Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt IV

Besprechung in den Übungen am 13. und 15. November 2017

I. **Zwei Massen auf einem Keil**

Betrachten Sie die in Abbildung 1 dargestellte Massenkonfiguration. Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich unter Einfluss der Schwerkraft reibungslos auf einem Keil. Sie sind durch ein masseloses Seil der Länge $\ell = \ell_1 + \ell_2$ miteinander verbunden, das über eine masselose Rolle läuft.

a) Geben Sie die Zwangsbedingungen an. Von welchem Typ sind sie? Wieviele Freiheitsgrade besitzt das System?

b) Geben Sie die Transformationsformeln von den kartesischen auf die generalisierten Koordinaten an.

c) Wie lautet die Lagrange-Funktion für dieses Problem?

d) Bestimmen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 2. Art. Formulieren Sie geeignete Anfangsbedingungen und lösen sie die Bewegungsgleichungen für diese. Beschreiben Sie die physikalischen Eigenschaften der erhaltenen Bewegung.

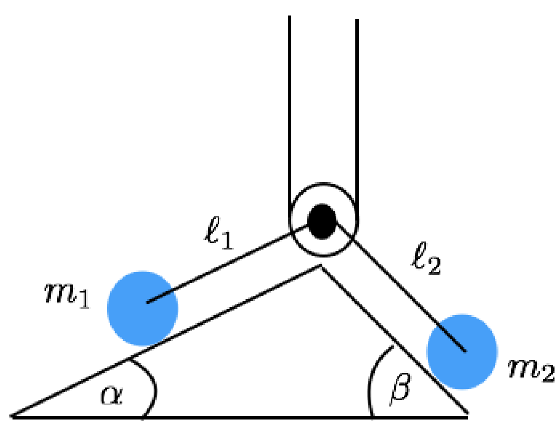

Abbildung 1. Zwei Massen auf einem Keil.

(bitte wenden)

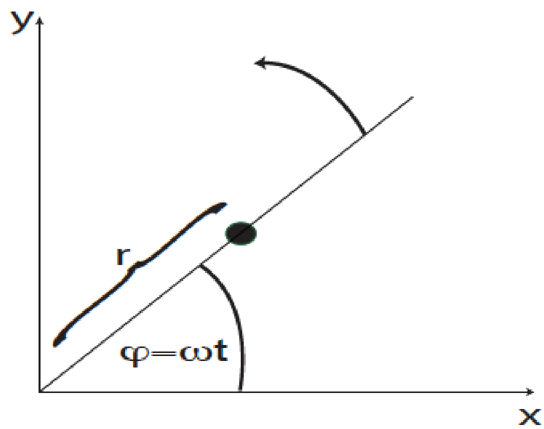

Abbildung 2: Perle auf rotierendem Draht.

II. **Perle auf rotierendem Draht**

Eine Perle gleitet auf einem Draht, der in der x-y-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert (siehe Abbildung 2).

a) Geben Sie die Zwangsbedingungen an. Von welchem Typ sind sie? Wieviele Freiheitsgrade besitzt das System?

b) Geben Sie die Transformationsformeln von den kartesischen auf die generalisierten Koordinaten an.

c) Wie lautet die Lagrange-Funktion für dieses Problem?

d) Bestimmen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 2. Art. Formulieren Sie geeignete Anfangsbedingungen und lösen sie die Bewegungsgleichungen für diese. Beschreiben Sie die physikalischen Eigenschaften der erhaltenen Bewegung.

III. **Zykloide**

Ein Massenpunkt befindet sich auf einem Kreis mit Radius R, der auf einer waagerechten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit abrollt, ohne zu gleiten. Dies ist ein idealisiertes Bild für das Ventil an einem Fahrradreifen. Das Fahrrad fahre mit konstanter Geschwindigkeit auf einer ebenen Straße.

Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wieviele generalisierte Koordinaten gibt es? Bestimmen Sie die Bahnkurve des Massenpunkts. Berechnen Sie die Bahnlänge nach einer vollen Umdrehung des Kreises.

(bitte wenden)

IV. **Variationsrechnung: Brachistochronenproblem**

Wir betrachten einen Massepunkt der Masse m, der anfänglich am Ort (x_0, y_0) ruht. Entlang welcher Kurve gleitet dieser Massepunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft innerhalb der kürzesten Zeit zum tiefer gelegenen Punkt (x_1, y_1)?

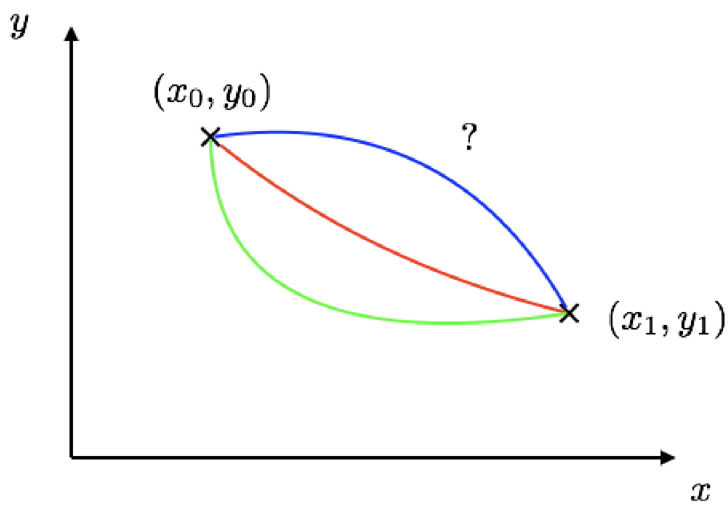

Abbildung 3. Brachistochronenproblem.

(Dieses Problem wurde zuerst 1696 von Johann Bernoulli gelöst.)