Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt V

Besprechung in den Übungen am 20. und 22. November 2017

I. **Lagrangegleichungen 1. Art**

Ein Massenpunkt bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Oberfläche eines Paraboloiden, der durch $z = kr^2$ gegeben ist (siehe Abbildung 1).

a) Wie lautet die Zwangsbedingung ?

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangegleichungen 1. Art auf.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die r- und ϕ-Koordinaten auf, indem Sie den Lagrange-Multiplikator mit Hilfe der Zwangsbedingungen eliminieren. (Die Lösung der Bewegungsgleichungen ist nicht erforderlich.)

d) Berechnen Sie die z-, $r-$ und ϕ-Komponenten der Zwangskraft als Funktion der unabhängigen Koordinaten und Geschwindigkeiten (Eine Kraft darf nicht explizit von Beschleunigungen abhängen.)

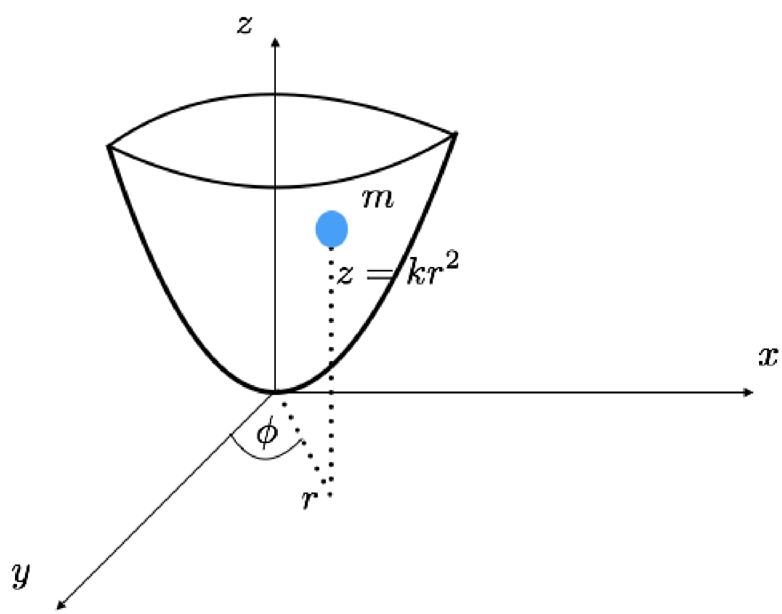

Abbildung 1. Massenpunkt auf einem Paraboloiden.

(bitte wenden)

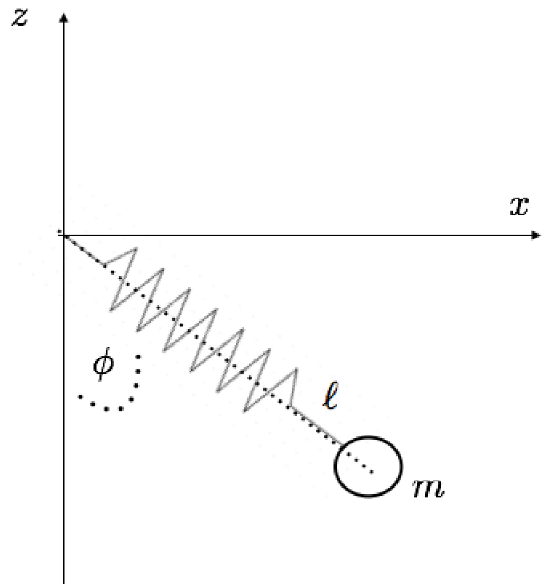

Abbildung 2: Federpendel.

II. **Lagrange-Gleichung 2. Art**

Das Federpendel in Abbildung 2 besteht aus einem Massenpunkt der Masse m und einer Feder mit Federkonstante c. Es wirken die Schwerkraft und die Federkraft entlang der Feder. Die momentane Länge der Feder wird mit ℓ, die Ruhelage der Feder wird mit ℓ_0 bezeichnet, so dass die Federkraft $\vec{F} = -c(\ell - \ell_0)\vec{e}_r$ wirkt. Wir nehmen an, dass sich das Federpendel nur in der (x, z)-Ebene bewegt.

a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Lagrange-Gleichungen.

c) Lösen Sie die Lagrange-Gleichungen für den Spezialfall $\phi(t = 0) = \dot{\phi}(t = 0) = 0$ und beschreiben Sie die zugehörige Bewegung.

(bitte wenden)

III. **Energieerhaltungssatz**

Betrachten Sie eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$, die unter der Zeitverschiebung $t \to t' + a$ mit konstantem a invariant ist.

a) Zeigen Sie, dass L nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,.$$

b) Berechnen Sie die totale Zeitableitung $\frac{dL}{dt}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H \equiv \sum_{i=1}^{3N-p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \; - \; L$$

zeitunabhängig ist, $dH/dt = 0$. H wird *Hamiltonfunktion* genannt.

IV. **Noether-Theorem**

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse m, der sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(r, \phi, z)$ auf der Oberfläche eines in z-Richtung unendlich ausgedehnten Kreiszylinders mit Radius R um die Symmetrieachse gegeben durch $\vec{e}_z$ bewegt. (r, ϕ, z) sind Zylinderkoordinaten. Das Potential besitzt die Symmetrie einer Schraubenlinie mit Ganghöhe c,

$$V(r, \phi, z) = V(r, \phi + \alpha, z + \frac{c}{2\pi}\alpha)\,,$$

für alle reellen Transformationsparameter α.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die Erhaltungsgröße, die sich aus der Symmetrie des Potentials ergibt.