Forschungsgebiet von Prof. Dr. Erdmenger

Wiederholung

$$L(q_i \dot{q}_i, t); \;\; H(q_i, p_i, t)$$

Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

Quantenmechanik ($\leftarrow H$)

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} = q_i p_i - p_j q_i$$

→ Schrödinger-Gleichung

$$H\psi = E\psi$$

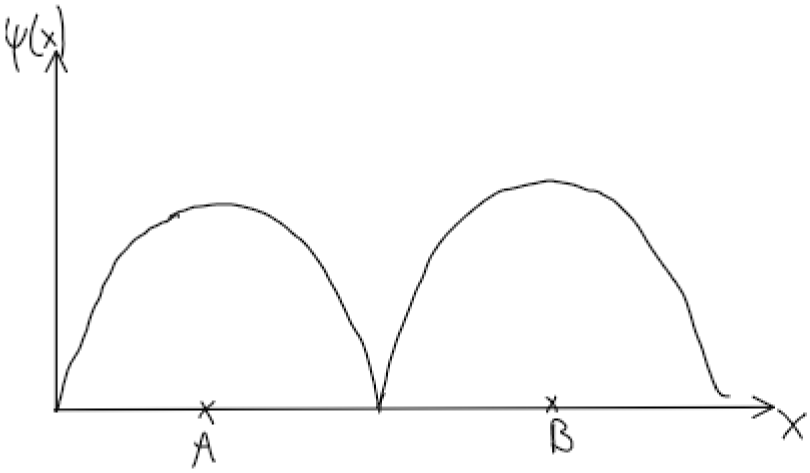
Eigenwerten von H sind quantisiert

$|\psi|^2 = \psi^*\psi$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Freies Teilchen

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Bsp.:



Ein Teilchen kann sich von A nach B bewegen, trotzdass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen den Beiden Punkten gleich null ist. Dieses Phänomen kann die Quantenmechanik nicht beantworten → Quantenfeldtheorie.

→ klassische und Quantenstatistik 10^{23} Teilchen

(Phasenraum, Satz von Liouville)

Keine Betrachtung von Koordinaten, sondern Betrachtung von Feldern ⇒ Feldtheorie (z. B. Elektrodynamik $\left(\vec{E}(\vec{x}), \vec{B}(\vec{x})\right)$)

Feld: Ein Feld ist eine Funktion der generalisierten Koordinaten

Bsp. Elektrisches Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Vierervektor: $\left(\Phi, \vec{A}\right) = A^{\mu}\ \left(\mu = (0, 1, 2, 3, 4)\right)$ Potenzial

Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu}(x) - \partial_{\nu} A_{\mu}(x)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_x & -B_y \\ -E_y & -B_x & 0 & B_z \\ -E_z & B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}$$

Antisymmetrische Matrix

Feldtheorie

Eine (klassische) Feldtheorie ist eine Lagrangefunktion für Felder. Man ersetze jeweils eine Koordinate (ein Freiheitsgrad) durch eine Funktion über alle Koordinaten (unendlich viele Freiheitsgrade).

Wirkung für Elektrodynamik:

$$S = \int dt\ d^3x\ \mathcal{L}(A^{\mu}, \partial_{\nu} A^{\mu})$$

Lagrangedichte

Noether-Theorem

<u>Symmetrien</u> ≙ Erhaltungsgrößen

$$\Rightarrow \int dt\ d^3x\ \ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Klassische Feldtheorie

Ersetze die Koordinaten durch Funktionen (∞ viele Freiheitsgrade), skalares Feld $\varphi(x)$

$$\Rightarrow S = \int dt\ d^3x\ \left(\partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi - V(\varphi)\right)$$

$$V(\varphi) = m\varphi^2(+\lambda\varphi^4\ )$$

Feldtheorie ↔ **QM**

(spezielle RT) $H\psi = E\psi$

Quantenfeldtheorie

Zusätzlich zu den Operatoren wird auch die Wellenfunktion quantisiert d.h. sie wird eine Feld, das quantisiert wird.

Fourier-Entwicklung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega_p} \int d^3p \left(a(\vec{p}) e^{ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx} \right)$$

Quantisierung durch

$$\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,') \right] = 2\omega_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$$

$a^\dagger$ erzeugt Teilchen mit Impuls $\vec{p}$

a vernichtet Teilchen mit Impuls $\vec{p}$

Noether-Theorem:

Symmetrien $\widehat{=}$ Erhaltungsgrößen

$$S = \int dt\, d^3x\ \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\mu \varphi\right)$$

Prinzip der stationären Wirkung gilt weiterhin

Lagrangegleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi \right)} \right) = 0$$

Funktionalableitung

d.h. Ableitung nach einer Funktion

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \varphi(y)} = \delta^{(4)}(x - y)$$

Symmetrien

Symmetrietransformationen: $\varphi(x) \to \varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \alpha \delta \varphi(x)$$

Die Wirkung S sei invariant unter dieser Symmetrietransformation

$$S[\varphi'] = S[\varphi + \alpha \delta \varphi]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\varphi', \partial \varphi') = \mathcal{L}(\varphi, \partial \varphi) + \alpha \partial_\nu X^\nu$$

⇒ Dies führt auf eine erhaltene Ladung (Erhaltungsgröße)

$$Strom: J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_\varphi + X^\nu$$

Viererdivergenz des Stromes ist gleich Null:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 - \partial_1 J^1 - \partial_2 J^2 - \partial_3 J^3 = 0 = \partial_t \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

Kontinuitätsgleichung; Gauß'scher Satz

Zu dem erhaltenden Strom gehört eine erhaltene Ladung:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \rho = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, J^t$$

Eichtheorien:

Symmetrie:

$$\varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x)$$

$$\partial\varphi(x) \to \partial_\mu\left(e^{i\alpha(x)}\varphi(x)\right) = \left(i\partial_\mu\alpha(x)\right) \cdot \varphi(x) + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\varphi(x)$$

Definiere kovariante Ableitung: $D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu(x)$ (A heißt Eichfeld)

A_μ soll die Transformationseigenschaft $A_\mu \to -\partial_\mu\alpha(x)$ Viererpotenzial

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu + iA_\mu)\varphi = \left(i\partial_\mu\alpha(x)\right) + e^{i\alpha(x)}D_\mu\varphi(x) - iJ_\mu\alpha(x)\varphi(x)$$

$$\Rightarrow D_\mu\varphi \to D_\mu\varphi'$$

Symmetrie – invariante Wirkung:

$$S = \int dt\, d^3x\, \left((D\varphi)^*(D_\varphi\varphi) + F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$$

Skalare E-Dynamik: skalares Feld, das mit elektrischen und magnetischen Feldern wechselwirkt.

Aktuelle Forschung

Eichtheorien (≡ Feldtheorien mit Eichfeldern) beschreiben Wechselwirkungen von Elementarteilchen (ED, starke, schwache Kernkraft)

Gravitation: Allgemeine Relativitätstheorie ist auch eine Eichtheorie der allgemeinen Koordinaten Transformationen

Problem: Gravitation lässt sich nicht auf die beschriebene Weise quantisieren.

Frage: Gibt es eine vereinheitlichte Theorie aller fundamentalen Wechselwirkungen? (quantisierte Eichtheorien + Gravitation)