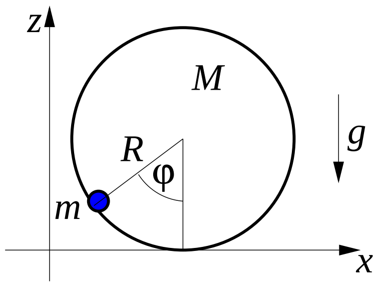
## Themenschwerpunkt A

Mechanik

### Aufgabe 1: Rad mit Unwucht

Gegeben sei ein Rad (homogene Massenverteilung, Gesamtmasse $M$, Radius $R$). Am Ort $\vec{r}$ auf der Lauffläche des Rades sei eine punktförmige Masse $m$ befestigt, sodass das Rad eine Unwucht hat. Das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ angetriebene Rad laufe ohne Schlupf auf der $(x, y)$-Ebene in $x$-Richtung im homogenen Schwerefeld (Schwerebeschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_z$). Für $\varphi = 0$ befindet sich die Punktmasse am Ursprung und der Schwerpunkt der Masse $M$ bei $x = 0$.




a) Stellen Sie die Rollbedingung für den Radmittelpunkt auf. Bestimmmen Sie daraus die Positionen $\vec{r}$ und $\vec{R}$ und die Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{V}$ der Punktmasse $m$ bzw. des Schwerpunkts der Masse $M$ als Funktion des Winkels $\varphi$. (10 Punkte)

*Zur Kontrolle:*

$$\vec{r} = R\,(\varphi - \sin\varphi)\,\vec{e}_x + R\,(1 - \cos\varphi)\,\vec{e}_z\ .$$

b) Bestimmen Sie das Drehmoment $\vec{N}$ des Antriebs auf die Achse der Masse $M$, welches zur Aufrechterhaltung der konstanten Winkelgeschwindigkeit notwendig ist, als Funktion der Zeit. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Kraft des Rades auf die Unterlage. Wie groß darf die Geschwindigkeit $V$ maximal sein, damit das Rad nicht von der Ebene abhebt? (10 Punkte)

## Aufgabe 2: Doppelmuldenpotential

Ein Teilchen der Masse $m$ schwinge in einer Dimension im Potential

$$U(x) = -ax^2 + bx^4\,;$$

$a$ und $b$ seien positive Konstanten.

a) Skizzieren Sie das Potential $U(x)$. (2 Punkte)

b) Welche physikalische Dimension haben die Konstanten $a$ und $b$, ausgedrückt durch Kilogramm, Meter und Sekunde? (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die beiden stabilen Ruhelagen des Teilchens. (3 Punkte)

d) Das Teilchen soll zunächst mit kleiner Auslenkung um eine der beiden stabilen Ruhelagen schwingen. Berechnen Sie die Frequenz $\omega$ der Schwingung. (5 Punkte)

e) Das Teilchen schwinge nun mit einer beliebigen Energie $E > -a^2/4b$. Berechnen Sie sämtliche Umkehrpunkte des Teilchens als Funktion seiner Energie $E$ (Fallunterscheidung). (5 Punkte)

f) Drücken Sie die Schwingungsdauer $T(E)$ des Teilchens durch ein Integral über den Ort $x$ aus. (4 Punkte)

g) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer $T(E)$ divergiert, wenn die Energie gerade noch ausreicht, das Teilchen über den Potentialberg zu bringen, also für den Grenzwert $E \to 0$. Betrachten Sie dazu den Beitrag zum vorherigen Integral für kleine Werte der Variablen $x$.
*Hinweis:* Verwenden Sie den Energiesatz. (4 Punkte)

## Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

### Aufgabe 1: Magnetischer Fluss durch eine Kreisbahn

Gegeben ist ein homogenes Magnetfeld in $z$-Richtung, d. h. $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

a) Zeigen Sie, dass ein Teilchen mit Masse $m$ und Ladung $q$, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt, mit der Frequenz $\omega_c = qB/m$, die Zyklotron-Frequenz genannt wird, eine Kreisbahn um die Magnetfeldlinien durchläuft. Sie können hierbei davon ausgehen, dass die $z$-Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens verschwindet, d. h. $v_z = 0$. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie weiterhin, dass die Kreisbahn den Radius $\rho = mv/qB$ hat, wobei $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ ist.
*Hinweis*: Die Lorentz-Kraft ist $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie den magnetischen Fluss durch die Kreisbahn. Drücken Sie das Ergebnis durch Masse, Ladung, Geschwindigkeit und magnetische Feldstärke aus. (5 Punkte)

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass das Magnetfeld sich mit der Zeit ändert. Dadurch wird ein elektrisches Feld $\vec{E}$ induziert. Zeigen Sie, dass dann die zeitliche Änderung der kinetischen Energie durch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\vec{v} \cdot \vec{E} \tag{1}$$

gegeben ist.
*Hinweis*: Überlegen Sie, um welchen Term Sie die oben angegebene Lorentz-Kraft ergänzen müssen, wenn ein elektrisches Feld $\vec{E}$ auf das Teilchen wirkt, und überlegen Sie weiterhin, welche Bewegungsgleichung dann für das Teilchen gilt. (5 Punkte)

e) Der Betrag der magnetischen Feldstärke, d. h. nicht aber ihre Richtung, wird nun langsam mit der Zeit verändert. Die Änderung erfolgt so langsam, dass sie nur zu sehr geringen Verformungen der Umlaufbahn führt, d. h. Sie können davon ausgehen, dass der Radius der Kreisbahn nach wie vor den in Teilaufgabe b) angegebenen Wert $\rho$ hat. Zeigen Sie unter dieser Annahme die Relation

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\rho v \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,,$$

indem Sie die Maxwell-Gleichung $\partial\vec{B}/\partial t = -\nabla \times \vec{E}$ über eine Kreisfläche integrieren.
(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

## Aufgabe 2: Parallele Linienladungen

In den Punkten der $(x, y)$-Ebene können in Richtung der $z$-Achse unendlich ausgedehnte Linienladungen mit konstanter Ladungsdichte $\rho(x, y, z) = C\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)$ angebracht werden.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das elektrische Feld für eine einzelne Linienladung durch den Punkt $(x_0, y_0)$, und zeigen Sie, dass das zugehörige Potential $\Phi(x, y, z)$ von der Form

$$\Phi = -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \ln r^2 + \Phi_0$$

ist, wobei $\Phi_0$ eine Konstante ist. Geben Sie $r$ als Funktion der Koordinaten $x, y$ und der Parameter $x_0, y_0$ an.
*Hinweis:* Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. (5 Punkte)

b) Leiten Sie das Potential $\Phi$ für zwei gleich große Linienladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen an den Punkten $(x = \pm a, y = 0)$ mit $a > 0$ her. Bestimmen Sie die Konstante so, dass das Potential im Unendlichen den Wert Null annimmt. (5 Punkte)

c) Geben Sie die allgemeine Form der Äquipotentialflächen zur Konfiguration der vorhergehenden Teilaufgabe an. Bestimmen Sie die Fläche $\Phi = 0$, auf der das Potential verschwindet. (5 Punkte)

d) Skizzieren Sie den Schnitt dieser Fläche $\Phi = 0$ mit der $(x, y)$-Ebene, und tragen Sie auch die Schnittpunkte der Linienladungen mit der $(x, y)$-Ebene ein. Skizzieren Sie ohne weitere Rechnung den Verlauf der Feldlinien des elektrischen Feldes in das gleiche Diagramm. (5 Punkte)

e) In der $(y, z)$-Ebene $(x = 0)$ wird nun eine unendlich ausgedehnte geerdete Metallplatte angebracht. Wie lautet die Randbedingung an das elektrische Feld $\vec{E}$? Bestimmen Sie das Potential und das elektrische Feld für diese Konfiguration, und überprüfen Sie explizit, dass $\vec{E}$ die Randbedingung an der Metallplatte erfüllt. (5 Punkte)

## Themenschwerpunkt C

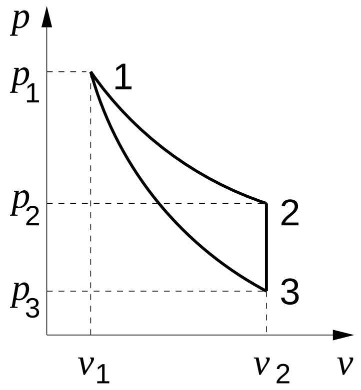
### Thermodynamik

**Aufgabe 1: Kreisprozess**

Ein Kreisprozess bestehe aus einer Adiabaten, einer Isothermen und einer Isochoren, wie nebenstehend skizziert. Der Kreisprozess soll reversibel ablaufen und eine Wärmekraftmaschine beschreiben. Das Arbeitsmedium sei ein ideales Teilchen-Gas mit der (molaren) Entropie $s$ mit

$$\mathrm{d}s(p,v) = c_v \frac{\mathrm{d}p}{p} + c_p \frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{1}$$

mit der Gaskonstanten $R$, dem Molvolumen $v$ und konstanten spezifischen Wärmen $c_v$ und $c_p = c_v + R$.
Gegeben seien $p_1$, $v_1$ und $v_2$ (siehe Skizze).




a) Zeigen Sie, dass für adiabatische Prozesse

$$pv^\gamma = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

gilt. Identifizieren Sie (mit Begründung) die drei Kurven des $(p,v)$-Diagramms. (8 Punkte)

b) Geben Sie den Umlaufsinn für den Betrieb der Maschine als Wärmekraftmaschine an (mit Begründung). (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die unbekannten Drücke und Temperaturen an den drei Prozesspunkten 1, 2 und 3 als Funktion von $p_1$, $v_1$ und $v_2$. (8 Punkte)

d) Bestimmen Sie das Vorzeichen der von der Maschine aufgenommenen bzw. abgegebenen Wärmen und Arbeiten auf den drei Wegstücken (mit Begründung, ohne Rechnung). (6 Punkte)

**Aufgabe 2: Spezifische Wärmen des van-der-Waals-Gases**

Die thermische Zustandsgleichung des van-der-Waals-Gases lautet

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT\,.$$

Hierbei ist $p$ der Druck, $T$ die Temperatur, $v$ das Volumen und $R$ die universelle Gaskonstante. Alle extensiven Größen seien auf ein Mol bezogen. $a$ und $b$ sind strikt positive Konstanten. In dieser Aufgabe soll die Differenz zwischen den Molwärmen $c_p$ bei konstantem Druck und $c_v$ bei konstantem Volumen für das van-der-Waals-Gas bestimmt werden.

In den Teilaufgaben a–c sollen zunächst allgemeine thermodynamische Beziehungen hergeleitet werden, die in Teilaufgabe d dann auf das van-der-Waals-Gas angewandt werden.

a) Leiten Sie die Beziehung

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}$$

her, indem Sie zum Beispiel den Druck als Funktion des Molvolumens und der Temperatur auffassen und das zugehörige Differential betrachten. (4 Punkte)

b) Geben Sie den ersten Hauptsatz der Thermodynamik an, und leiten Sie daraus die Beziehung

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

her. (7 Punkte)

c) Zeigen Sie die Beziehung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\,.$$

*Hinweis*: Ein möglicher Lösungsweg führt über die Benutzung einer geeigneten Maxwell-Relation. (5 Punkte)

d) Leiten Sie aus den in den ersten drei Teilaufgaben hergeleiteten Beziehungen einen Ausdruck ab, der es erlaubt, die Differenz der Molwärmen $c_p - c_v$ aus der thermischen Zustandsgleichung des van-der-Waals-Gases zu bestimmen, ohne nach dem Volumen auflösen zu müssen. Überprüfen Sie diese Beziehung zunächst für das ideale Gas. Bestimmen Sie sodann $c_p - c_v$ für das van-der-Waals-Gas. Wie verändert sich die Differenz im Vergleich zum idealen Gas? (9 Punkte)

## Themenschwerpunkt D

### Quantenmechanik

**Aufgabe 1: Teilchen in der Kugel**

Ein Teilchen der Masse $m$ befinde sich in einem radialsymmetrischen Potential

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < r < R \\ \infty & \text{für } R < r\,. \end{cases}$$

Hierbei ist $r$ der Abstand vom Ursprung.
Hier und im Folgenden werden Kugelkoordinaten verwendet.

a) Wie lautet der Hamilton-Operator für $r < R$? Verwenden Sie den Drehimpulsoperator, um zusammen mit dem Hamilton-Operator einen Satz von drei miteinander kommutierenden Operatoren zu bilden. Begründen Sie in Worten kurz Ihre Wahl. Wie lauten die Eigenwerte der von Ihnen gewählten Operatoren? (10 Punkte)

Im Folgenden beschränken wir uns auf $s$-Zustände. Für diese Zustände hängt die Wellenfunktion nur von der Radialkoordinate $r$ ab.

b) Welcher Bedingung muss die Wellenfunktion bei $r = R$ genügen? Darf sie bei $r = 0$ divergieren? Geben Sie die Differentialgleichung an, welche die Wellenfunktion $\psi(r)$ erfüllen muss. (3 Punkte)

*Hinweis*: Der radiale Anteil des Laplace-Operators lautet

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

c) Zur Bestimmung der Eigenfunktionen ist es sinnvoll, den Ansatz $\psi(r) = f(r)/r$ zu machen. Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $f(r)$ her, und lösen Sie diese unter Berücksichtigung der in der vorigen Teilaufgabe aufgestellten Bedingungen. Wie lauten die zugehörigen Energieeigenwerte? (8 Punkte)

d) Normieren Sie die in der vorigen Teilaufgabe berechneten Eigenfunktionen. (4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 2: Zeitabhängiges Wellenpaket im Oszillatorpotential**

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung des eindimensionalen, harmonischen Oszillators lautet

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \psi \,. \tag{1}$$

Mit Hilfe eines Ansatzes sollen Lösungen dieser Gleichung in Form von Gauss'schen Wellenpaketen gefunden werden, bei welchen der Schwerpunkt des Wellenpaketes sich wie ein klassischer, harmonischer Oszillator bewegt, während die Breite zeitlich konstant bleibt.

a) Wir betrachten ein zeitabhängiges, Gauss'sches Wellenpaket der Form

$$\psi(x,t) = \exp\{\mathrm{i}f(t)\}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}q(t)x}{\hbar}\right\}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a(t))^2\right\} \,. \tag{2}$$

Dabei seien $f(t)$, $q(t)$, $a(t)$ reelle Funktionen von $t$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle$ des Ortsoperators und $\langle p\rangle$ des Impulsoperators für diesen Zustand. Wie verhält sich die Breite des Wellenpaketes als Funktion der Zeit? (8 Punkte)

b) Setzen Sie nun den Ansatz (2) in die Schrödinger-Gleichung (1) ein, und kürzen Sie einen gemeinsamen Faktor $\psi$ heraus. Da die resultierende Gleichung für alle $x$ gilt, müssen sich die Terme proportional zu $x^n$ (mit $n = 0, 1, 2$) getrennt wegheben. Zeigen Sie, dass die Terme proportional zu $x^2$ verschwinden, und leiten Sie aus den Termen der Ordnung $x^1$, $x^0$ zwei Differentialgleichungen für die Funktionen $f(t)$, $q(t)$, $a(t)$ her. (12 Punkte)

c) Nach dem Ehrenfest-Theorem

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \langle[A,H]\rangle \tag{3}$$

für eine Observable $A$ erfüllen die Erwartungswerte $\langle x\rangle, \langle p\rangle$ für den harmonischen Oszillator die klassischen Bewegungsgleichungen,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle = \frac{\langle p\rangle}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = -m\omega^2\langle x\rangle \,. \tag{4}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a, dass die Terme von der Ordnung $x^1$ in Teilaufgabe b verschwinden. (5 Punkte)