Prof. Dr. Johanna Erdmenger Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Übungen zur theoretischen Mechanik

Übungsblatt XIV - Probeklausur

Besprechung in den Übungen am 5. und 7. Februar 2018

Es gibt 4 Aufgaben à 25 Punkten. Die erste Aufgabe enthält eine Liste von Verständnisfragen. Die weiteren 3 Aufgaben sind Textaufgaben.

In der Klausur muss jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer gekennzeichnet werden. Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen.

I. **Verständnisfragen**

Beantworten Sie kurz (2-3 Sätze oder Gleichungen) die folgenden Fragen:

a) Nennen Sie die Newtonschen Axiome. (3 Punkte)

b) Was sind holonome Zwangsbedingungen und worin liegt ihre Bedeutung? (2 Punkte)

c) Was ist ein konservatives Kraftfeld? (2 Punkte)

d) Was besagt das Prinzip der stationären Wirkung? (3 Punkte)

e) Wie lauten die Lagrangegleichungen 2. Art? (2 Punkte)

f) Was ist der Unterschied zwischen den Lagrangeformalismen 1. und 2. Art? (3 Punkte)

g) Wie erhält man die Hamiltonfunktion aus der Lagrangefunktion? (3 Punkte)

h) Welche der folgenden Transformationen sind kanonisch? (a und b sind Konstanten.) (3 Punkte)

1. $(q, p) \to (Q, P) = (a - p, b + q) \quad ,$
2. $(q, p) \to (Q, P) = (ap, q/a) \quad ,$
3. $(q, p) \to (Q, P) = (p + q, p - q) \ .$

i) Wie lauten die beiden Additionsregeln für relativistische Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \leq c$? (2 Punkte)

$$v \oplus c =? \,, \qquad v_1 \oplus v_2 =? \tag{1}$$

j) Wie ist der Phasenraum definiert und welche Bedeutung hat er? (2 Punkte)

II. Mit Feder gekoppelte Massen im freien Fall

Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich entlang der $z-$Achse (eindimensionales System). Sie sind durch eine Feder der Federstärke k und Ruhelänge $l = 0$ miteinander verbunden. Weiterhin wirkt auf beide die Schwerkraft.

1. Geben sie die Lagrangefunktion für dieses System in Abhängigkeit der Positionen z_1 und z_2 der beiden Massen an.
2. Führen Sie eine geschickte Transformation in neue Koordinaten q_1, q_2 durch, so dass die Lagrangefunktion entkoppelt; d. h. die Lagrangefunktion soll von der Form
$$L = L_1(q_1) + L_2(q_2) \tag{2}$$
sein.
3. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für diese neuen Koordinaten auf und lösen Sie sie.

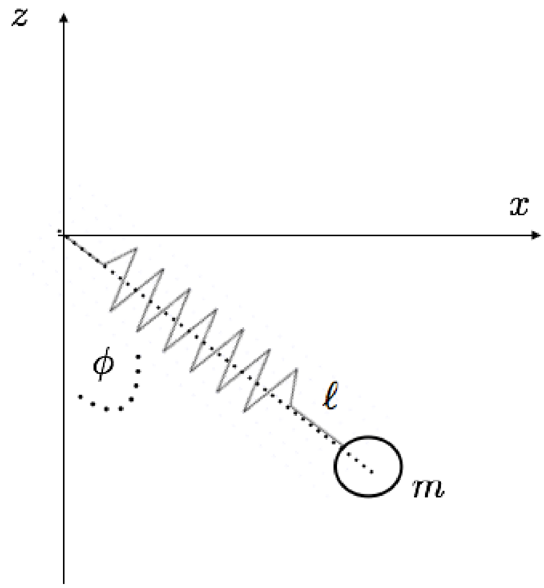

Abbildung 1: Federpendel.

III. **Federpendel**

Das Federpendel in Abbildung 1 besteht aus einem Massenpunkt der Masse m und einer Feder mit Federkonstante c. Es wirken die Schwerkraft und die Federkraft entlang der Feder. Die momentane Länge der Feder wird mit ℓ, die Ruhelage der Feder wird mit ℓ_0 bezeichnet, so dass die Federkraft $\vec{F} = -c(\ell - \ell_0)\vec{e}_r$ wirkt. Wir nehmen an, dass sich das Federpendel nur in der (x, z)-Ebene bewegt.

a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

c) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Spezialfall $\phi(t = 0) = \dot{\phi}(t = 0) = 0$ und beschreiben Sie die zugehörige Bewegung.

IV. Kreisel im Hamilton-Formalismus

Betrachten Sie einen symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = 0$ mit Gesamtmasse M.

a) Skizzieren Sie die Geometrie dieses Körpers. Welche Folgen hat insbesondere $I_3 = 0$?

Der Körper sei im Abstand ℓ vom Schwerpunkt im Schwerefeld aufgehängt. Eine geeignete Lagrangefunktion als Funktion der Euler-Winkel (ϕ, θ) ist dann

$$L = \frac{I}{2}\left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - Mg\ell\cos\theta\,.$$

b) Begründen Sie (in Worten), warum L nicht vom dritten Eulerwinkel ψ und der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ (Drehung um die Figurenachse) abhängt.

c) Bestimmen Sie die konjugierten Impulse.

d) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion aus einer Legendre-Transformation.

e) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

f) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage, gegeben durch $(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) = \text{const.}$.

g) Bestimmen Sie die zwei Erhaltungsgrößen des Systems und interpretieren Sie sie physikalisch.