Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt VII

Besprechung in den Übungen am 4. und 6. Dezember 2017

I. **Steinerscher Satz**

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl des Ursprungspunkts P ab. Sei P der Schwerpunkt und P' ein anderer körperfester Punkt eines starren Körpers, der aus N starr miteinander verbundenen Massenpunkten m_i besteht. Es gilt $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{a}$ für jeden Massenpunkt (siehe Abb. 1).

a) Nennen Sie die Definition des Trägheitstensors I_{lm} für diesen starren Körper.

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor I'_{lm} im gestrichenen Koordinatensystem mit Ursprung P'. Vereinfachungen ergeben sich dadurch, dass P der Schwerpunkt ist. Die Gesamtmasse des starren Körpers sei M.

c) Betrachten Sie die Drehachse, die durch den Einheitsvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ gegeben ist. Diese Drehachse wird senkrecht zum Vektor $\vec{a}$ gewählt. Leiten Sie aus dem Ergebnis von Aufgabenteil b) den *Steinerschen Satz* her:

$$I' = I + Ma^2 \,. \tag{1}$$

Hierbei sind I', I die Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse $\vec{n}$ im jeweiligen Koordinatensystem.

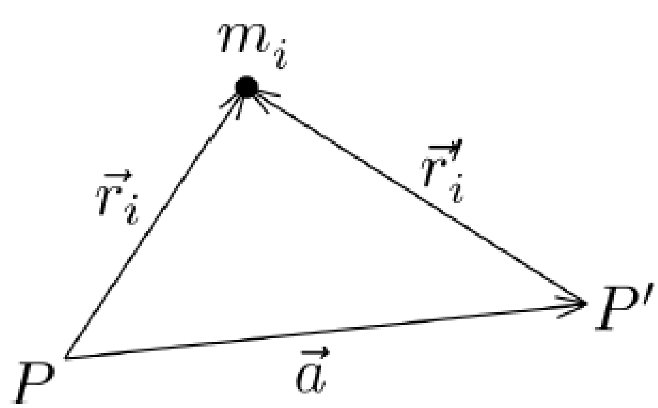

Abbildung 1. Ortsvektor in zwei unterschiedlichen körperfesten Systemen.

II. **Kreisel**

Betrachten Sie einen kräftefreien zylindersymmetrischen Kreisel, d.h. die Trägheitsmomente sind I_3 und $I_1 = I_2$ und der Einfluss der Schwerkraft wird vernachlässigt.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion 2. Art auf. Die generalisierten Koordinaten sind die drei Eulerschen Winkel.

b) Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen verallgemeinerten Impulse.

c) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen auf.

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} = \text{ const.}\,, \tag{2}$$

d.h. die Winkelgeschwindigkeit um die körperfeste Symmetrieachse des Kreisels ist konstant.

e) Wählen Sie die raumfeste z-Achse parallel zum Drehimpuls. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen der Symmetrieachse des Kreisels und dem Drehimpuls konstant bleibt.

f) Zeigen Sie weiterhin, dass in diesem Fall

$$\dot{\phi} = \frac{|\vec{L}|}{I_1}\,, \qquad \dot{\psi} = -\frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\,, \qquad \dot{\theta} = 0. \tag{3}$$

g) Leiten Sie aus Ihren Ergebnissen folgende Aussagen her:

- Der Kreisel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um seine Symmetrieachse.
- Zusätzlich läuft der Vektor $\vec{\omega}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ auf einem Kegelmantel um die z-Achse.