Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Newton'sche Kosmologie

Die von Hubble zuerst beobachtete Expansion des Universums wird empirisch durch das Gesetz $\vec{v}_i(t) = H(t)\,\vec{x}_i(t)$ beschrieben. Dabei sind $\vec{x}_i(t)$ und $\vec{v}_i(t)$ der Ort bzw. die Geschwindigkeit einer Galaxie i in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum unserer eigenen Galaxie.

a) Zeigen Sie, dass das Hubble'sche Gesetz exakt dieselbe Form auch für einen Beobachter in einer beliebigen Galaxie j annimmt, die von uns den Abstand $\vec{x}_j$ besitzt. (Die Erde, bzw. unsere Milchstrasse, hat also keinen privilegierten Platz im Universum!) (4 Punkte)

b) Betrachten Sie das Universum als ein homogenes Gas mit einer Massendichte $\rho(t)$. Leiten Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für den Radiusvektor $\vec{x}(t)$ einer Galaxie mit Masse m unter der Annahme ab, dass sich die Galaxie wie eine Punktmasse in dem von der homogenen Massendichte $\rho(t)$ erzeugten Kraftfeld bewegt.

Ergebnis: $\ddot{\vec{x}}(t) = -\dfrac{4\pi}{3} G\rho(t)\,\vec{x}(t)$ (5 Punkte)

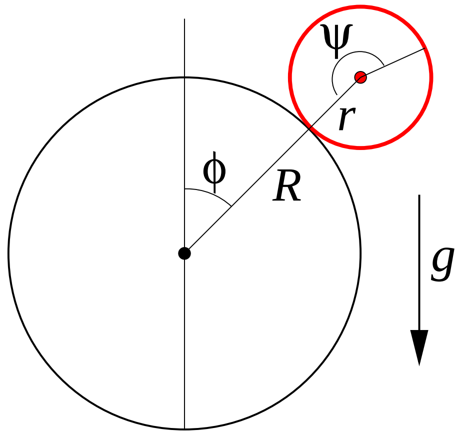
c) Transformieren Sie die Gleichung für $\vec{x}(t)$ mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = R(t)\,\vec{x}_0$ in eine Differentialgleichung für $R(t)$, und bestimmen Sie den Zusammenhang des Expansionsparameters $R(t)$ mit der Hubble-Konstanten $H(t)$ zur Zeit t. (6 Punkte)

d) Eliminieren Sie die Dichte $\rho(t)$ aus der Gleichung für $R(t)$ unter Verwendung der Massenerhaltung $\rho(t)\,R^3(t) = \text{const.}$, und leiten Sie damit eine Differentialgleichung erster Ordnung für $R(t)$ ab (*Hinweis:* Energiesatz). Bestimmen Sie damit $R(t)$ explizit für den Fall, dass die Expansionsgeschwindigkeit für große $R(t)$ verschwindet, $\dot{R} \to 0$ für $R(t) \to \infty$. (10 Punkte)

Hinweis: Es ist günstig, die Konstante $Q = \dfrac{8\pi}{3}\rho(t_0)\,R^3(t_0)$ einzuführen.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Rolle auf einer Rolle



Gegeben sei eine feststehende Rolle vom Radius R mit horizontaler Achse. Eine zweite Rolle habe den Radius r, die Masse m (mit homogener Massenverteilung) und die Achse parallel zur ersten Rollenachse.
Unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes rolle die zweite Rolle auf der ersten ab ohne zu gleiten. Die Position und Rotation der zweiten Rolle werde durch die Winkel ϕ bzw. ψ beschrieben wie nebenstehend skizziert. Für $\phi = 0$ gelte auch $\psi = 0$.

a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment $\Theta = \gamma m r^2$ der kleinen Rolle bezüglich ihrer Achse, bestimmen Sie also γ. In den Teilaufgaben 2 bis 5 soll allerdings mit γ anstelle des numerischen Wertes gerechnet werden. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Zusammenhang der beiden Winkel ϕ und ψ. (2 Punkte)

c) Geben Sie kinetische und potentielle Energie sowie die Lagrange-Funktion als Funktion von ϕ und $\dot{\phi}$ an; normieren Sie dabei die potentielle Energie so, dass sie für $\phi = 0$ verschwindet. (5 Punkte)

d) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine ϕ. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege die zweite Rolle oben auf der ersten, $\phi = 0$, und habe eine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \omega$. (5 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass die Bedingung für das Abheben der kleinen Rolle von der großen durch

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{R+r} \cos \phi \tag{1}$$

(nicht-kleine ϕ) gegeben ist. (4 Punkte)

f) Warum gilt der Erhaltungssatz der Energie? Verwenden Sie diesen im Grenzfall verschwindender Anfangsgeschwindigkeit ($\omega \to 0$) zusammen mit Gleichung (1), um den Winkel ϕ_0, bei welchem die kleine Rolle von der großen abhebt, allein aus der Masse m und den Radien R und r zu bestimmen. Welcher Winkel ϕ_0 (in Grad) ergibt sich für den Fall $r = R$? (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Geladener Ring und Kreisstrom

Für quasistatische Probleme lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,.$$

Für das über $\vec{E} = -\mathrm{grad}\Phi$ definierte elektrische Potential Φ ergibt sich daraus die Integraldarstellung

$$\Phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3r\,' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass unter Verwendung der Coulomb-Eichung ($\mathrm{div}\vec{A} = 0$) das durch $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ definierte Vektorpotential $\vec{A}$ über die Beziehung

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

mit der Stromdichte $\vec{j}$ zusammenhängt. (4 Punkte)

Im Folgenden sollen eine kreisförmige Ladungsverteilung mit Gesamtladung Q und ein Kreisstrom I auf einem um den Ursprung in der (x, y)-Ebene liegenden Kreis mit Radius a betrachtet werden.

b) Zeigen Sie durch Berechnung von $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ und geeignete Entwicklung, dass für $r \gg a$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r\,'\right)$$

gilt. $\vec{r}\,'$ liege dabei auf dem gerade definierten Kreis, und $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_r\,'$ sind die radialen Basisvektoren in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an den Orten $\vec{r}$ bzw. $\vec{r}\,'$. Zeigen Sie ferner, dass $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r\,' = \sin(\theta)\cos(\phi - \phi')$ gilt. (10 Punkte)

c) Bestimmen Sie nun für die oben definierte kreisförmige Ladungsverteilung und den Kreisstrom das elektrische Potential bzw. das Vektorpotential in führender nicht verschwindender Ordnung in a/r. Drücken Sie das Ergebnis für das Vektorpotential auch mit Hilfe des magnetischen Moments $\vec{m}$ des Kreisstroms aus. (11 Punkte)

Hinweis: Für einen linienförmigen Strom I entlang des Weges $\mathcal{C}$ ergibt sich das Vektorpotential zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\,' \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Magnetostatik des Supraleiters

Der Zusammenhang zwischen der *induzierten* Stromdichte $\vec{j}_{\text{ind}}(\vec{r})$ und dem magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r})$ im Supraleiter wird durch die Materialgleichung von London

$$\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}_{\text{ind}}(\vec{r}) = -\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}(\vec{r}) \,, \quad \lambda = \text{const.} > 0 \tag{1}$$

beschrieben, die zusätzlich zu den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}_{\text{ind}} \right) \tag{3}$$

gilt.

Gegeben sei eine in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnte supraleitende Platte im Bereich $|z| \leq d$. Außerhalb der Platte liege ein statisches, homogenes, magnetisches Induktionsfeld

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_x \quad \text{im Bereich } |z| > d$$

in x-Richtung an; innerhalb der Platte genüge das Induktionsfeld der London-Gleichung (1). Es gebe keine externe Stromdichte, $\vec{j}_{\text{ext}} = 0$.

a) Leiten Sie für den stationären Zustand eine Differentialgleichung für das Induktionsfeld $\vec{B}$ im supraleitenden Gebiet $|z| \leq d$ her, geben Sie die Randbedingung an, und berechnen Sie $\vec{B}$ im ganzen Raum.

   Hinweis: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$.

   Zur Kontrolle: Das Ergebnis ist $\vec{B} = B_0 \frac{\cosh(z/\lambda)}{\cosh(d/\lambda)} \vec{e}_x$ im Bereich $|z| \leq d$.

   (14 Punkte)

b) Berechnen Sie die induzierte Stromdichte $\vec{j}_{\text{ind}}$ innerhalb der Platte. (6 Punkte)

c) Skizzieren Sie $|\vec{B}|$ und $|\vec{j}_{\text{ind}}|$ als Funktion von z.
   Deuten Sie die Konstante λ anschaulich.
   Welcher qualitative Unterschied würde sich für einen Normalleiter mit der relativen Permeabilität $\mu_m = 1$ ergeben? (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Magnetisches Material

Betrachten Sie ein magnetisches Material, dessen Wärmekapazität $C_B(T, B)$ bei konstantem Magnetfeld und dessen Magnetisierung $M(T, B)$ als Funktion der Temperatur T und des Magnetfeldes B bekannt seien. Das Differential seiner Energie $U(S, M)$ hängt bekanntlich von der Magnetisierung M und der Entropie S folgendermaßen ab,

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + B\,\mathrm{d}M\ .$$

a) Leiten Sie aus der obigen Beziehung das Differential der Freien Enthalpie $G(T, B)$ her. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Entropie bei konstanter Temperatur gleich der Änderung der Magnetisierung bei konstantem Feld ist,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B\ .$$

(5 Punkte)

c) Drücken Sie die Änderung der Temperatur bei adiabatischer Änderung des Magnetfeldes durch die beiden Funktionen $C_B(T, B)$ und $M(T, B)$ aus. (15 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Physikalische Eigenschaften von realen Gasen

Ausgangspunkt ist die Zustandsgleichung für ein van-der-Waals-Gas (Molvolumen v),

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}. \tag{1}$$

a) Die isotherme Kompressibilität ist definiert als

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T. \tag{2}$$

Bestimmen Sie $\kappa_T(T, v)$ für das van-der-Waals-Gas. (9 Punkte)

b) Berechnen Sie nun $\kappa_T(P, v)$. Nehmen Sie an, dass die Korrekturen zum idealen Gas klein sind, und linearisieren Sie $\kappa_T(P, v)$ in den Parametern a und b. Wie kann man das Ergebnis qualitativ verstehen? (8 Punkte)

c) Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P. \tag{3}$$

Zeigen Sie zunächst, dass für das Verhältnis α/κ_T allgemein gilt

$$\frac{\alpha}{\kappa_T} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v. \tag{4}$$

Berechnen Sie hieraus $\alpha(T, v)$ für das van-der-Waals-Gas. Was erhält man im Grenzfall des idealen Gases? (8 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Zustandsreduktion durch Messung

Ein Wasserstoff-Atom befinde sich in einem Zustand, der durch den Ket

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2|\psi_{100}\rangle - |\psi_{210}\rangle + |\psi_{211}\rangle\right)$$

dargestellt wird. Hierbei charakterisiert $|\psi_{n\ell m}\rangle$ einen gemeinsamen normierten Eigenzustand der Operatoren $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ ($\hat{H}$ = Hamilton-Operator, $\hat{L}$ = Drehimpulsoperator) mit n = Hauptquantenzahl, ℓ = Drehimpulsquantenzahl und m = Quantenzahl für die z-Komponente des Drehimpulses.

a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ normiert ist. Welche Messwerte können bei einer Energiemessung am System mit dem Ket $|\psi\rangle$ erhalten werden? Welche Werte können als Ausgang einer Messung von $\hat{L}^2$ bzw. der z-Komponente des Drehimpulses auftreten? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden die möglichen Messwerte von $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ gemessen?
Hinweis: $E_{nlm} = -Ry/n^2$ mit Ry = Rydberg-Konstante. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Schwankungen der Operatoren $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ in dem durch $|\psi\rangle$ charakterisierten Zustand. (10 Punkte)

c) Eine Energiemessung in dem durch $|\psi\rangle$ charakterisierten Zustand habe als Ergebnis den Wert $E = -Ry$ geliefert. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung? Welche Messwerte für $\hat{L}_z$ sind nach dieser Energiemessung möglich, und mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese gefunden? (3 Punkte)

d) Eine $\hat{L}_z$-Messung in dem durch $|\psi\rangle$ charakterisierten Zustand habe als Ergebnis den Wert Null geliefert. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung? Welche Konsequenzen hat dieser Ausgang der $\hat{L}_z$-Messung auf eine nachfolgende Messung der Energie? Geben Sie die jetzt möglichen Messwerte der Energie und deren Wahrscheinlichkeiten an, und bestimmen Sie den zugehörigen Erwartungswert und die Schwankung. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Teilchen auf Kreisring**

Gegeben sei ein Quantensystem mit einem Teilchen der Masse m, das sich auf einem Kreisring der Länge L bewegt. Die Wellenfunktion ist also eine Funktion ψ auf dem Intervall $[0, L]$, wobei die Punkte $x = 0$ und $x = L$ miteinander identifiziert werden. Auf Normierungsfaktoren der Wellenfunktion und der Eigenfunktionen dürfen Sie in dieser Aufgabe überall verzichten.

a) Betrachten Sie zunächst den Fall, in welchem der Hamilton-Operator nur aus dem kinetischen Term besteht,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \, .$$

Zeigen Sie, dass die Energieeigenzustände des Hamilton-Operators durch

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{L}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, , \quad k = \frac{2\pi}{L}\, n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

gegeben sind. Was sind die dazugehörigen Eigenenergien? (4 Punkte)

b) Der Hamilton-Operator enthält nun zusätzlich ein repulsives δ-Potential am Ort $x = 0$,

$$V(x) = g\,\delta(x) \quad \text{mit} \quad g > 0 \, . \tag{1}$$

Die Wellenfunktion ist nach wie vor stetig bei $x = 0$, aber die Ableitung macht einen Sprung,

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\epsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L-\epsilon}\right) = \frac{2mg}{\hbar^2}\,\psi(0) \, . \tag{2}$$

Leiten Sie die Sprungbedingung (2) aus der Schrödinger-Gleichung her. (4 Punkte)

c) Geeignete Linearkombinationen der Eigenlösungen von Teilaufgabe (a) sind Eigenfunktionen des Problems mit δ-Potential. Geben Sie diese Linearkombinationen und Eigenenergien explizit an. Beachten Sie, dass (bis auf eine Ausnahme) alle Eigenenergien in Teilaufgabe (a) zweifach entartet sind.
Hinweis: Welche Bedingung an die Wellenfunktion muss nach Teilaufgabe (b) gelten, damit sie und ihre Ableitung stetig sind? (4 Punkte)

d) Es gibt eine zweite Klasse von Eigenzuständen mit positiver Energie für das Problem mit δ-Potential, deren Eigenfunktionen sich ebenfalls als eine Linearkombination der unter Teilaufgabe (a) gefundenen Wellenfunktionen darstellen lassen. Konstruieren Sie diese, indem Sie die Stetigkeits- und Sprungbedingung der Wellenfunktion verwenden. Zeigen Sie, dass dies auf die Gleichung

$$k = \frac{mg}{\hbar^2}\cot\frac{kL}{2} \tag{3}$$

führt, wobei k die Wellenzahl ist. (7 Punkte)

e) Zeigen Sie in einem Bild, wie sich Gleichung (3) graphisch lösen lässt. Welche Eigenenergien und Eigenfunktionen ergeben sich in den Grenzfällen $g \to 0$ und $g \to \infty$? Zeigen Sie, dass Sie für $g \to 0$ das Spektrum von Teilaufgabe (a) reproduzieren und für $g \to \infty$ das Spektrum eines unendlich hohen Potentialkastens der Breite L finden. (6 Punkte)