Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Effektives Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem Potential der Form

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^2}\,,$$

mit $r = |\vec{r}|$. Was können sie über die Symmetrie des Problems aussagen? Welche Erhaltungsgröße ergibt sich (Noether)?

Was folgt daraus für die zugehörige Kraft? Berechnen Sie sie. Verwenden Sie ∇ in Kugelkoordinaten.

Wie viele Koordinaten benötigt man um das Problem zu beschreiben? Warum?

Stellen Sie den Betrag des Drehimpulses in geeigneten Koordinaten dar.

Stellen Sie die Gesamtenergie in Polarkoordinaten auf und setzen Sie den Drehimpuls in die Gleichung ein. Identifizieren Sie die verschiedenen Energien, radiale kinetische Energie, azimutale kinetische Energie, potentielle Energie und das effektive Potential? Wie viele Koordinaten benötigen Sie zur Beschreibung des Problems für einen festen Drehimpuls?

Skizzieren Sie das effektive Potential für verschiedene Werte von α. Für welchen α ist die Bewegung durch einen minimalen/maximalen Radius beschränkt? Was muss dann für die Energien gelten?

Bestimmen Sie den maximalen r_{max} und minimalen r_{min} Radius als Funktion der Gesamtenergie E. Hinweis: Überlegen Sie sich dazu, welchen Wert $\dot{r}$ an der Stelle r_{min} bzw. r_{max} annimmt.

Im Folgenden betrachten Sie den Fall, dass der Radius nach oben beschränkt ist. Stellen Sie die Gesamtenergie als Funktion von $\dot{r}$, r und r_{max} dar.

Bestimmen Sie $r(t)$ mit der Anfangsbedingung $r(0) = r_{max}$. *Tipp: Separation der Variablen, Substitution:* $u = r^2 - r_{max}^2$

Nach welcher Zeit $t = t_1$ landet das Teilchen im Zentrum?

Berechnen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ mit $\varphi(r_{\mathrm{max}}) = 0$. *Tipps:* $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, *Drehimpulsgleichung, Separation der Variablen, Substitution* $u = r_{max}/r$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$*arcosh(x)* $= 1/(\sqrt{x^2 - 1})$