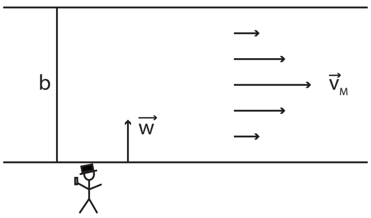
Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Koordinatensysteme



Peter steht vor einem Fluss der Breite b. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses nimmt zur Flussmitte hin linear zu bis zu einem Maximalwert v_M. Da weit und breit keine Brücke zu sehen ist, beschließt er den Fluss schwimmend zu durchqueren. Er schwimmt senkrecht zur Strömungsrichtung mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{w}$.
Zeichnen Sie ein Koordinatensystem in die Skizze ein. Überlegen Sie sich, ob Symmetrien vorliegen, die Ihre Rechnung vereinfachen können.

Finden Sie eine Funktion für die Strömungsgeschwindigkeit und bestimmen Sie die Bahnkurve von Peter ($y(x)$, $z(x)$,..je nach Wahl des KOSY).

Skizzieren Sie die Bahnkurve in die Skizze.
Wie weit ist der Landungspunkt vom Startpunkt entfernt?

Bestimmen Sie nun die Wegstrecke, die Peter zurückgelegt hat. Stellen Sie zunächst sicher, dass Ihnen klar ist, warum die Länge der Kurve mit folgendem Integral

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

beschrieben wird. Bringen Sie dann das Integral auf die Form

$$s = f \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{at^2 + 1} dt$$

Verwende Sie Partielle Integration, fügen Sie dann die folgende $0 = \int \frac{1}{\sqrt{1+at^2}} dt - \int \frac{1}{\sqrt{1+at^2}} dt$ hinzu und verwenden Sie $\int \frac{1}{\sqrt{1+ax^2}} = \frac{\operatorname{arsinh}(\sqrt{a}x)}{\sqrt{a}}$

Überlegen Sie sich nun wie lang die Wegstrecke für einen sehr strömungsarmen ($v_M \ll w$) und einen strömungsreichen ($v_M \gg w$) Fluss ist. Überprüfen Sie Ihre Überlegungen dann, in dem Sie geeignete Grenzwerte für das Ergebnis aus d) bilden.

Optional:
Da Peters Handy nicht wasserdicht ist, hat er es, bevor er in den Fluss gesprungen ist, unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen senkrecht zum Flussufer mit einem Anfangstempo von $v_s = \sqrt{2}v_0$ über den Fluss geworfen. Auf das Handy wirkt sowohl die Schwerkranft als auch eine Reibungskraft der Form $\vec{F}_R = -\beta\vec{v}$. Stellen Sie allgemein die Bewegungsgleichung mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes auf.

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen durch die Geschwindigkeit dar, damit sie Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten.

Machen Sie sich eine Skizze, in die Sie die Gewichtskraft, die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_s$ und ihr gewähltes Koordinatensystem einzeichnen. Stellen Sie die Bewegungsgleichung komponentenweise auf. Bei geschickter Wahl des Koordinatensystems erhalten Sie eine homogene DGL 1. Ordnung und eine inhomogene DGL 1. Ordnung.

Lösen Sie die homogene DGL mit Hilfe des Exponentialansatzes unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung.

Nachdem Sie eine Komponente der Geschwindigkeit bestimmt haben, können Sie daraus die zugehörige Komponente der Bahnkurve berechnen.

Die Lösung der inhomogenen DGL kann bestimmt werden, indem man zunächst die Inhomogenität nicht beachetet und die allgemeine Lösung dieser homogenen Gleichung bestimmt.

Anstatt nun die Konstante über die Anfangsbedingungen zu bestimmen, machen Sie als Lösungsansatz für die inhomogene Gleichung aus der Konstanten eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t. Setzen Sie diesen Ansatz in die DGL ein und bestimmen Sie die Form der Konstantenfunktion.

Setzen Sie das Ergebnis in Ihren Ansatz. Addieren Sie nun die allgemeine Lösung der homogenen DGL und die spezielle Lösung der inhomogenen, erhalten Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Setzen Sie die Anfangsbedingung ein und berechnen Sie die zugehörige Komponente der Bahnkurve.