Betrachten Sie einen homogenen Kegel der Masse M mit der Höhe h und Radius R. Legen Sie das Koordinatensystem mit der x_3-Achse entlang der Symmetrieachse. Der Kegel stehe auf der Spitze.

a) Berechnen Sie alle Elemente $\{\theta_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ des Trägheitstensors θ

$$\theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3x \, \rho(\vec{x}) \left(\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right)$$

für den Kegel bzgl. seines Schwerpunkts. Nutzen Sie Symmetrien, um möglichst wenig Integrale berechnen zu müssen.

b) Schreiben Sie die Euler'schen Gleichungen für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Kegels bzgl. seines Schwerpunkts im körperfesten System

$$\theta\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \theta\vec{\omega} = 0 \qquad (1)$$

in Komponenten.

c) Lösen Sie in (1) zunächst die Gleichung für ω_3 und anschließend die Gleichungen für ω_1 und ω_2. Beschreiben Sie die zeitliche Entwicklung von $\vec{\omega}$ für die Anfangsbedingung $\omega_2(t = 0) = 0$.

Der Trägheitstensor eines starren Körpers ist zum Zeitpunkt $t = t_0$ im raumfesten System $\hat{\Sigma}$ durch

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{8} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente.

Legen Sie nun die Koordinatenachsen des körperfesten Systems Σ so, dass die Hauptträgheitsachsen entlang der Koordinatenachsen liegen mit dem größten Trägheitsmoment entlang der z-Achse. Bestimmen Sie nun die Eulerwinkel, die das körperfeste System mit dem raumfesten System verbinden. Es gelte $\hat{\vec{x}} = R\vec{x}$ mit

$$\begin{aligned} R &= R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hinweise: Bedenken Sie, dass gilt: $J = x_i J_{ij} x_j = \hat{x}_l \hat{J}_{lm} \hat{x}_m$. Nutzen Sie aus, dass der Trägheitstensor invariant unter der Drehung um die z-Achse ist (warum?).