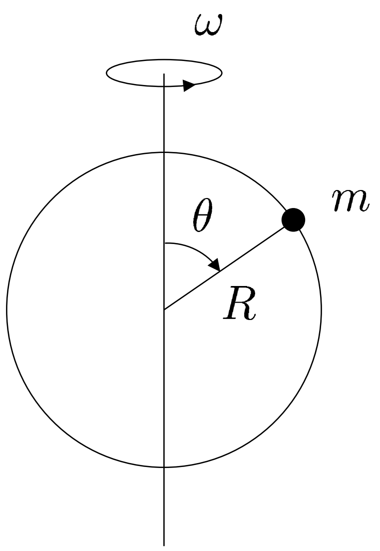
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Perle auf rotierendem, kreisförmigem Draht

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei auf einem kreisförmigen Draht bewegen. Die Ausdehnung der Perle und die Dicke des Drahtes seien vernachlässigbar. Der Draht rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse durch den Kreismittelpunkt. Die Winkelgeschwindigkeit sei so hoch, dass die Schwerkraft keine Rolle spielt.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf unter Verwendung des Winkels θ aus der Abbildung. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der Perle, ihre Stabilität und die Frequenz kleiner Schwingungen um die stabile(n) Gleichgewichtslage(n). (9 Punkte)

c) Die Perle führe eine periodische Bewegung zwischen den Umkehrpunkten θ_0 und $\pi - \theta_0$ aus. Wie hängt die Energie der Perle vom Winkel θ ab? (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Ein Punktmassensystem

Zwei Punktmassen der Massen $m_1 = m_2 = m$ sind durch eine masselose Feder verbunden und gleiten reibungslos auf einem horizontalen Tisch. Die Feder hat die Federkonstante D und Gleichgewichtslänge l_0. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich eine der Punktmassen in Ruhe, während die andere sich in einer Entfernung von l mit einer Geschwindigkeit v_0 senkrecht zur Feder bewegt (Der Drehsinn sei wie in Abb. 1 gezeigt).

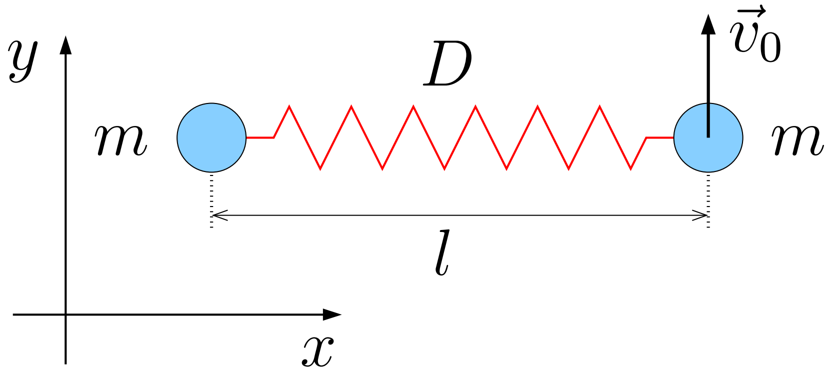


Abbildung 1: Sicht auf die Tischoberfläche von oben. Die Tischoberfläche ist durch das Koordinatensystem (x, y) dargestellt.

a) Verwenden Sie die kartesischen Koordinaten (R_x, R_y) des Schwerpunktes des Systems und die Polarkoordinaten (r, φ) des relativen Abstandes als verallgemeinerte Koordinaten, und geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an. (6 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten des Systems auf. *Resultat:* Die Lagrange-Gleichungen für den relativen Abstand $\vec{r} = (r, \varphi)$ sind

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + D\,(r - l_0) = 0\,,$$
$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0\,.$$

(6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass man die Lagrange-Gleichung für den relativen Abstand r mit Hilfe der anderen Lagrange-Gleichung zu einem eindimensionalen Problem für einen Massenpunkt der Masse $\mu = m/2$ reduzieren kann. Geben Sie das effektive Potential sowie die Lagrange-Funktion des eindimensionalen Problems an. (6 Punkte)

d) Betrachten Sie jetzt den Spezialfall $l_0 = 0$ und $lv_0 \neq 0$. Für welches Verhältnis zwischen v_0 und l werden sich die zwei Punktmassen auf einer Kreisbahn um den Schwerpunkt bewegen? Bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage für die effektive Punktmasse der Masse $m/2$. (7 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Kugelkondensator

Zwei konzentrische Metallkugelschalen mit den Radien R_1 und R_2 (mit $R_2 > R_1$) seien mit den Ladungen Q und $-Q$ aufgeladen. Das kugelsymmetrische elektrische Potential $\Phi(r)$ hat die Werte Φ_1 und Φ_2 auf den beiden Schalen, und es gelte $\Phi(\infty) = 0$. Das Potential ist bekanntlich stetig und genügt der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \,,$$

wobei ρ die Ladungsdichte ist.

a) Zeigen Sie, dass das Potential sowohl im Inneren ($r < R_1$) als auch im Außenbereich ($r > R_2$) konstant ist. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie das Potential $\Phi(r)$ zwischen den Kugelschalen. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie die Kapazität C des Kugelkondensators. (8 Punkte)

Aufgabe 2: Helmholtz-Spulen

Zur Erzeugung möglichst homogener Magnetfelder kann man eine spezielle Spulenanordnung verwenden. Diese können Sie für das hier zu lösende Problem als eine Anordnung aus zwei kreisförmigen Ringströmen gleicher Stärke I mit Radius R im Abstand $2d$ auffassen. Die Ringströme seien auf gleicher Achse (im Folgenden als z-Achse bezeichnet) parallel aufgestellt, d.h. sie liegen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, in den beiden Ebenen $z = -d$ und $z = d$.

a) Gehen Sie vom Biot-Savart'schen Gesetz für eine linienförmige Stromverteilung aus, d.h. von der Gleichung

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int d\vec{s} \times \frac{(\vec{x} - \vec{s})}{|\vec{x} - \vec{s}|^3} \,.$$

Zeigen Sie zunächst für eine Spule, dass die magnetische Flussdichte entlang der Symmetrieachse durch

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

gegeben ist, wenn der Ursprung des Koordinatensystems im Zentrum des Ringstroms liegt. Hierbei kennzeichnet $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Flussdichte des Gesamtsystems entlang der Symmetrieachse unter Verwendung des Superpositionsprinzips. (7 Punkte)

c) Formulieren Sie eine Bedingung an die erste und zweite Ableitung von $B(z)$, damit das Feld auf der Symmetrieachse in der Nähe des Ursprungs des Koordinatensystems möglichst homogen ist. Nutzen Sie diese Bedingung dann, um eine Relation zwischen R und d aufzustellen. (12 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Mischungsentropie

Gegeben sei ein Volumen V, welches durch eine verschiebbare Wand in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 unterteilt ist, $V = V_1 + V_2$. Im Teilvolumen V_1 befindet sich ein ideales Gas mit N_1 Teilchen einer ersten Sorte, und im Teilvolumen V_2 befindet sich ein ideales Gas mit N_2 Teilchen einer anderen Sorte. Die Entropie eines idealen Gases ist

$$S(N,T,V) = N\left(s_0 + c_V \ln T + k_B \ln \frac{V}{N}\right) .$$

Die Konstanten s_0 und c_V seien für beide Gase gleich. Die innere Energie eines idealen Gases ist

$$U = Nc_VT$$

mit der konstanten spezifischen Wärme c_V.
In den Teilaufgaben a–c sei die Temperatur im System konstant, $T = T_0$.

a) Geben Sie die Bedingung dafür an, dass die beiden Systeme im Gleichgewicht sind. Bestimmen Sie daraus die Volumina V_1 und V_2 bei gegebenen Teilchenzahlen N_1 bzw. N_2 im Gleichgewicht. (5 Punkte)

b) Geben Sie die Änderung ΔS der Entropie als Funktion von N, N_1 und N_2 für den Fall an, dass die Trennwand irreversibel entfernt wird. Nimmt die Entropie zu oder ab? (10 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Änderung ΔF der freien Energie. Welche Arbeit wird also bei der Durchmischung geleistet? Durch welche Anordnung semipermeabler Wände kann man diese Arbeit nutzen? (5 Punkte)

d) Was ändert sich qualitativ an den Ergebnissen der vorangegangenen Teilaufgaben (b) und (c), wenn man die Durchmischung reversibel statt isotherm durchführt? Welche Endtemperatur stellt sich ein? Nimmt die Temperatur zu oder ab? (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Oberflächenspannung**

Betrachtet sei eine Monolage aus N Molekülen an einer Luft-Wasser-Grenzfläche der Fläche A. Empirisch wurden für die Oberflächenspannung Σ der Grenzfläche die Eigenschaften

$$\kappa_T^{-1} = A\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial A}\right)_T = \frac{NAk_BT}{(A-Nb)^2} - \frac{2aN^2}{A^2}\,, \qquad \beta\Sigma = -\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial T}\right)_A = \frac{Nk_B}{A-Nb}$$

mit konstanten Parametern $a > 0$ und $b > 0$ bestimmt. Hierbei bezeichnet T die Temperatur, k_B die Boltzmann-Konstante, κ_T die isotherme Kompressibilität und β den Spannungskoeffizienten. Die Teilchenzahl N wird im Folgenden als fest betrachtet. Das Differential der freien Energie $F(T, A)$ lautet in diesem Fall

$$\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + \Sigma\,\mathrm{d}A\,.$$

a) Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung $\Sigma = \Sigma(T, A)$ unter der Bedingung, dass für reines Wasser ($A \to \infty$) die Oberflächenspannung konstant $\Sigma_0 > 0$ wird. Interpretieren Sie nun die Parameter a und b in Analogie zum van der Waals-Gas. (8 Punkte)

Ergebnis zum Weiterrechnen:

$$\Sigma(T, A) = \Sigma_0 - \frac{Nk_BT}{A-Nb} + \frac{aN^2}{A^2}\,.$$

b) Berechnen Sie die Entropie $S(T, A)$ und die Wärmekapazität $C_A(T, A) = T(\partial S/\partial T)_A$ der Grenzfläche unter der Annahme, dass $C_A(T, A)$ für reines Wasser temperaturunabhängig wird. Drücken Sie Ihr Ergebnis für die Entropie durch einen Referenzpunkt (T_0, A_0) aus. (10 Punkte)

c) Bestimmen Sie für dieses System die Zustandsgleichung $A = A(T)$ für adiabatische Expansion. (7 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Spin-Präzession im Magnetfeld

Betrachten Sie die Präzession des Spins eines Elektrons (mit Ladung $-e$ und Masse m) in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$. Der zugehörige Hamilton-Operator lautet

$$H = \frac{e}{m}\,\vec{S}\cdot\vec{B}\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ der Spinoperator ist; die Matrixelemente der einzelnen Komponenten von $\vec{\sigma}$ werden im Folgenden durch Pauli-Matrizen (s.u.) dargestellt, also in der Basis der zwei-komponentigen Eigenvektoren von σ_z.

a) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-\mathrm{i}Ht/\hbar)$ der Schrödinger-Gleichung durch

$$U(t) = \cos\frac{\omega t}{2} - \mathrm{i}\sigma_z \sin\frac{\omega t}{2} \tag{2}$$

gegeben ist, wobei $\omega = \frac{eB}{m}$ die Zyklotronfrequenz ist.
(*Hinweis:* Reihenentwicklung!) (6 Punkte)

b) Gegeben sei der (Spinor-)Zustandsvektor $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$ zur Zeit $t = 0$. Zeigen Sie, dass der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t durch

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+\exp(-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t)\\ \alpha_-\exp(+\mathrm{i}\frac{\omega}{2}t)\end{pmatrix} \tag{3}$$

gegeben ist. Für welche Werte von ωt gilt $|\psi(t)\rangle = \pm|\psi(0)\rangle$? (5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ zur Zeit t bei der Messung von S_x den Wert $\hbar/2$ zu erhalten, wenn der Spinzustand zur Zeit $t = 0$ als Eigenzustand von S_y mit Eigenwert $\hbar/2$ präpariert war.
(*Resultat:* $P(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \sin(\omega t)\right]$) (7 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Spinoperators, $\vec{S}(t) = U^\dagger\vec{S}U$, durch

$$\vec{S}(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_x\\ S_y\\ S_z\end{pmatrix}. \tag{4}$$

gegeben ist, wobei S_i mit $i \in \{x, y, z\}$ die Spinkomponenten zur Zeit $t = 0$ sind. Interpretieren Sie damit das unter Teilaufgabe c) erhaltene Resultat. (7 Punkte)

Nützliche Formeln:
Die Pauli-Matrizen lauten: $\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.
Es gilt $\sigma_i^2 = 1$ für $i \in \{x, y, z\}$, sowie $\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z$ und zyklische Permutationen von $\{x, y, z\}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Zweidimensionaler, isotroper harmonischer Oszillator**

Der Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) \tag{1}$$

des zweidimensionalen, isotropen harmonischen Oszillators kann auf die Form

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right) \tag{2}$$

gebracht werden. Dabei sind die Auf- und Absteigeoperatoren $a_i^\dagger$ bzw. a_i durch

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q_i + \mathrm{i}\frac{p_i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) \tag{3}$$

definiert und erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[a_i, a_j] = 0, \qquad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}\ . \tag{4}$$

Der Grundzustandsvektor $|0\rangle$ mit Energie $\hbar\omega$ ist gekennzeichnet durch die Bedingungen

$$a_1|0\rangle = 0, \qquad a_2|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|0\rangle = 1\ . \tag{5}$$

a) Drücken Sie den Drehimpulsoperator $L_3 = q_1p_2 - q_2p_1$ durch die Operatoren $a_i^\dagger$ und a_i aus. Zeigen Sie in dieser Darstellung, dass L_3 mit H vertauscht. (8 Punkte)

b) Betrachten Sie die Zustandsvektoren $a_1^\dagger|0\rangle$ und $a_2^\dagger|0\rangle$. Zeigen Sie, dass diese beiden Vektoren normierte, entartete Eigenvektoren von H sind, und geben Sie den Eigenwert von H an. Diagonalisieren Sie L_3 im zweidimensionalen Entartungsraum. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von L_3. (9 Punkte)

c) Suchen Sie weitere Erhaltungsgrößen vom Typ $a_i^\dagger a_j$, a_ia_j, $a_i^\dagger a_j^\dagger$, die also bilinear in den Auf- und Absteigeoperatoren sind. Konstruieren Sie hieraus durch Linearkombinationen hermitesche Operatoren, die mit H vertauschen, sich aber nicht durch H und L_3 ausdrücken lassen. Geben Sie auch deren zweidimensionale Matrixdarstellung in der Basis von Teilaufgabe b an. Kann mehr als eine Erhaltungsgröße simultan mit H diagonalisiert werden? (8 Punkte)