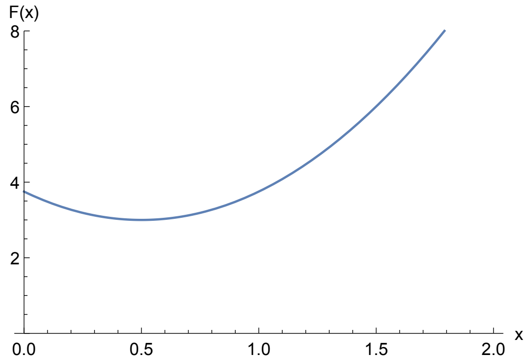
Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Legendre-Transformation

Das Ziel der Legendre Transformation ist der Wechsel der Variable der Funktion $F(x)$ von x zu $\partial f/\partial x$. Graphisch betrachtet ist die Legendre-Transformation der Übergang vom Graphen der Funktion F zur Schar der Tangenten an diesen Graphen.

Zeichnen Sie in die Abbildung auf der rechten Seite die Tangente im Punkt z.B. $x_0 = 1$ an den Graphen. Bezeichnen Sie die Steigung der Tangente mit s_0 und den Ordinatenabschnitt mit $G(s_0)$. Zeichnen Sie nun das Steigungsdreieck mit den Eckpunkten $(0, G(s_0))$ und $(x_0, F(x_0))$ ein.



Stellen Sie die Höhe des Steigungsdreiecks mit Hilfe von s und x_0 dar.

Sie können die Höhe auch mit Hilfe von F und G beschreiben.

Setzen Sie die beiden Gleichungen für die Höhe gleich.

Verallgemeinern Sie nun die Gleichung für beliebige x und formen Sie sie nach $G(s)$ um. Sie erhalten die Transformationsgleichung der Legendre-Transformation.
Hinweis: Damit die Transformation eindeutig ist, muss die Steigungsfunktion $s(x) = \partial F/\partial x$ monoton sein.

Betrachten Sie nun die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ und die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$. Im Hamilton-Formalismun ist $-H$ die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion. Es wird von der Geschwindigkeit $\dot{q}$ zum Impuls $p = \partial L/\partial \dot{q}$ übergegangen. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion auf.

$$H(q, p, t) =$$

Stellen Sie nun das totale Differential der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ und der Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ auf:

$$dL =$$

$$dH =$$

Sie können das totale Differential der Hamilton-Funktion auch mit Hilfe der Transformationsgleichung und des totalen Differentials der Lagrange-Funktion berechnen.

$$dH =$$

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse für das totale Differential der Hamilton-Funktion. Lesen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen durch Koeffizientenvergleich ab.
Hinweis: $\partial L / \partial q$ ist mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen umformbar.

Betrachten Sie nun ein Teilchen im Schwerefeld der Erde. Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf.

Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf.

Geben Sie alle Erhaltungsgrößen an.