

Übungen zur theoretischen Mechanik**Übungsblatt XI****Besprechung in den Übungen am 15. und 17. Januar 2018****I. Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens**

Betrachten Sie eine kanonische Transformation $q_i \rightarrow Q_i(q_j, p_j, t)$, $p_i \rightarrow P_i(q_j, p_j, t)$, die durch eine Funktion $F_1(q_i, Q_i, t)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass das endliche Phasenraumvolumen

$$V = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

invariant unter der kanonischen Transformation ist. (Es werden geeignete Integrationsgrenzen angenommen.)

Hinweis: Zeigen Sie hierfür, dass die Funktionaldeterminante (d.h. die Jacobi-Determinante) für die Transformation des Integrals auf die neuen Koordinaten gleich eins ist. Benutzen Sie hierfür

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}.$$

Die gezeigte Invarianz des Phasenraumvolumens ist wichtig für den Beweis des Satzes von Liouville.

II. Konstruktion von Erzeugenden kanonischer Transformationen

Ein Teilchen der Masse $m = 1/2$ bewegt sich auf der x -Achse im Potential $V(x) = \exp(x)$.

Berechnen Sie die nicht explizit zeitabhängige Erzeugende $F_2(x, P)$, die die Hamiltonfunktion

$$H = p^2 + e^x \quad \text{auf} \quad K = \frac{P^2}{4}$$

transformiert. Bestimmen Sie die Transformationsgleichungen und geben Sie $x(t)$ und $p(t)$ an.