Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Reflexion an weicher Wand

Ein Teilchen komme aus dem Unendlichen ($x > 0$) mit der Geschwindigkeit v_∞. Es treffe senkrecht auf eine weiche Wand und werde dort elastisch in Einfallsrichtung reflektiert, d. h. es kann als eindimensionale Bewegung betrachtet werden. Die weiche Wand wird beschrieben durch folgendes Potential:

$$V(x) = \frac{1}{2} V_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \qquad \text{mit} \qquad \alpha > 0, \quad V_0 > 0\,.$$

a) Berechnen Sie den Umkehrpunkt $x_0(v_\infty)$. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Teilchenbahn $x(t)$ als Funktion von v_∞; wählen Sie dabei $x(0) = x_0$. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie die Teilchengeschwindigkeit $\dot{x}(t)$.
Bestimmen Sie für große $|t|$ explizit die Zeitabhängigkeit von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$.
Skizzieren Sie $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für alle t. (7 Punkte)

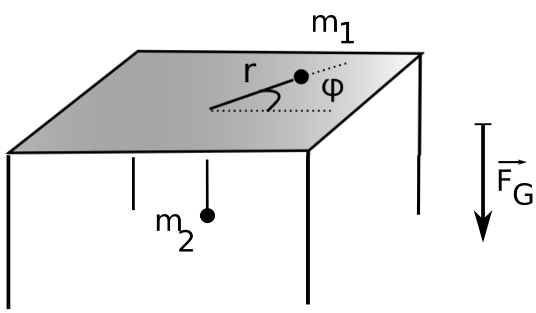
d) Welche anschauliche Bedeutung hat der Grenzfall $\alpha \to \infty$? (2 Punkte)

Hinweis:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1 - \exp(-\alpha x')}} = \frac{2}{\alpha}\,\operatorname{arcosh}\left(\exp\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\right)$$

Aufgabe 2: **Zwei Massen an einem Faden**

Zwei Punktmassen m_1 und m_2 sind durch einen Faden der Länge l verbunden. Dieser Faden läuft durch ein Loch in einer ebenen und glatten Tischplatte, so dass sich m_1 auf dem Tisch bewegen kann, und m_2 unter dem Einfluss der zur Tischplatte senkrechten Schwerkraft $\vec{F}_G$ unter dem Tisch hängt, siehe Abbildung. Im Folgenden nehmen wir an, dass sich m_2 nur in vertikaler Richtung bewegt, der Faden immer gespannt bleibt, und m_1 nie den Kontakt zur Tischplatte verliert. Weiterhin vernachlässigen wir Reibung und das Gewicht des Fadens.



a) Stellen Sie unter Verwendung der Koordinaten r, φ (siehe Abbildung) die Lagrange-Funktion des Systems auf. (5 Punkte)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Drehimpulskomponente $L_\perp$ des Systems senkrecht zur Tischplatte und zeigen Sie, dass diese erhalten ist. (3 Punkte)

d) Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße, und begründen Sie, dass es sich um eine solche handelt. (3 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass für den Abstand r von m_1 zum Loch in der Tischplatte eine Gleichung der Form

$$\ddot{r} = \frac{c}{r^3} - d \qquad (1)$$

gilt, und bestimmen Sie die positiven Konstanten c und d. (3 Punkte)

f) Zeigen Sie, dass es stationäre Lösungen (d.h. Lösungen mit $r = \text{const.}$) gibt. Was passiert, wenn eine stationäre Lösung eine kleine Störung erfährt? Begründen Sie Ihre Aussage durch eine Rechnung, indem Sie z.B. ein effektives Potential betrachten. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Reflexion und Transmission einer ebenen Welle

Eine in positiver x-Richtung laufende ebene elektromagnetische Welle mit Frequenz ω treffe bei $x = 0$ auf eine Grenzfläche, die ein Vakuum im linken Halbraum ($x < 0$) von einem homogenen isotropen Dielektrikum im rechten Halbraum ($x > 0$) trennt. Das Dielektrikum werde durch eine relative Dielektrizitätskonstante ε_r oder den entsprechenden Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}$ beschrieben.

Das elektrische Feld der einfallenden ebenen Welle sei durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)} \vec{e}_y \qquad (1)$$

beschrieben, wobei wir uns für die Zwecke dieser Aufgabe auf positive Werte von ω beschränken können.

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in einem Dielektrikum in Abwesenheit von freien Ladungen und Strömen an. (4 Punkte)

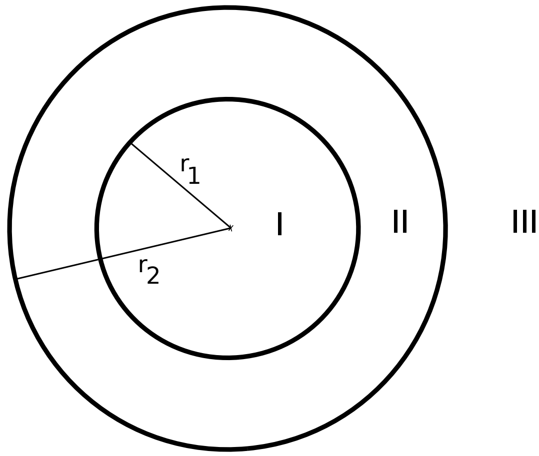
b) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Maxwell-Gleichungen die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$ für das elektrische Feld (1), und bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$ in den beiden Halbräumen. Wie unterscheidet sich demnach die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle im Dielektrikum von der im Vakuum? (8 Punkte)

c) Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes und des Magnetfeldes sind an der Grenzfläche zwischen Vakuum und Dielektrikum stetig. Mit welchen Argumenten lässt sich diese Aussage für den Fall des elektrischen Feldes durch Integration einer geeigneten Maxwell-Gleichung nachweisen? (5 Punkte)

d) Berechnen Sie nun die Amplituden E_t und E_r des transmittierten bzw. reflektierten elektrischen Feldes. Interpretieren Sie das Ergebnis für den Spezialfall $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$. (8 Punkte)

Aufgabe 2: Kugelkondensator

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei konzentrische, homogen geladene, als unendlich dünn angenommene Kugelschalen (Radien r_1, r_2 mit $r_1 < r_2$, Ladungen q_1, q_2) und das Feld das sie erzeugen, siehe Abbildung.



a) Betrachten Sie zunächst eine einzelne Kugelschale (Radius r_0, Ladung q), und geben Sie das elektrische Feld außerhalb und innerhalb der Kugelschale an. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie nun das elektrische Feld der ursprünglichen Anordnung von zwei geladenen Kugelschalen in den Bereichen I, II, III. (6 Punkte)

c) Die Anordnung soll als Kondensator verwendet werden. Setzen Sie $q_1 = -q_2 = q$, und zeigen Sie, dass die Kapazität C der Anordnung durch

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{1}$$

gegeben ist. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie die im Kondensator aus (c) gespeicherte Energie auf zwei Wegen: Indem Sie die Energiedichte

$$\rho(p) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(p) \tag{2}$$

des Feldes integrieren, und indem Sie die Arbeit berechnen, die zur Aufladung der Platten benötigt wird. Vergleichen Sie die Ergebnisse. (7 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Kapazität pro Flächeneinheit eines Plattenkondensators, indem Sie (1) in einem geeigneten Limes betrachten. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Schallgeschwindigkeiten

Die gemessene Schallgeschwindigkeit in Wasserstoff bei Zimmertemperatur ist um etwa einen Faktor 1,3 größer als in Helium. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich dieser Unterschied modellhaft verstehen lässt. Dabei wird davon ausgegangen, dass beide Gase der idealen Gasgleichung gehorchen und isotopenrein als $^1H_2$ bzw. ^4He vorliegen.

a) Die Schallausbreitung in einem Gas wird durch die Wellengleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - K \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0\,, \tag{1}$$

für die Dichte $\rho(x,t)$ des Gases beschrieben. Wie lässt sich die Schallgeschwindigkeit durch die mittlere Dichte ρ_0 des Gases und den Kompressionsmodul $K = -V(\mathrm{d}p/\mathrm{d}V)$ ausdrücken? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit c_T unter der Annahme, dass die Schallausbreitung isotherm erfolgt. Drücken Sie das Ergebnis durch die Temperatur und die Molmasse M aus. Welches Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten erwarten Sie in diesem Fall? (7 Punkte)

c) Nun werde angenommen, dass die Schallausbreitung adiabatisch erfolgt. Zeigen Sie, dass für adiabatische Prozesse im idealen Gas für den Druck p und das Volumen V der Zusammenhang $pV^\gamma = \text{const.}$ gilt. Wie lässt sich γ durch die Zahl der Freiheisgrade f ausdrücken? (9 Punkte)

Hinweis: Für die innere Energie eines idealen Gases gilt $U = \frac{f}{2} nRT$.

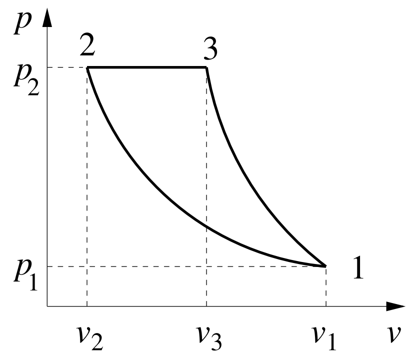
d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_ad für adiabatische Schallausbreitung. Was erwarten Sie in diesem Fall für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in Wasserstoff und Helium, wenn Sie das Wasserstoffmolekül als starre Hantel modellieren? Ist die isotherme oder die adiabatische Beschreibung der Schallausbreitung adäquater? (7 Punkte)

Aufgabe 2: Ein Kreisprozess

Ein Kreisprozess bestehe aus einer Adiabaten, einer Isothermen und einer Isobaren, wie nebenstehend skizziert. Der Kreisprozess soll reversibel ablaufen und eine Kühlmaschine beschreiben. Das Arbeitsmedium sei ein ideales Teilchen-Gas mit der (molaren) Entropie s mit

$$\mathrm{d}s(p,v) = c_v \frac{\mathrm{d}p}{p} + c_p \frac{\mathrm{d}v}{v}\,, \tag{1}$$

dem Molvolumen v und konstanten spezifischen Wärmen c_v und $c_p = c_v + R$ mit der Gaskonstanten R.
Gegeben seien v_1, p_1 und p_2 (siehe Skizze).



a) Zeigen Sie, dass für adiabatische Prozesse

$$pv^{\gamma} = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2}$$

gilt. Identifizieren Sie (mit Begründung) die drei Kurven des (p,v)-Diagramms. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die unbekannten Drücke und Temperaturen an den drei Prozesspunkten 1, 2 und 3 als Funktion von p_1, v_1 und v_2. (7 Punkte)

c) Geben Sie den Umlaufsinn für den Betrieb der Maschine als Kühlmaschine an (mit Begründung). (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie $s(T,p)$, und skizzieren Sie den Prozess in einem (T,s)-Diagramm. (6 Punkte)

e) Auf welchen Wegstücken wird Wärme und/oder Arbeit der Maschine zugeführt bzw. von ihr abgegeben (mit Begründung, ohne Rechnung)? (6 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Verschwinden eines antisymmetrischen Zustands

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in dem Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} g \left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right] , \tag{1}$$

das durch zwei Deltafunktionen mit $g > 0$ gegeben ist. Während für dieses Potential immer ein gebundener symmetrischer Zustand existiert, ist die Existenz eines gebundenen antisymmetrischen Zustands an eine Bedingung geknüpft, die im Weiteren untersucht werden soll.

a) Betrachten Sie zunächst ein einzelnes anziehendes Deltapotential. Begründen Sie mit Hilfe der Schrödingergleichung ohne explizite Rechnung, dass in diesem Fall kein gebundener Zustand existieren kann, dessen Wellenfunktion bezüglich der Position des Deltapotentials antisymmetrisch ist. (5 Punkte)

b) Die Energie des gebundenen antisymmetrischen Energieeigenzustands im Potential (1) sei durch $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$ gegeben. Ferner darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Ableitung der Wellenfunktion $\psi(x)$ an einem Deltapotential der Form $V(x) = -(\hbar^2/2m)g\delta(x - x_0)$ der Sprungbedingung

$$\psi'(x_0^+) - \psi'(x_0^-) = -g\psi(x_0) \tag{2}$$

genügt. Leiten Sie eine Bedingung für κ in der Form

$$\frac{\kappa a}{ga} = f(\kappa a) \tag{3}$$

her. (9 Punkte)

Hinweis: Berücksichtigen Sie die Symmetrieforderung beim Ansatz für die Wellenfunktion.

c) Erläutern Sie, wie man die Bedingung (3) graphisch lösen kann, und fertigen Sie eine entsprechende Skizze an. Welche Bedingung muss ga erfüllen, damit ein gebundener antisymmetrischer Zustand existieren kann? (7 Punkte)

d) Welche Eigenenergie besitzt der gebundene antisymmetrische Zustand für $ga \to \infty$? Wie verändert sich die Eigenenergie qualitativ mit abnehmendem ga? (4 Punkte)

Aufgabe 2: Spinpräzession

Ein Spin $s = 1/2$ befinde sich im Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Die Bewegung des Spins wird durch den Hamilton-Operator

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \omega S_z$$

beschrieben. Dabei sind $\vec{S}$ der Spinoperator, $\vec{\mu}$ das magnetische Moment und ω die Lamor-Frequenz.

Es ist hilfreich, den Spinzustand durch einen zweidimensionalen Vektor und den Hamilton-Operator durch eine (2×2)-Matrix zu beschreiben:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Eigenzustände und Eigenwerte des Hamilton-Operators an. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ ein normierter Eigenzustand von S_x zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ ist. (2 Punkte)

c) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

mit dem Anfangszustand $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$.

Kontrolle: $|\Psi(t)\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2} \end{pmatrix}$ (4 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_z(t)$, im Zustand $|\Psi(t)\rangle$ bei einer Messung von S_z den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ zu messen? (2 Punkte)

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_x(t)$, im Zustand $|\Psi(t)\rangle$ bei einer Messung von S_x den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ zu messen? (7 Punkte)

f) Berechnen Sie $\langle S_x\rangle(t)$ und $\langle S_z\rangle(t)$ für den Zustand $|\Psi(t)\rangle$. (4 Punkte)

g) Was bedeutet das letzte Ergebnis für die Bewegung des mittleren Spins $\langle\vec{S}\rangle(t)$? (4 Punkte)