kreisförmigen Platten vom Radius R im Abstand $l \ll R$. Die Kreisscheiben stehen senkrecht zur z-Achse und ihre Mittelpunkte liegen auf der z-Achse. Dieser Kondensator wird nun langsam aufgeladen, so dass das zeitabhängige elektrische Feld zwischen den Platten die Form $\vec{E}(\vec{r},t) = Kt\,\vec{e}_z$ hat, wobei K eine Konstante ist.



a) Berechnen Sie im Bereich $0 < z < l$, $0 < \rho < R$ das durch den Verschiebungsstrom induzierte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ als Funktion des Abstandes ρ von der Symmetrieachse des Kondensators. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld (wie bei einem stromdurchflossenen Leiter) nur eine azimutale Komponente hat: $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie den gesamten Energiefluss J in das zylindrische Volumen zwischen den Kondensatorplatten hinein, sowie die in diesem Volumen gespeicherte Feldenergie $\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t)$. Die elektromagnetische Feldenergiedichte ist durch $w_{\mathrm{em}} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^{\,2} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^{\,2}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t)/\mathrm{d}t = J$ gilt. (8 Punkte)

d) Nun werde eine beliebige Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten angenommen: $\vec{E}(\vec{r},t) = E(t)\,\vec{e}_z$ mit $E(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Form $E(t) = Kt$ als einzige mit den gekoppelten Maxwell-Gleichungen konsistent ist. (6 Punkte)
Hinweis: Leiten Sie eine Wellengleichung für $\vec{E}$ her.

Aufgabe 2: Bildladung und Fernfeld

Eine Ladung q befinde sich auf der z-Achse im Abstand a über einer unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatte, die in der x-y-Ebene liege.

a) Benutzen Sie die Bildladungsmethode, um das Potential $\phi(\vec{r})$ oberhalb der Metallplatte anzugeben. Weisen Sie nach, dass das Potential auf der Metallplatte überall verschwindet. (5 Punkte)

b) Nun werde das Potential auf der Linie $x = y = 0$ betrachtet. Berechnen Sie, wie das Potential für große Abstände $z \gg a$ von der Metallplatte abfällt. Von welchem führenden Multipolmoment wird dieses asymptotische Potential erzeugt? (7 Punkte)

Nun werde eine Ladung q auf der z-Achse im Abstand $a > R$ über einer geerdeten Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung betrachtet. Im Rahmen der Bildladungsmethode macht man für das Potential auf der z-Achse den Ansatz

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|z-a|} + \frac{q'}{|z-a'|}\right) . \tag{1}$$

c) Bestimmen Sie die Parameter q' und $a' < R$ der Bildladung, indem Sie die Punkte $z = \pm R$ betrachten. (8 Punkte)

d) Berechnen Sie den Abfall des Potentials für große Abstände $z \gg a$. Erklären Sie mit Hilfe der Eigenschaften der jeweiligen Bildladungen, warum das Potential für die Ladung vor der Metallkugel langsamer abfällt als für die Ladung vor der Metallplatte. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Joule-Thomson-Expansion in einem idealen Quantengas

Standardmethode zur Kühlung ist die Joule-Thomson-Expansion, bei der ein Gas bei konstanter Enthalpie $H = U + pV$ expandiert.

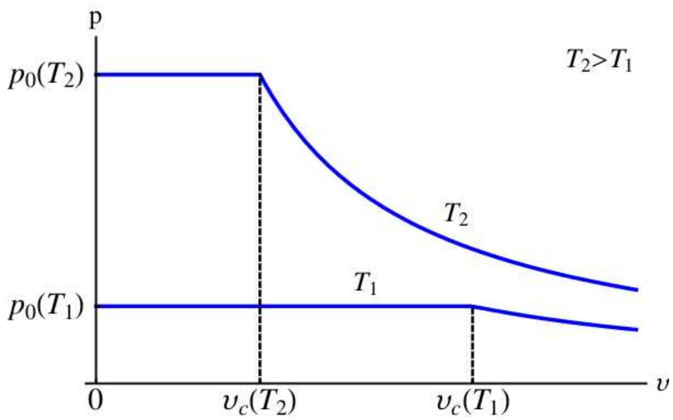
a) Für jedes ideale Gas, sowohl klassisch als auch in der Quantenmechanik, ist die innere Energie U durch die Beziehung $U = 3pV/2$ mit dem Druck p und dem Volumen V verbunden. Zeigen Sie, dass die Änderung des spezifischen Volumens $v = V/N$ mit dem Druck p bei konstanter Enthalpie pro Teilchen $\tilde{h} = H/N$ durch $(\partial v/\partial p)_{\tilde{h}} = -v/p$ gegeben ist. (6 Punkte)

b) Begründen Sie, weshalb in einem idealen *klassischen* Gas der Joule-Thomson-Koeffizient $\mu_{\mathrm{JT}} = (\partial T/\partial p)_{\tilde{h}}$ identisch verschwindet. (6 Punkte)

Die Isothermen eines idealen Bosegases besitzen die Eigenschaft, dass sie unterhalb des temperaturabhängigen spezifischen Volumens $v < v_c(T) = 2.61/\lambda_T^3$ völlig flach verlaufen, d.h. der Druck

$$p(v < v_c(T), T) = p_0(T) = 1.34\,\frac{k_B T}{\lambda_T^3} \quad \text{mit} \quad \lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \tag{1}$$

hängt nicht mehr von v ab und ist lediglich eine Funktion der Temperatur (siehe Skizze). Dabei ist λ_T die thermische Wellenlänge der Teilchen mit Masse m.



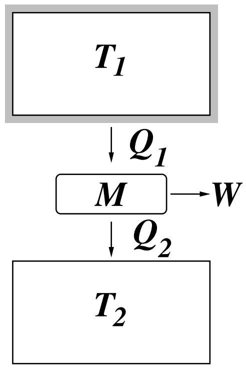
c) Berechnen Sie den Joule-Thomson Koeffizienten eines idealen Bosegases im Bereich $v < v_c$ aus der allgemeinen Relation

$$\mu_{\mathrm{JT}} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\tilde{h}} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\tilde{h}}$$

unter Verwendung von $(\partial T/\partial v)_p = -\,(\partial T/\partial p)_v\,(\partial p/\partial v)_T$. (13 Punkte)

Aufgabe 2: Energiespeicher

Bei der aktuellen Diskussion über die Speicherung elektrischer Energie wird auch die Idee verfolgt, mit einer strombetriebenen Wärmepumpe ein Reservoir — z. B. einen wärmeisolierten, mit Wasser gefüllten Tank — aufzuheizen, um zu einem späteren Zeitpunkt mit einer Wärmekraftmaschine die elektrische Energie zurückzugewinnen.
Sie sollen den Wirkungsgrad für diesen Rückgewinnungsprozess unter folgenden Annahmen berechnen:



(*i*) Die Temperatur T_2 des unteren Reservoirs, beispielsweise ein nahegelegener Fluss, sei konstant.

(*ii*) Das obere Reservoir sei auf die Temperatur $T_1 > T_2$ aufgeheizt und habe die von T unabhängige Wärmekapazität C.

(*iii*) Die Maschine M arbeite zyklisch und der gesamte Prozess sei reversibel.

(*iv*) Das obere Reservoir soll seine Überschussenergie vollständig abgeben, am Ende also die Temperatur T_2 haben.

a) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad $\eta = W/Q_1$ gegeben ist durch

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} \tag{1}$$

Dabei ist Q_1 die gesamte Wärmeenergie, die dem Tank entnommen wird, und W ist die von der Maschine geleistete Arbeit.

(10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass dieses η kleiner ist als der Carnot-Wirkungsgrad $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Hinweis: Es gilt $f(x) = \ln x - (1 - 1/x) > 0$ für $x > 1$.

(4 Punkte)

c) Für eine Zwischentemperatur T des oberen Reservoirs während des *Entladevorgangs*, $T_2 < T < T_1$, und einen *kleinen* Schritt $\mathrm{d}T$ sollte der Carnot-Wirkungsgrad $\eta_{Carnot}(T) = 1 - \dfrac{T_2}{T}$ gelten. Berechnen Sie den Mittelwert

$$\langle \eta_{Carnot} \rangle = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} \eta_{Carnot}(T)\, \mathrm{d}T$$

(5 Punkte)

d) Wie kann man dieses Resultat mit Hilfe der Gleichung (1) verstehen?

(6 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Stufe im Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Potentialtopf, der bei $x = \pm a$ durch unendlich hohe Potentialwände begrenzt ist und im Innern eine Potentialstufe der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & -a < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < a \end{cases} \tag{2}$$

aufweist. Hierbei sei $V_0 \geq 0$.

a) In Abwesenheit einer Stufe, d.h. $V_0 = 0$, kann die Grundzustandswellenfunktion in der Form

$$\psi_0(x) = \mathcal{N}_0 \sin\big(\lambda_0(x-a)\big)\,. \tag{3}$$

geschrieben werden. Bestimmen Sie die zugehörige Wellenzahl λ_0 und die Grundzustandsenergie E_0. Berechnen Sie außerdem den Normierungsfaktor $\mathcal{N}_0$ der Wellenfunktion. (7 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung zur Bestimmung der Eigenenergien mit $E > V_0$ im Potentialtopf mit Stufe durch

$$k' \cos(k'a) \sin(ka) + k \cos(ka) \sin(k'a) = 0 \tag{4}$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \text{und} \qquad k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \tag{5}$$

gegeben ist. Weisen Sie nach, dass diese Gleichung für $V_0 = 0$ auf die Grundzustandsenergie aus Teilaufgabe a führt.
Hinweis: Es kann sinnvoll sein, ähnlich wie in Teilaufgabe a geeignet verschobene trigonometrische Funktionen zu verwenden. (9 Punkte)

c) Berechnen Sie nun die Verschiebung der Grundzustandsenergie aus Teilaufgabe a durch eine niedrige Potentialstufe mit $\delta = 2mV_0a^2/\hbar^2 \ll 1$. Es genügt, die Rechnung in erster Ordnung in δ durchzuführen, also näherungsweise

$$k \approx \frac{\pi}{2a} + c\delta \quad \text{und} \quad k' \approx \frac{\pi}{2a} + c'\delta \tag{6}$$

zu setzen. Leiten Sie zunächst mit Hilfe von (5) einen Zusammenhang zwischen c und c' her. Bestimmen Sie anschließend den Koeffizienten c und damit die verschobene Grundzustandsenergie. (6 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die in Teilaufgabe c bestimmte Energieverschiebung durch den Erwartungswert des Potentials (2) bezüglich der normierten Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ aus Teilaufgabe a gegeben ist. (3 Punkte)

Nützliche Stammfunktionen:

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) \qquad\qquad \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Aufgabe 2: Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators

Wir definieren den Vernichtungsoperator

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta x + \frac{i}{\hbar\beta}p\right) \qquad \beta = \sqrt{m\omega/\hbar} \tag{1}$$

eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators (Orts- und Impulsoperator x, p, Masse m, Frequenz ω). Die Eigenvektoren von a zu den Eigenwerten $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$a|\,\alpha\rangle = \alpha|\,\alpha\rangle \tag{2}$$

sind die sogenannten *kohärenten Zustände*.

a) Finden Sie heraus, wie sich $|\,\alpha\rangle$ als Linearkombination von normierten Eigenvektoren $|\,n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots$ des Hamiltonoperators

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right) \tag{3}$$

schreiben lässt. (10 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie $a^\dagger|\,n\rangle = \sqrt{n+1}|\,n+1\rangle$ um Rekursionsrelationen zu erhalten.
Kontrolle:

$$|\,\alpha\rangle = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\,n\rangle \tag{4}$$

mit unbestimmter Konstante c.

b) Wir betrachten die Zeitentwicklung der kohärenten Zustände. Sei $|\,\Psi\rangle(t)$ die Lösung der Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung $|\,\Psi\rangle(0) = |\,\alpha\rangle$. Zeigen Sie unter Verwendung von (4), dass

$$|\,\Psi\rangle(t) = e^{-i\omega t/2}|\,\alpha(t)\rangle, \qquad \alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha. \tag{5}$$

(10 Punkte)

c) Berechnen Sie

$$\frac{\langle\alpha\,|\,x\,|\,\alpha\rangle}{\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle} \quad \text{und} \quad \frac{\langle\alpha\,|\,p\,|\,\alpha\rangle}{\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle}. \tag{6}$$

(5 Punkte)