

Die Produktion geladener Eichbosonen im nichtkommutativen Standardmodell

Diplomarbeit
von
Christian Speckner



vorgelegt bei
Prof. Dr. Reinhold Rückl

am
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

27. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Überblick	3
2	Nichtkommutative Eichtheorie	7
2.1	Nichtkommutative Feldtheorie	7
2.2	Eichtheorien	9
2.3	Eichtheorien auf der nichtkommutativen Raumzeit	11
2.4	Die Seiberg-Witten-Abbildung	13
2.5	Quantisierung	16
3	Die nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells	18
3.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik	18
3.2	Die nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells	20
3.3	Feynmanregeln einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie	23
3.4	Feynmanregeln des nmNCSM	26
4	W-Paarproduktion aus Quarks im nmNCSM	32
4.1	Wirkungsquerschnitt und Kinematik	32
4.2	Feynmandiagramme und Ward-Identitäten	34
4.3	Analytische Berechnung der quadrierten Feynmanamplitude	41
4.4	Die Produktion polarisierter W -Bosonen	44
5	Zerfall der W-Bosonen und Rekonstruktion der Polarisationen	50
5.1	W -Zerfall und Winkelverteilung der produzierten Fermionen	50
5.2	Rekonstruktion der W -Polarisation bei der Paarproduktion mit anschließendem semileptonischen Zerfall	54
5.3	Hintergrunddiagramme und Eichinvarianz	60
6	W-Produktion am LHC	62
6.1	Das Partonmodell der QCD	62
6.2	Monte-Carlo-Simulationen und das Softwarepaket Whizard	64
6.3	Die Produktion polarisierter W -Bosonen	66
6.4	Paarproduktion mit semileptonischem Zerfall	71
6.5	Die Rekonstruktion des Neutrinoimpulses	75
7	Zusammenfassung	80
A	Konventionen und Notation	83
B	Nützliche Relationen	85

C	Verwendete Parameter	88
D	Code	89
	D.1 FORTRAN	89
	D.1.1 Implementation der nmNCSM-Vertizes	89
	D.1.2 Matrixelemente	92
E	Quadrirtes Matrixelement für der Prozess $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$	95
F	Abbildungen	97
	F.1 zu Abschnitt 4.3	97
	F.2 zu Abschnitt 4.4	100
	F.3 zu Abschnitt 6.3	103
	F.4 zu Abschnitt 6.4	106
	F.5 zu Abschnitt 6.5	110
G	Eingesetzte Software	114

Kapitel 1

Einleitung und Überblick

Ende des 19. Jahrhunderts herrschte in der Fachwelt die Ansicht, die physikalische Grundlagenforschung habe das Ziel einer konsistenten und vollständigen mathematischen Beschreibung der Natur fast erreicht. Mit der klassischen Mechanik, der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus sowie der Thermodynamik existierte ein im wesentlichen konsistentes theoretisches Gebäude, welches alle bekannten experimentellen Ergebnisse vorherzusagen und zu erklären vermochte. Zwar gab es noch einige „weiße Flecken“ wie die in der Elektrodynamik auftretenden Divergenzen und das Gibbs'sche Postulat in der Thermodynamik, doch die wenigsten Physiker erwarteten ernsthaft noch wesentliche Modifikationen der Theorie.

Nachdem jedoch bereits im ausgehenden 19. Jahrhundert das Michelson-Morley-Experiment sowie das Schwarzkörperspektrum und der Photoeffekt erste Diskrepanzen zwischen Modell und Experiment aufzeigten, begann mit dem 20. Jahrhundert eine Revolution des physikalischen Weltbilds. Lorentz und Larmor zeigten, daß die Maxwellgleichungen nicht invariant unter den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik sind und fanden stattdessen die Invarianz der klassischen Elektrodynamik unter einem neuen Typ von linearen Raum-Zeit-Transformationen, den Lorentztransformationen. Diese Entdeckung sowie die vom Resultat des Michelson-Morley-Experiments suggerierte Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bildeten die Ausgangsbasis für Einsteins Spezielle Relativitätstheorie, und die kurz darauf formulierte Allgemeine Relativitätstheorie integrierte auch die Gravitation in die neue Theorie von Raum und Zeit.

Unabhängig von diesem Teil der Entwicklung führten die Planck'sche Erklärung des Schwarzkörperspektrums durch das Postulat quantisierter Schwingungszustände des elektromagnetischen Feldes, Einsteins Erklärung des Photoeffekts durch Lichtquanten, die Unverträglichkeit des Bohr'schen Atommodells mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik sowie viele andere Erklärungen experimenteller Ergebnisse durch die Quantisierung physikalischer Observablen zur Entstehung der Quantenmechanik. Einer der größten Triumphe dieser neuen Theorie war die zunächst vollständige Erklärung des Wasserstoffspektrums, obwohl genauere Messungen Abweichungen zwischen Vorhersage und Experiment zeigten. Ein wesentlicher Nachteil war jedoch die Unverträglichkeit mit der ebenfalls neuen Relativitätstheorie, die sich in vielen Experimenten ebenso wie die Quantenmechanik bestätigte.

Der Versuch Diracs, die Quantenmechanik mit der Speziellen Relativitätstheorie zu verknüpfen, führte zu der Dirac-Gleichung des Elektrons. Obwohl der Versuch, diese Gleichung auf dieselbe Weise wie die nichtrelativistische Quantenmechanik zu interpretieren auf eine ganze Reihe von Paradoxien führte, war es möglich, mithilfe der neuen Gleichung fast alle Abweichungen zwischen dem gemessenen Wasserstoffspektrum und der theoretischen Vorhersage zu beseitigen. Der Versuch einer konsistenten Interpretation der Gleichung zeigte jedoch, daß eine solche im Rahmen einer Einteilchentheorie nicht möglich war. Der Versuch Diracs, die Inkonsistenzen in der neuen Theorie zu lösen, führten zunächst

zur Interpretation mithilfe des Dirac-Sees, welche bereits die Existenz des Positrons als Antiteilchen des Elektrons postulierte, und mündete schließlich in der Interpretation der Dirac-Gleichung als Quantenfeldtheorie.

Obwohl die Quantenfeldtheorie eine elegante Interpretation der relativistischen Wellengleichungen von Elektron und Photon lieferte, erwies sich die Theorie zunächst als mathematisch sehr komplex und schwer zu handhaben. Dies verbesserte sich jedoch mit der Entwicklung einer störungstheoretischen Beschreibung der wechselwirkenden Theorie durch Dyson und Schwinger, und das von Feynman eingeführte Kalkül der Feynmandiagramme lieferte eine einfache Interpretation der Störungsreihe und ein mächtiges Werkzeug zu deren Berechnung. Die in jeder höheren Ordnung der Entwicklung auftretenden divergenten Schleifenintegrale bereiteten zunächst zwar große Probleme, doch die Absorption dieser Divergenzen in die Parameter der Theorie durch Renormierung entwickelte sich schnell von einem mißtrauisch beäugten „Trick“ zu einem akzeptierten Grundpfeiler der Quantenfeldtheorie. Die störungstheoretische Behandlung der Quantenelektrodynamik zusammen mit der Renormierung beseitigte die verbleibenden Diskrepanzen zwischen dem gemessenen Wasserstoffspektrum und der theoretischen Vorhersage so gründlich, daß bis heute im Rahmen der experimentellen und rechnerischen Genauigkeit keine meßbaren Abweichungen bekannt sind. Damit ist die Quantenelektrodynamik heute die mit Abstand am besten bestätigte physikalische Theorie. Die Kombination aus Quantenfeldtheorien und Renormierung erwies sich nicht nur in fundamentalen Physik, sondern auch bei der Beschreibung großer, nichtrelativistischer Systeme wechselwirkender Teilchen im Festkörper als mächtiges Werkzeug und erlaubte zum Beispiel die Erklärung der Supraleitung durch Bardeen, Cooper und Schrieffer.

Aus der Quantenelektrodynamik entwickelten sich zusammen mit dem Studium nichtabelscher Eichtheorien durch Yang und Mills zunächst das Glashow-Salam-Weinberg-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung und zusammen mit dem von Gell-Mann postulierten Quarkmodell und der Quantenchromodynamik schließlich in den 70er Jahren das Standardmodell der Teilchenphysik, welches eine Vereinheitlichung des Elektromagnetismus sowie der schwachen und der starken Kernkraft im Rahmen einer Eichtheorie leistet. Der Vergleich zwischen den Vorhersagen des Standardmodells und den vor allem an Beschleunigern gewonnenen Daten ist eine beispiellose Erfolgsgeschichte; das Standardmodell liefert eine bis heute nahezu vollkommen akkurate Beschreibung der experimentellen Daten.

Trotz seines eindrucksvollen Erfolges weist das Standardmodell etliche Unzulänglichkeiten auf, von denen die vielleicht gravierendsten die große Anzahl von mindestens 19 freien Parametern sowie das Fehlen einer Beschreibung der Gravitation sind. Alle Versuche, eine quantenmechanische Beschreibung der Gravitation zu leisten und somit die auf kosmologischen Skalen ebenfalls ausgezeichnet bestätigte Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Standardmodell zu vereinigen, führten entweder zu nicht renormierbaren Quantenfeldtheorien (Feynman) oder der Theorien, aus denen noch keine Vorhersagen für das Experiment gewonnen werden konnten (Stringtheorie, Quanten-Loop-Gravitation). Außerdem gibt es in der mathematischen Struktur von Quantenfeldtheorien in vier Raumzeitdimensionen nach wie vor Unzulänglichkeiten und Widersprüche; so fehlt zum Beispiel in vier Dimensionen bis heute der Beweis der Existenz einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie genauso wie eine zufriedenstellende Definition des Integrationsmaßes des Pfadintegrals. Auf kosmologischer Ebene gibt es ebenfalls noch etliche Lücken in der Theorie, so zum Beispiel die Frage nach der Natur der dunklen Materie und Energie sowie die beobachtete Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie zumindest in dem für uns beobachtbaren Teil des Universums. Darüberhinaus haben Versuche einer quantenmechanischen Beschreibung der Physik Schwarzer Löcher interessante Zusammenhänge zwischen Kosmologie, Quantenmechanik und Thermodynamik aufgezeigt.

Wenn 2007 am CERN der LHC in Betrieb geht und die Vorhersagen des Standardmodells in Proton-Proton-Kollisionen bei einer bisher nicht erreichten Energie von 14 TeV testet, könnte also eine ähnliche Revolution wie zu Beginn des letzten Jahrhunderts die physikalischen Modelle verändern. Der LHC wird sowohl die Existenz des Higgs-Bosons (das einzige Teilchen des Standardmodells, das bis heute noch nicht gefunden wurde) als auch die Vorhersagen zahlloser möglicher Erweiterungen des Standard-

modell prüfen und somit möglicherweise entscheidende Hinweise auf die Natur einer Physik jenseits des Standardmodells liefern.

Eine Klasse von Theorien, die zur Erweiterung des Standardmodells vorgeschlagen wurden, sind sogenannte nichtkommutative Feldtheorien. Der Grundgedanke solcher Theorien ist eine grundlegende Modifikation der Struktur der Raumzeit durch die Ersetzung der herkömmlichen Koordinaten x^μ durch nicht vertauschende Objekte. Wenn auch die Vertauschungsrelationen der nichtrelativistischen Quantenmechanik im Wesentlichen durch die Poissonklammern der klassischen Mechanik vorgegeben sind, so ist das Postulat eines nichtverschwindenden Kommutators von Ortskoordinaten eine interessante Möglichkeit zur Erweiterung der Theorie, die bereits von Heisenberg in Betracht gezogen wurde. In den 40er Jahren war die Hoffnung, die bei der Berechnung der Schleifenkorrekturen auftretenden Divergenzen durch die Einführung einer fundamentalen Längenskala abzuschneiden, die Motivation für die Untersuchung einer Ersetzung der Koordinaten x^μ durch hermitesche Operatoren mit einem diskreten Spektrum und nichttrivialen Vertauschungsrelationen in [1]. Vor dem Hintergrund der Erfolge bei der Renormierung der Störungsreihe wurde dieser Ansatz jedoch nicht weiterverfolgt, und bis zu Beginn der 90er Jahre wurden kaum weitere Arbeiten auf diesem Gebiet veröffentlicht. Die Entwicklung der nichtkommutativen Geometrie als Studium der Algebra von Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit bezüglich eines deformierten Produktes in der Mathematik und vor allem die Entdeckung, daß nichtkommutative Feldtheorien einen natürlicher Limes von Stringtheorien darstellen, erweckten in den 90er Jahren das Interesse an dieser Klasse von Theorien neu, so daß es mittlerweile eine Fülle von Publikationen zu diesem Thema gibt.

Die Einführung eines deformierten Produktes hat weitreichende Konsequenzen für die Konstruktion von Eichtheorien in einer derart deformierten Algebra, und die Versuche, diese Schwierigkeiten zu umgehen, haben zu einer Reihe von möglichen Erweiterungen des Standardmodells geführt. Für die experimentelle Überprüfung dieser Theorien vielleicht am interessantesten ist die Möglichkeit, durch die Einführung eines nichtverschwindenden Kommutators der Raum-Zeit-Koordinaten die Lorentzinvarianz der Theorie auf einer (hohen) Skala zu brechen. Dies führt beispielsweise zu einer im Standardmodell nicht auftretenden Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Azimutalwinkel, welche im Experiment ein wesentlicher Hinweis auf eine derartige Theorie wäre.

Um die am LHC gesammelten Daten zu analysieren ist es notwendig, aus den verschiedenen möglichen Erweiterungen des Standardmodells experimentell überprüfbare Vorhersagen abzuleiten, anhand derer Modelle falsifiziert werden können. Die vorliegende Arbeit reiht sich in die unter anderem in [2, 3, 4] unternommenen Anstrengungen ein, aus der in [5] vorgeschlagenen nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells phänomenologische Vorhersagen für verschiedene Colliderexperimente zu gewinnen. Dazu wird die Produktion von W -Bosonen in Proton-Proton-Kollisionen am LHC untersucht. Die Untersuchung der Produktion polarisierter Z -Bosonen und Photonen in [4] hat gezeigt, daß der Versuch, die Polarisation der produzierten Bosonen mit der Messung der Azimutalwinkelverteilung als Observable zu kombinieren möglicherweise deutlich bessere Aussichten als die Produktion unpolarisierter Endzustände bietet, eine von der nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells verursachte Abweichung des Wirkungsquerschnitts auflösen zu können. Die Winkelverteilung der beim Zerfall der W -Bosonen produzierten Fermionen hat eine charakteristische, von der Polarisation des zerfallenden Bosons abhängige Struktur, die es erlaubt, aus der Winkelverteilung der produzierten Fermionen den Wirkungsquerschnitt für die Produktion polarisierter W -Bosonen zu rekonstruieren. In dieser Arbeit wird daher versucht, auf diese Art und Weise Observablen zu konstruieren, die es erlauben, am LHC eine eventuelle Nichtkommutativität der Raumzeit (in dem in [5] vorgeschlagenen Modell) auf einer Skala < 1 TeV zu überprüfen.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird kurz die Konstruktion der „nichtkommutativen Raumzeit“ bzw. des deformierten Produktes sowie die Formulierung von Eichtheorien auf dieser Struktur mithilfe der Seiberg-Witten-Abbildungen vorgestellt. Das zweite Kapitel beginnt mit einer kurzen Wiederholung des Standardmodells und zeigt dann die Konstruktion des nichtkommutativen Standard-

modells aus [5], wobei in dieser Arbeit vorrangig das nichtminimale nichtkommutative Standardmodell (nmNCSM) diskutiert wird. Die Gültigkeit der am Ende des zweiten Kapitels abgeleiteten Feynmanregeln wird im dritten Kapitel mithilfe der Ward-Identität überprüft, und anschließend wird der bis zur 1. Ordnung in dem Parameter der Nichtkommutativität entwickelte Wirkungsquerschnitt der W -Paarproduktion auf Partonniveau in Born'scher Näherung zuerst analytisch und dann numerisch untersucht. Im vierten Kapitel werden der Zerfall der W -Bosonen und die Rekonstruktion der Helizitäten sowie die auftretenden Hintergrunddiagramme diskutiert, und im fünften Kapitel schließlich wird der hadronische Prozess am LHC mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen untersucht. Am Ende der Arbeit findet sich im sechsten Kapitel eine kurze Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse.

Im Anhang befinden sich einige Anmerkungen zu Notation sowie zu häufig verwendeten Relationen und Eigenschaften sowie die verwendeten Parameter. Außerdem im Anhang wiedergegeben sind der analytische Ausdruck für eines der berechneten Matrixelemente, Auszüge aus dem für die numerischen Rechnungen geschriebenen Code sowie der Großteil der gewonnenen Plots und Histogramme (ein kleiner Teil ist bereits vorher in den Text eingebettet).

Kapitel 2

Nichtkommutative Eichtheorie

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird eine Einführung in die Konstruktion von Feldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit gegeben. Der zweite Abschnitt diskutiert kurz nichtabelsche Eichtheorien auf der gewöhnlichen Raumzeit; eine detaillierte Darstellung des Materials findet sich z.B. in [6] oder [7]. Im dritten Abschnitt wird das Konzept der Eichtheorien auf die nichtkommutative Raumzeit übertragen, und zur Lösung des dabei auftretenden Problems zusätzlicher Eichfelder werden im vierten Teil dieses Kapitels die Seiberg-Witten-Abbildungen eingeführt. Der fünfte Abschnitt schließt das Kapitel mit einigen Bemerkungen zur Quantisierung von nach diesem Schema konstruierten nichtkommutativen Eichtheorien. Zur Erläuterung der verwendeten Notation sei auf den Anhang, Teil A, verwiesen.

2.1 Nichtkommutative Feldtheorie

Unter einer Feldtheorie auf einer nichtkommutativen Raumzeit versteht man eine Feldtheorie, bei der die Algebra der Funktionen der Raumzeit durch eine Algebra \mathcal{A} der formalen Potenzreihen von Objekten¹ \hat{x}^μ ersetzt wird. Diese Objekte (im Folgenden als „Koordinaten“) bezeichnet müssen nicht notwendigerweise kommutieren, d.h. sie erfüllen eine Relation

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \theta^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Der Parameter Λ_{NC} hat dabei die Dimension einer Energie und wird sich in einer noch zu konstruierenden nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells als Maß für die Skala erweisen, auf der die Effekte der nichtkommutativen Struktur der Raumzeit relevant werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird oft auch anstelle der Skala Λ_{NC} der Faktor

$$\lambda = \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} \quad (2.2)$$

verwendet werden. Ist auf der Algebra \mathcal{A} eine Konjugation definiert, unter welcher die Koordinaten \hat{x}^μ hermitesch sind, so ist deren Kommutator antihermitesch, und die Komponenten des Tensors $\theta^{\mu\nu}$ sind hermitesch.

Die Komponenten des antisymmetrischen Tensors $\theta^{\mu\nu}$ sind im einfachsten Fall reelle Zahlen, können aber durchaus auch nichtriviale Potenzreihen in den nichtkommutativen Koordinaten \hat{x}^μ sein [8]. In dieser Arbeit wird der Fall eines konstanten Tensors $\theta^{\mu\nu}$ diskutiert, was auch im Falle eines komplizierteren

¹Diese Objekte lassen sich z.B. als Operatoren in einem Hilbertraum auffassen.

Kommutators als erster Term einer Entwicklung in den nichtkommutativen Koordinaten verstanden werden kann. In Analogie zum Feldstärketensor der Elektrodynamik schreibt man häufig

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

mit zwei Dreivektoren \vec{E} und \vec{B} . Da der Tensor $\theta^{\mu\nu}$ unter Lorentztransformationen als Lorentztensor transformiert, bricht diese Implementation der Nichtkommutativität explizit die Lorentzinvarianz der Theorie, was zu interessanten Effekten wie z.B. einer azimuthalen Abhängigkeit von Wirkungsquerschnitten führt.

Führt man auf dieser Algebra nun einen Ableitungsoperator und eine Integralform (welche Elemente der Algebra nach \mathbb{C} abbildet) ein, so kann man direkt auf dieser Algebra eine Wirkung definieren [9]. Ein anderer Weg besteht darin, die Elemente der Algebra \mathcal{A} auf die Algebra der Funktionen der kommutativen Minkowski-Raumzeit abzubilden und die Nichtkommutativität in einem deformierten Produkt zu implementieren. Auf diesem Weg wurde in [5] eine nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells konstruiert, welche auch in dieser Arbeit verwendet wird.

Das Problem der Abbildung von Funktionen des Minkowski-Raums in die nichtkommutative Algebra \mathcal{A} findet sich in ähnlicher Form bei der Konstruktion der Quantenmechanik aus der klassischen Hamiltonmechanik wieder: Observable, welche in der Hamiltonmechanik Funktionen von Koordinaten x_i und der dazu konjugierten Impulse p_i sind, müssen auf Funktionen der quantenmechanischen Operatoren \hat{X}_i und \hat{P}_i abgebildet werden. Versucht man nun einfach, in der Potenzreihenentwicklung der Observablen die Koordinaten und Impulse durch die ihnen zugeordneten Operatoren zu ersetzen, so ergibt sich sofort eine Ambiguität der Operatorenordnung, welche durch eine Ordnungsvorschrift beseitigt werden muß. Eine geeignete Ordnungsvorschrift ist die Weyl-Quantisierung [10]: einer Funktion des Minkowski-Raums $f(x)$ wird ein Element \hat{f} der Algebra \mathcal{A} durch die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ von $f(x)$ zugeordnet

$$\hat{f} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4k \tilde{f}(k) e^{ik^\mu \hat{x}_\mu} \quad (2.4)$$

Mit einer geeignet normierten Integralform $\int \mathbf{Tr}$ auf \mathcal{A} gilt dabei

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathbf{Tr} \hat{f} e^{-ik^\mu \hat{x}_\mu}$$

Aus dieser Abbildungsvorschrift erhält man nun das deformierte Produkt, indem man die Multiplikation zweier Elemente der Algebra \hat{f} und \hat{g} untersucht

$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{g} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4k_1 d^4k_2 \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{ik_1^\mu \hat{x}_\mu} \cdot e^{ik_2^\mu \hat{x}_\mu} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4k_1 d^4k_2 \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{i(k_1+k_2)^\mu \hat{x}_\mu} e^{-\frac{i}{2}\lambda k_1^\theta k_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei wurden die Vertauschungsrelation (2.1) und die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (B.1) verwendet; zur Notation siehe (A.1). Indem man (2.5) wieder in die Algebra der Funktionen auf dem Minkowski-Raum abbildet, erhält man mit der Notation (A.3) das deformierte Produkt, welches im Folgenden mit einem Stern \star bezeichnet wird

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4k_1 d^4k_2 \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{i(k_1+k_2)^\mu x_\mu} e^{-\frac{i}{2}\lambda k_1^\theta k_2} = \\ &= f(x) e^{\frac{i}{2}\lambda \overleftarrow{\partial} \theta \overrightarrow{\partial}} g(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dieses deformierte Produkt wird auch als Moyal-Weyl-Sternprodukt bezeichnet. Man kann sich leicht davon überzeugen daß es sowohl assoziativ als auch distributiv ist. Durch partielle Integration kann man außerdem zeigen, daß das Integral über das Sternprodukt zweier Funktion gleich dem Integral über das gewöhnliche Produkt ist

$$\int d^4x f(x) \star g(x) = \int d^4x f(x)g(x) \quad (2.7)$$

Damit ist das Integral über ein Sternprodukt von Funktion zyklisch invariant

$$\int d^4x f(x) \star g(x) \star h(x) = \int d^4x h(x) \star f(x) \star g(x)$$

Eine Feldtheorie auf der nichtkommutativen Algebra \mathcal{A} ist also äquivalent zu einer Feldtheorie auf der gewöhnlichen Raumzeit, bei der das gewöhnliche Produkt zwischen Feldern durch das Sternprodukt (2.6) ersetzt ist. Es muß jedoch angemerkt werden, da diese Korrespondenz genau wie das Sternprodukt nicht eindeutig ist; eine andere Wahl der Operatorenordnung hätte ein anderes Sternprodukt ergeben.

2.2 Eichtheorien

Ausgangspunkt einer Eichtheorie ist eine Feldtheorie, deren Freiheitsgrade ein Satz von n Feldern $\phi_i(x)$ sind, welche im Folgenden zu einem einzigen Vektor

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

zusammengefaßt werden. Die Feldtheorie werde durch eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$ beschrieben, die invariant unter linearen, unitären (oder orthogonalen) Transformationen U sei, welche eine Darstellung einer Lie-Gruppe \mathbb{G} bilden

$$\mathcal{L}(U\phi, \partial^\mu U\phi) = \mathcal{L}(U_{ij}\phi_j, U_{ij}\partial^\mu \phi_j) = \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$$

Da \mathbb{G} eine Lie-Gruppe ist, existiert ein Satz von $n \times n$ -Matrizen T_i , so daß jedes Element der Darstellung U durch das Exponential

$$U = e^{i\tau_i T_i} \quad (2.9)$$

mit einem eindeutigen Satz von reellen Parametern τ_i dargestellt werden kann. Wählt man die Parameter τ_i infinitesimal, so durchläuft ϕ also eine infinitesimale Transformation:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \delta_\tau \phi(x) \quad \delta_\tau \phi(x) = i\tau_i T_i \phi(x)$$

Die Generatoren T_i der Gruppe \mathbb{G} bilden bezüglich des Kommutators zweier Erzeugenden eine Lie-Algebra $\mathcal{A}_\mathbb{G}$

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k \quad (2.10)$$

Die Strukturkonstanten f_{ijk} sind reell, antisymmetrisch bezüglich der ersten beiden Indizes und ergeben sich alleine aus dem Kompositionsgesetz der Gruppe, übertragen auf den Parameterraum.

Dieser Sachverhalt läßt sich auch umkehren: betrachtet man die Exponentiale von Elementen aus $\mathcal{A}_\mathbb{G}$ (2.9), so bilden diese bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe, da die Schachtelkommutatoren in der Baker-Hausdorff-Formel (B.1) stets wiederum Elemente der Lie-Algebra $\mathcal{A}_\mathbb{G}$ sind.

Um aus dieser Feldtheorie nun eine Eichtheorie zu konstruieren, fordert man nicht nur die Invarianz der Lagrangedichte unter globalen (d.h. raumzeitunabhängigen) Transformationen, sondern auch unter der Gruppe der lokalen Transformationen $U(x)$. Diese sind als Exponentiale derselben Lie-Algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$ definiert, jetzt allerdings mit raumzeitabhängigen Parametern $\tau(x)_i$

$$U(x) = e^{i\tau_i(x)T_i}$$

Da die Ableitung nicht mit der Transformation $U(x)$ vertauscht

$$\partial^\mu(U(x)\phi(x)) = U(x)\partial^\mu\phi(x) + (\partial^\mu U(x))\phi(x)$$

wird die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi)$ im Allgemeinen nicht invariant unter den lokalen Transformationen sein. Um das Transformationsverhalten zu reparieren, führt man daher ein $n \times n$ -matrixwertiges Vektorfeld $A^\mu(x)$ mit dem Transformationsverhalten

$$A^\mu(x) \longrightarrow U(x) \left(A^\mu(x) + \frac{i}{e} \partial^\mu \right) U(x)^\dagger \quad (2.11)$$

mit einer dimensionslosen Kopplungskonstanten e ein. Man kann leicht nachprüfen, daß die kovariante Ableitung

$$D^\mu\phi(x) = (\partial^\mu - ieA^\mu(x))\phi(x)$$

unter den lokalen Transformationen von $\phi(x)$ und $A^\mu(x)$, die Eichtransformationen genannt werden, kovariant transformiert

$$D^\mu \longrightarrow U(x)D^\mu U(x)^\dagger \quad D^\mu\phi(x) \longrightarrow U(x)D^\mu\phi(x)$$

Also ist die modifizierte Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, D^\mu\phi)$ invariant unter Eichtransformationen.

Betrachtet man (2.11) und verwendet die Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln (B.2) und (B.3), so erkennt man, daß es genügt, $A^\mu(x)$ als Element der Lie-Algebra zu wählen:

$$A^\mu(x) = A_i^\mu(x)T_i$$

Hat die Gruppe \mathbb{G} einen m -dimensionalen Parameterraum, so beschreibt die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, D^\mu\phi)$ also zusätzlich zu der Dynamik der $\phi_i(x)$ und deren Kopplungen untereinander noch die Kopplung der Felder an einen Satz von m Vektorfeldern $A_i^\mu(x)$. Für diese Eichfelder bedeutet die Transformation (2.11) eine infinitesimale Transformation der Gestalt

$$\delta_\tau A_i^\mu(x) = \frac{1}{e} \partial^\mu \tau_i(x) - f_{jki} \tau_j(x) A_k^\mu(x)$$

bzw. für das Gesamteichfeld²

$$\delta_\tau A^\mu(x) = \frac{1}{e} D^\mu \tau(x)$$

mit der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung

$$D^\mu \tau(x) = \partial^\mu \tau(x) - ie [A^\mu(x), \tau(x)]$$

Um nun eine vollständige, eichinvariante Theorie der Felder $\phi_i(x)$ und $A_i^\mu(x)$ zu konstruieren ist es nötig, einen eichinvarianten kinetischen Term zu der Lagrangedichte zu addieren, welcher quadratisch in der Ableitung der Eichfelder ist und somit die Dynamik der $A_i^\mu(x)$ beschreibt. Offensichtlich ist der Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{e} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) - ie [A^\mu(x), A^\nu(x)]$$

²Im Weiteren bezeichnet der Parameter τ ohne Generatorindex das Element der Lie-Algebra $\tau = \tau_i T_i$.

ein Objekt mit kovariantem Transformationsverhalten

$$F^{\mu\nu}(x) \longrightarrow U(x)F^{\mu\nu}(x)U(x)^\dagger$$

Da die Spur über ein Produkt von Matrizen zyklisch ist, ist der Term³

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{2}\text{Tr} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

eichinvariant. Zerfällt die Lie-Algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$ in miteinander kommutierende, einfache und kompakte Untereralgebren sowie $\mathbf{U}(1)$ Untereralgebren, so ist es immer möglich, die Generatoren so zu wählen, daß gilt

$$\text{Tr} T_i T_j = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (2.13)$$

(für einen Beweis siehe z.B. [6]). Alle für diese Arbeit relevanten Eichgruppen, besitzen diese Eigenschaften, so daß wir im Folgenden die Spur als nach (2.13) normiert annehmen können⁴. Integriert man partiell, so schreibt sich $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Eich}} &= \text{Tr} \left(A^\mu (g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) A^\nu + 2ie\partial^\mu A^\nu [A_\mu, A_\nu] + \frac{e^2}{2} [A^\mu, A^\nu] [A_\mu, A_\nu] \right) = \\ &= \frac{1}{2}A_i^\mu (g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) A_i^\nu - ef_{ijk}\partial^\mu A_i^\nu A_{j\mu}A_{k\nu} - \frac{e^2}{4}f_{ijk}f_{klm}A_i^\mu A_j^\nu A_{l\mu}A_{m\nu} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Faßt man nun die ursprüngliche Lagrangedichte und $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ zu einer neuen Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi, A, \partial^\mu A) = \mathcal{L}(\phi, D^\mu\phi) + \mathcal{L}_{\text{Eich}}(A, \partial^\mu A)$$

zusammen, so beschreibt diese eine Theorie, welche invariant unter Eichtransformationen ist und deren dynamische Variablen sowohl die ϕ_i als auch die A_i^μ sind. Zusätzlich zu den ursprünglichen Kopplungen der ϕ_i untereinander enthält diese Theorie auch Kopplungen der ϕ_i an die Eichfelder sowie Kopplungen von drei bzw. vier Eichfeldern untereinander. Die Stärke der Kopplung wird durch den Parameter e bestimmt. Ist die Eichgruppe \mathbb{G} abelsch, so spricht man von einer abelschen Eichtheorie, anderenfalls von einer Yang-Mills-Eichtheorie. Da die Kopplungsterme der A_i^μ untereinander immer einen Kommutator von Generatoren enthalten, treten diese Selbstkopplungen nur in Yang-Mills-Theorien auf.

Für die Konstruktion des Eichsektors $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ der Theorie kann im Allgemeinen eine andere Darstellung der Lie-Algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$ gewählt werden als diejenige, unter der die Materiefelder transformieren. Als einzig notwendige Forderung müssen auch in der für den Eichsektor gewählten Darstellung die Strukturkonstanten (2.10) dieselben sowie die Spur nach (2.13) normiert sein. Diese Freiheit wird bei der Konstruktion des nichtkommutativen Standardmodells eine wesentliche Rolle spielen.

2.3 Eichtheorien auf der nichtkommutativen Raumzeit

Als einen naiven Ansatz zur Konstruktion einer Eichtheorie auf der nichtkommutativen Raumzeit kann man versuchen, die Konstruktion des vorherigen Abschnitts zu wiederholen und lediglich sämtliche Produkte von Feldern durch das Sternprodukt (2.6) zu ersetzen.

Betrachten wir z.B. einen Satz von n wechselwirkenden, komplexen skalaren Feldern ϕ_i , welche wieder zu einem Vektor (2.8) zusammengefaßt sind. Die Lagrangedichte dieser Theorie

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\eta}{2}(\phi^\dagger\phi)^2$$

³Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Raumzeitabhängigkeit von Feldern im Folgenden weggelassen, falls dadurch keine Mißverständnisse entstehen.

⁴Aus (2.13) folgt auch die Antisymmetrie von f_{ijk} bezüglich aller drei Indizes.

ist symmetrisch unter globalen $\mathrm{SU}(n)$ -Transformationen. Geht man nun von der Algebra von Funktionen der Raumzeit über zu der nichtkommutativen Algebra \mathcal{A} bzw. ersetzt alle Produkte durch Sternprodukte, so erhält man die Lagrangedichte

$$\hat{\mathcal{L}}_{\phi^4} = (\partial^\mu \hat{\phi})^\dagger \star (\partial_\mu \hat{\phi}) - m^2 \hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi} - \frac{\eta}{2} (\hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi}) \star (\hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi})$$

Auch $\hat{\mathcal{L}}_{\phi^4}$ ist nach wie vor invariant unter globalen $\mathrm{SU}(n)$ -Transformationen (2.9).

Um aus der globalen Symmetrie eine Eichsymmetrie zu konstruieren, ersetzt man wieder die globalen Parameter durch lokale Parameter. Das Produkt zweier Exponentiale von Elementen aus der lokalen Lie-Algebra $\hat{\mathcal{A}}_{\mathbb{G}}(x)$ ist nun mit (B.1)⁵

$$\exp_\star(i\hat{\tau}(x)) \star \exp_\star(i\hat{\zeta}(x)) = \exp_\star\left(i\hat{\tau}(x) + i\hat{\zeta}(x) - \frac{1}{2} [\hat{\tau}(x) \star \hat{\zeta}(x)] + \dots\right) \quad (2.15)$$

Für den Moyal-Weyl-Kommutator gilt

$$[\hat{\tau}_i(x)T_i \star \hat{\zeta}_j(x)T_j] = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\tau}_i(x) \star \hat{\zeta}_j(x) \right\} [T_i, T_j] + \frac{1}{2} [\hat{\tau}_i(x) \star \hat{\zeta}_j(x)] \{T_i, T_j\}$$

Da aber der Antikommutator im Allgemeinen nicht in der Lie-Algebra schließt, ist das Produkt (2.15) im Allgemeinen kein Exponential eines Elementes der lokalen Lie-Algebra. Also ist die Menge der lokalen $\mathrm{SU}(n)$ -Transformationen nicht abgeschlossen bzgl. der Komposition und besitzt somit keine Gruppenstruktur.

Um eine Eichgruppe zu konstruieren ist es also nötig, die Lie-Algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{G}}$ zur einhüllenden Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{G}}$ zu erweitern, welche auch die Antikommutatoren von Elementen der Algebra beinhaltet. Die Elemente der Menge

$$\hat{\mathbb{G}}(x) = \left\{ e_\star^{i\hat{\tau}(x)} \mid \hat{\tau}(x) \in \hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{G}}(x), \hat{\tau}(x)^\dagger = \hat{\tau}(x) \right\}$$

bilden eine Gruppe unitärer Transformationen, welche die Exponentiale der Elemente aus $\hat{\mathcal{A}}(x)$ enthält⁶. Aufgrund der Unitarität lassen diese Transformationen das Produkt $\hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi}$ invariant. Diese Symmetrie kann nun wiederum durch die Einführung einer kovarianten Ableitung

$$\hat{D}^\mu \star \hat{\phi} = \partial^\mu \hat{\phi} - ie\hat{A}^\mu \star \hat{\phi}$$

zu einer Eichsymmetrie der gesamten Lagrangedichte erweitert werden. Einen eichinvarianten kinetischen Term für das Eichfeld \hat{A}^μ erhält man wieder mit

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Eich}} = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} \quad \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{i}{e} [\hat{D}^\mu \star \hat{D}^\nu]$$

Da das Eichfeld nun gemäß

$$\hat{A}^\mu(x) \longrightarrow \hat{U}(x) \star \left(\hat{A}^\mu(x) + \frac{i}{e} \partial^\mu \right) \star \hat{U}(x)^\dagger$$

bzw. infinitesimal

$$\delta_{\hat{\tau}} \hat{A}^\mu(x) = \frac{1}{e} \partial^\mu \hat{\tau}(x) - i \left[\hat{A}^\mu(x) \star \hat{\tau}(x) \right] = \frac{1}{2} \hat{D}^\mu \star \hat{\tau}(x)$$

⁵Das Sternexponential $\exp_\star(\hat{f})$ bzw. $e_\star^{\hat{f}}$ bezeichnet die Exponentialfunktion, in deren Potenzreihe alle Produkte durch Sternprodukte ersetzt sind.

⁶Eine sorgfältigere Konstruktion der nichtkommutativen Eichgruppe findet sich in [11, 12].

transformiert, muß auch \hat{A}^μ ein Element der einhüllenden Algebra sein. Allerdings ist es möglich, \hat{A}^μ hermitesch zu wählen. Die Zahl der Basiselemente, die nötig ist, um \mathcal{H}_G aufzuspinnen, ist von der Darstellung abhängig und im Allgemeinen deutlich größer als die Zahl der ursprünglichen Generatoren, und somit enthält die so konstruierte nichtkommutative Eichtheorie mehr Freiheitsgrade als die entsprechende Eichtheorie auf der kommutativen Raumzeit.

Eine interessante Folge dieses Problems zeigt sich bei dem Versuch, eine nichtkommutative Version der Quantenelektrodynamik zu konstruieren: will man das Photon der Theorie an n unterschiedliche Materiefelder $\hat{\Psi}_i$ mit unterschiedlichen Ladungen q_i koppeln, so muß man einen Ladungsoperator

$$Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$$

eingeführen, welcher die $U(1)$ -Transformationen der (wieder zu einem Vektor zusammengefaßten Felder) erzeugt und eine (triviale) Lie-Algebra \mathcal{A}_Q aufspannt. Damit liegt aber das Photonfeld \hat{A}^μ der nichtkommutativen Theorie in der einhüllenden Algebra von \mathcal{A}_Q , welche alle Polynome in Q enthält. Falls die Ladungen paarweise verschieden sind, erhält man so n unabhängige Photonfelder!

Das so durch die nichtkommutative Struktur der Raumzeit hervorgerufene Problem der Eichfreiheitsgrade macht die Konstruktion einer nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells durch einfaches Ersetzen von Produkten durch Sternprodukte unmöglich. In den letzten Jahren sind zwei mögliche Auswege vorgeschlagen worden: in [12] konstruieren Chaichian et al. eine nichtkommutative Version des Standardmodells, indem sie mit einer $U(3) \times U(2) \times U(1)$ -Symmetrie beginnen (in der fundamentalen Darstellung der $U(n)$ schließt der Antikommutator in der Lie-Algebra) und die überzähligen Symmetrien mit zwei „Higgsac“-Feldern brechen. Auf diese Art und Weise erhält man eine Theorie, welche zusätzlich zu den Freiheitsgraden des Standardmodells zwei weitere massive Vektorfelder beinhaltet. Der zweite Weg eliminiert die zusätzlichen Freiheitsgrade mithilfe der sog. Seiberg-Witten-Abbildungen, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden und die Grundlage der in dieser Arbeit verwendeten Variante des nichtkommutativen Standardmodells sind.

2.4 Die Seiberg-Witten-Abbildung

1999 demonstrierten Seiberg und Witten in [13], daß gewisse Stringtheorien durch unterschiedliche Wahl der Regularisierung im Limes niedriger Energien sowohl eine kommutative als auch eine nichtkommutative Feldtheorie ergeben können. Daraus schlossen sie, daß es eine Abbildung geben muß, welche die Felder und Eichtransformationen der kommutativen Eichtheorie unter Erhaltung der Eichgruppe auf ihre entsprechenden nichtkommutativen Gegenstücke abbildet — die sog. Seiberg-Witten-Abbildung.

Zunächst wollen wir lediglich die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichfeldes und des Eichparameters untersuchen. Diese muß eine Abbildung der lokalen Lie-Algebra in die lokale einhüllende Algebra sein

$$\tau \longrightarrow \hat{\tau}(\tau, A) \quad A^\mu \longrightarrow \hat{A}^\mu(A)$$

und sicherstellen, daß die zum Eichparameter $\hat{\tau}$ gehörende Eichtransformation das nichtkommutative Eichfeld $\hat{A}^\mu(A)$ auf

$$\hat{A}^\mu(A) \xrightarrow{\hat{\tau}(\tau, A)} \hat{A}_\tau^\mu = \hat{A}^\mu(A_\tau) \tag{2.16}$$

abbildet. Außerdem muß die Seiberg-Witten-Abbildung das Kompositionsgesetz der Eichtransformationen erhalten. Diese Eichäquivalenz ist der Grund für die Abhängigkeit des nichtkommutativen Eichparameters $\hat{\tau}$ von A^μ ; anderenfalls würde der Erhalt des Kompositionsgesetzes einen Gruppenisomorphismus bedingen. Da aber bereits die von einer abelschen Lie-Algebra erzeugten Eichtransformationen auf der nichtkommutativen Raumzeit nicht vertauschen, kann ein Isomorphismus (2.16) nicht gewährleisten. Im Folgenden wird die Seiberg-Witten-Abbildung eines Eichparameters $\tau(x)$ sowohl durch $\hat{\tau}$

als auch durch $\hat{\Lambda}(\tau)$ bezeichnet und die explizite Abhängigkeit vom Eichfeld zur besseren Lesbarkeit unterdrückt. Ebenfalls wird die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichfelds A^μ als \hat{A}^μ geschrieben und die Kopplungskonstante e in das Eichfeld absorbiert.

Die Abgeschlossenheit einer Lie-Gruppe unter der Komposition von Transformationen impliziert, daß der Kommutator zweier infinitesimaler Transformationen mit Parametern α und β wieder eine infinitesimale Transformation ist

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = \delta_{\alpha \times \beta} \quad (2.17)$$

Betrachtet man die Transformation des Eichfeldes, so folgt mit der Jacobi-Identität (B.4)

$$(\delta_\alpha \delta_\beta - \delta_\beta \delta_\alpha) A^\mu = \frac{1}{e} \partial^\mu i [\beta, \alpha] - i [A^\mu, i [\beta, \alpha]]$$

also

$$\alpha \times \beta = -i [\alpha, \beta]$$

Da (2.17) auch für die nichtkommutative Eichgruppe gelten muß, folgt aufgrund des Erhalts der Gruppenstruktur durch die Seiberg-Witten-Abbildung

$$[\delta_{\hat{\alpha}}, \delta_{\hat{\beta}}] = \delta_{\hat{\Lambda}(\alpha \times \beta)}$$

Wendet man die infinitesimalen Transformationen auf das Eichfeld an und berücksichtigt die Abhängigkeit der Seiberg-Witten-Abbildung vom Eichfeld, so erhält man

$$\partial^\mu \left(i [\hat{\beta} \star \hat{\alpha}] + \delta_\alpha \hat{\beta} - \delta_\beta \hat{\alpha} \right) - i \left[\hat{A} \star i [\hat{\beta} \star \hat{\alpha}] + \delta_\alpha \hat{\beta} - \delta_\beta \hat{\alpha} \right] = \partial^\mu \hat{\Lambda}(\alpha \times \beta) - i \left[\hat{A} \star \hat{\Lambda}(\alpha \times \beta) \right]$$

Daraus folgt eine Gleichung für die Seiberg-Witten-Abbildung des Eichparameters

$$[\hat{\alpha} \star \hat{\beta}] + i \delta_\alpha \hat{\beta} - i \delta_\beta \hat{\alpha} = i \hat{\Lambda}(\alpha \times \beta) \quad (2.18)$$

Um (2.18) zu lösen, entwickelt man $\hat{\Lambda}(\alpha)$ sowie das Sternprodukt in Ordnungen von λ

$$\hat{\Lambda}(\tau, A) = \Lambda_0(\tau) + \lambda \Lambda_1(\tau) + \dots \quad (2.19)$$

Da im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ die Seiberg-Witten-Abbildung τ auf sich selbst abbilden muß, folgt sofort

$$\Lambda_0(\tau) = \tau$$

Dies ist der Anfang einer Rekursion, mit der sich (2.18) in allen Ordnungen von λ lösen läßt. In erster Ordnung λ folgt aus (2.18) und (2.6)

$$[\Lambda_1(\alpha), \beta] + [\alpha, \Lambda_1(\beta)] + i \delta_\alpha \Lambda_1(\beta) - i \delta_\beta \Lambda_1(\alpha) - i \Lambda_1(\alpha \times \beta) = -\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \alpha, \partial_\nu \beta \} \quad (2.20)$$

Die linke Seite von (2.20) ist linear in Λ_1 ist, die rechte dagegen davon unabhängig. Also erhält man aus jeder Lösung der kompletten Gleichung weitere Lösungen durch Addition der Lösungen einer homogenen Gleichung, bei der rechte Seite durch Null ersetzt ist. Dies zeigt, daß die Seiberg-Witten-Abbildung nicht eindeutig ist. In [14] wurde von Asakawa et al. gezeigt, daß solche Ambiguitäten in jeder Ordnung der Entwicklung von (2.18) auftreten und die Lösungen sich durch Eichtransformationen und Feldredefinitionen unterscheiden. Bichl et al. zeigten in [15] unter Zuhilfenahme dieser Freiheiten die Renormierbarkeit der nichtkommutativen Photonselbstenergie in allen Ordnungen von λ , was die

⁷siehe (2.1) bzw. (2.2)

Auswahl einer speziellen Klasse von Seiberg-Witten-Abbildungen durch zusätzliche Forderungen wie Renormierbarkeit oder Unitarität an die Theorie möglich erscheinen läßt. Die hier verwendeten Lösungen entsprechen den in [5] zur Konstruktion des NCSM verwendeten Lösungen. Diese sind so gewählt, daß die Hermitizität des Eichfeldes gewährleistet bleibt [16].

Aus (2.18) und der Linearität der infinitesimalen Transformation von A^μ in τ folgt die Linearität von $\hat{\Lambda}(\tau, A)$ in τ . Aus dimensionalen Gründen gibt es in jeder Ordnung von λ nur endlich viele Kombinationen von ∂^μ , $\theta^{\mu\nu}$, τ und A^μ , die in $\hat{\Lambda}_n(\tau, A)$ auftreten können, und durch Koeffizientenvergleich lassen sich so (wenn auch mühsam) Lösungen von (2.18) finden. Die in dieser Arbeit verwendete Lösung der gesamten Gleichung ist

$$\Lambda_1(\tau) = \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu} \{\partial_\mu\tau, A_\nu\} \quad (2.21)$$

In [14] wurde ein Algorithmus zur Konstruktion homogener Lösungen in jeder Ordnung von λ angegeben; eine mögliche homogene Lösung ist

$$\Lambda_1^0(\tau) = \theta^{\mu\nu} [\partial_\mu\tau, A_\nu]$$

Um die Seiberg-Witten-Abbildung für Eich- und Materiefelder zu konstruieren, entwickelt man auch diese in λ , wobei der erste Term der Entwicklung wieder gleich dem kommutativen Feld selbst sein muß, um den korrekten Limes $\lambda \rightarrow 0$ zu gewährleisten⁸

$$\hat{A}^\mu = A^\mu + \lambda A_1^\mu + \dots \quad \hat{\Psi} = \Psi + \lambda \Psi_1 + \dots \quad (2.22)$$

Die infinitesimale Form der Eichäquivalenzbedingung lautet für Eich- und Materiefeld

$$\begin{aligned} \delta_{\hat{\tau}} \hat{A}^\mu &= \partial^\mu \hat{\tau} - i \left[\hat{A}^\mu \star \hat{\tau} \right] = \delta_\tau \hat{A}^\mu \\ \delta_{\hat{\tau}} \hat{\Psi} &= i \hat{\tau} \star \hat{\Psi} = \delta_\tau \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entwickelt man das Sternprodukt und setzt die Entwicklungen (2.22) sowie die Entwicklung (2.19) in die Eichäquivalenzbedingungen ein, so läßt sich die resultierende Gleichung mit der vorher bestimmten Entwicklung von $\hat{\tau}$ in jeder Ordnung von λ rekursiv lösen. Mit der Lösung (2.21) erhält man in 1. Ordnung λ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4} (\{\partial_\rho\tau, F^\mu_\sigma - \partial_\sigma A^\mu\} + i \{[\partial_\rho\tau, A^\mu], A_\sigma\} + \{\partial^\mu\partial_\rho\tau, A_\sigma\}) &= \delta_\tau A_1^\mu - i [\tau, A_1^\mu] \\ \frac{i}{4}\theta^{\mu\nu} \{\partial_\mu\tau, A_\nu\} \Psi - \frac{\theta^{\mu\nu}}{2}\partial_\mu\tau\partial_\nu\Psi &= \delta_\tau \Psi_1 - i\tau\Psi_1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Auch in den Entwicklungen von \hat{A}^μ und $\hat{\Psi}$ gibt es in jeder Ordnung n von λ nur endlich viele mögliche Terme, und durch Koeffizientenvergleich erhält man Lösungen von (2.24) für A_1^μ sowie Ψ_1

$$A_1^\mu = -\frac{\theta^{\rho\sigma}}{4} \{A_\rho, \partial_\sigma A^\mu + F_\sigma^\mu\} \quad (2.25)$$

$$\Psi_1 = \frac{\theta^{\mu\nu}}{4} (iA_\mu A_\nu \Psi - 2A_\mu \partial_\nu \Psi) \quad (2.26)$$

Aus (2.25) ergibt sich für den (ebenfalls in Ordnungen von λ) entwickelten Feldstärketensor der Ausdruck

$$\begin{aligned} \hat{F}^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} + \lambda F_1^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\lambda^2) = \\ &= F^{\mu\nu} + \lambda \left(\frac{\theta^{\rho\sigma}}{2} \{F^\mu_\rho, F^\nu_\sigma\} - \frac{\theta^{\rho\sigma}}{4} \{A_\rho, (\partial_\sigma + D_\sigma) F^{\mu\nu}\} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

⁸Die Seiberg-Witten-Abbildung des Materiefelds Ψ wird ebenfalls unter Unterdrückung der expliziten Abhängigkeit von A^μ und Ψ als $\tilde{\Psi}$ geschrieben.

Auf diese Art und Weise können rekursiv Seiberg-Witten-Abbildungen bis zu beliebiger Ordnung in λ gewonnen werden. Die Seiberg-Witten-Abbildungen erlauben eine elegante Lösung des Problems der überzähligen Freiheitsgrade aus dem letzten Abschnitt: nach der Konstruktion einer nichtkommutativen Eichtheorie werden die nichtkommutativen Felder auf kommutative Felder mit der richtigen Anzahl von Freiheitsgraden abgebildet. Die Eichinvarianz der nichtkommutativen Wirkung und der Erhalt der Eichgruppe durch die Seiberg-Witten-Abbildungen garantieren dabei die Invarianz der Theorie unter „herkömmlichen“ Eichtransformationen in jeder Ordnung λ . Der oben gezeigt Algorithmus kann verwendet werden, um sich weitere Ordnungen der Seiberg-Witten-Abbildung zu verschaffen. Da aufgrund der bisherigen experimentellen Daten die Skala Λ_{NC} höher als der gegenwärtigen Beschleunigern zugängliche Bereich sein muß, nehmen wir in dieser Arbeit λ als sehr klein an und brechen die Entwicklung nach der 1. Ordnung ab.

Anstelle der Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung in λ ist es auch möglich, die Abbildung in Potenzen des Eichfelds zu entwickeln. Hierfür wurde von Barnich et al. in [17] ein rekursiver Algorithmus angegeben mit welchem in [18] die Seiberg-Witten-Abbildung bis zur 3. Potenz der Eichfelder berechnet wurde.

2.5 Quantisierung

Mit den in diesem Kapitel entwickelten Werkzeugen ist es nun möglich, eine klassische Feldtheorie auf der nichtkommutativen Raumzeit zu definieren. Ein ersthaftes Problem bei der Quantisierung einer so konstruierten Theorie stellt allerdings die Nichtlokalität des Moyal-Weyl-Sternproduktes (2.6) dar, welches beliebig viele Zeitableitungen der Felder enthält. Als Resultat ergeben unterschiedliche Quantisierungsschemata nicht mehr äquivalente Formulierungen der Theorie (siehe z.B. [19]). Weitere Konsequenzen sind Probleme mit der Unitarität der Theorie sowie Verletzungen der Ward-Identität, welche erfüllt sein muß, um unphysikalische Felder von der Theorie zu entkoppeln [20, 21].

Entwickelt man jedoch die Lagrangedichte der Theorie in Potenzen von λ und bricht die Entwicklung in einer endlichen Ordnung ab, so treten in der Lagrangedichte nur Zeitableitungen endlicher Ordnung auf. Behandelt man die so konstruierte Lagrangedichte als effektive Feldtheorie, so läßt sich die Quantisierung ohne die oben beschriebenen Probleme ausführen (siehe [22]). In dieser Arbeit wird die Entwicklung nach der 1. Ordnung abgebrochen.

Betrachten wir die Quantisierung einer mit den Methoden dieses Kapitels konstruierten nichtkommutativen $SU(n)$ Yang-Mills-Theorie, welche die Kopplung von n zu einem Vektor $\hat{\Psi}$ zusammengefaßten massiven Fermionfeldern an $n^2 - 1$ Vektorfelder beschreibt. Die Wirkung dieser Theorie ist

$$S = \int d^4x \hat{\mathcal{L}}_{kl} = \int d^4x \left(i \hat{\Psi} \star \hat{D} \star \hat{\Psi} - m \hat{\Psi} \star \hat{\Psi} - \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} \right)$$

Alle nichtkommutativen Felder seien dabei als mithilfe der Seiberg-Witten-Abbildung durch ihre nichtkommutativen Gegenstücke ausgedrückt verstanden, so daß diese Theorie die korrekte Zahl von Freiheitsgraden besitzt. Außerdem sei die Lagrangedichte in λ entwickelt und die Entwicklung in einer endlichen Ordnung abgebrochen, um die eingangs erwähnten Probleme zu vermeiden. Aufgrund von (2.7) (welche in jeder Ordnung von λ gilt) kann in allen bilinearen Termen das Sternprodukt durch das herkömmliche Produkt ersetzt werden, und da die Seiberg-Witten-Abbildung in jeder von Null verschiedenen Ordnung von λ nichtlinear in den Feldern ist, ist der bilineare Teil dieser Wirkung derselbe wie im kommutativen Fall. Daher ist der freie Anteil der Theorie derselbe, und nichtkommutative Effekte treten nur im Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte auf. Als Konsequenz werden die Propagatoren einer so konstruierten Theorie nicht durch die nichtkommutative Struktur der Raumzeit modifiziert.

Genau wie im kommutativen Fall muß die Theorie um einen Eichfixierungsterm erweitert werden, um einen Propagator für die Eichbosonen zu erhalten. Dies kann wie im kommutativen Fall im Pfad-

integral mit dem Fadeev-Popov-Verfahren realisiert werden (für Details siehe z.B. [23, 7]). Als Resultat erhält man den Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{EF}} = -\frac{1}{2\xi} \sum_i (\partial_\mu A_i^\mu)^2 = -\frac{1}{\xi} \mathbf{Tr} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

in der Lagrangedichte und als mathematische Artefakte für jeden Gruppengenerator zwei fermionische Spin-0-Felder, das Geistfeld c_i und das Antigeistfeld \bar{c}_i , welche durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = \partial_\mu \bar{c}_i (\delta_{ik} \partial^\mu + f_{ijk} A_j^\mu) c_k = 2 \mathbf{Tr} \partial_\mu \bar{c} (D^\mu c)$$

beschrieben werden. Eichfixierungs- und Geistsektor (welcher in dieser Arbeit allerdings keine Rolle spielt) können also genauso gewählt werden wie im kommutativen Fall. Da die Seiberg-Witten-Abbildungen aufgrund der Invarianz von $\hat{\mathcal{L}}_{\text{kl}}$ unter nichtkommutativen Eichtransformationen Invarianz unter herkömmlichen Eichtransformationen der Felder Ψ_i und A_i^μ in jeder Ordnung λ induzieren, kann wie im kommutativen Fall der BRST-Formalismus angewandt werden (siehe wieder [23, 7]), um das Entkoppeln von Geistern und unphysikalischen Polarisationszuständen vom physikalischen Teil des Hilbertraums sowie die Ward-Identität zu zeigen.

Die so modifizierte Lagrangedichte

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{kl}} + \mathcal{L}_{\text{EF}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}}$$

kann wie eine herkömmliche kommutative Theorie quantisiert werden und führt zu dem üblichen Eichbosonpropagator

$$iD_F^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

und dem ebenso unveränderten Fermionpropagator

$$iS_F = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Als Effekt der nichtkommutativen Struktur der Raumzeit ergeben sich aus den Seiberg-Witten-Abbildungen neue Terme im Wechselwirkungsteil der Lagrangedichte, welche zu neuen Vertizes in der Störungstheorie führen und die bereits in der nichtkommutativen Theorie vorhandenen Vertizes modifizieren.

Kapitel 3

Die nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells

In diesem Kapitel wird nach einer kurzen Wiederholung des Standardmodells dessen nichtkommutative Erweiterung konstruiert. Die Wiederholung des Standardmodells dient lediglich dem Zweck, die Konventionen festzulegen; für eine ausführliche Erläuterung sei z.B. auf [7] verwiesen.

Danach wird ein Teil der Feynmanregeln einer mithilfe des deformierten Produktes und den Seiberg-Witten-Abbildungen konstruierten, allgemeinen Yang-Mills-Theorie abgeleitet, aus welchen am Ende des Kapitels der benötigte Teil der Feynmanregeln des nmNCSM konstruiert wird (ein vollständigerer Satz von Feynmanregeln findet sich in [24]).

3.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt die Wechselwirkungen der fundamentalen Bestandteile der Materie im Rahmen einer $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichtheorie. Die fermionischen Materiefelder sind alle Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, deren Wechselwirkung durch die Eichbosonen vermittelt wird. Das einzige bosonische Materiefeld der Theorie ist das Higgs-Boson, welches einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert besitzt. Durch diese spontane Symmetriebrechung erhalten die restlichen Teilchen des Standardmodells ihre Massen.

Die Fermionen unterteilen sich (nach den Eichbosonen, an die sie koppeln) in die Leptonen (welche nur an die $SU(2) \times U(1)$ -Untergruppe der Eichgruppe koppeln) sowie in die Quarks, welche an die gesamte Eichgruppe koppeln. Außerdem unterscheidet die Kopplung an die Eichbosonen zwischen links- und rechthändigen Fermionen, welche durch Projektoren definiert sind

$$\Psi_{L/R} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \Psi = \Pi^\pm \Psi$$

Sowohl Leptonen als auch Quarks liegen in drei identischen Generationen vor, die sich lediglich durch ihre Kopplung an das Higgs-Feld (und somit ihre Masse) unterscheiden. Für jede der drei Flavorquantenzahlen gibt es zwei leptonische Fermionfelder (das Lepton — Elektron, Muon oder Tauon — selbst und das dazugehörige Neutrino) sowie zwei Quarkfelder, die je nach Position im $SU(2)$ -Isospinor als up (bzw. top und charm) sowie down (bzw. bottom oder strange) bezeichnet werden. Die Quarks tragen zudem eine zusätzliche Quantenzahl, die Farbladung c , bezüglich welcher sowohl up-artige als auch down-artige Quarks jeweils ein Triplet bilden. Quarkfelder ohne Farbindex sind ab jetzt immer als Triplet zu verstehen. Die linkshändigen Anteile der Fermionfelder werden im Folgenden zu Isospinoren

zusammengefasst

$$E_L^f = \begin{pmatrix} \nu_L^f \\ e_L^f \end{pmatrix} \quad Q^f = \begin{pmatrix} u_L^f \\ d_L^f \end{pmatrix}$$

Der Index f läuft dabei über die einzelnen Flavors. Zu allen linkshändigen Feldern treten auch die entsprechenden rechtshändigen Felder auf; die einzige Ausnahme sind die Neutrinos (da Neutrinos neutral sind und im Standardmodell im Allgemeinen als masselos angenommen werden, wären rechtshändige Neutrinos komplett von der Theorie entkoppelt und daher ohnehin nicht beobachtbar). Da Higgs- und Yukawasektor für diese Arbeit nicht relevant sind, soll hier nicht weiter auf diese eingegangen werden; die CKM-Matrix wird in dieser Arbeit als Einheitsmatrix angenommen (da sie — wie sich zeigen wird — ohnehin nur zu den Hintergrunddiagrammen und dem Zerfall der W -Bosonen beiträgt). Um die Lagrangedichte des Materiesektors kompakter schreiben zu können, fassen wir alle Fermionfelder einer Generation zu einem einzigen Vektor zusammen

$$\Psi^f = \begin{pmatrix} E_L^f \\ e_R^f \\ Q_L^f \\ u_R^f \\ d_R^f \end{pmatrix}$$

Unter den Transformationen der $\mathbf{SU}(2)$ transformieren die linkshändigen Isospinoren in der fundamentalen Darstellung mit den Generatoren

$$T_i = \frac{\sigma_i}{2}$$

(vgl. Anhang B) während die rechtshändigen Felder trivial transformieren. Sowohl links- als auch rechtshändige Felder transformieren unter einer reduziblen Darstellung der $\mathbf{U}(1)$, deren Generator Y , die sog. Hyperladung, diagonal ist. Der Darstellungsraum der $\mathbf{SU}(3)$ schließlich ist das Farbtuplett der Quarks, in welchem die Generatoren T_i^s der $\mathbf{SU}(3)$ in der fundamentalen Darstellung wirken. Mit diesen Definitionen lautet die kovariante Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu - ig\tilde{A}_i^\mu T_i - ig'B^\mu Y - ig_s G_i^\mu T_i^s = \partial^\mu - iV^\mu$$

wobei g und g' sowie g_s die Kopplungskonstanten sind, und

$$V^\mu = g\tilde{A}_i^\mu T_i + g'B^\mu Y + g_s G_i^\mu T_i^s \quad (3.1)$$

das gesamte Eichpotential der Theorie ist. Mit dieser Definition lautet die Lagrangedichte des Materiesektors

$$\mathcal{L}_{\text{Materie}}^{\text{SM}} = \sum_f i\bar{\Psi}^f \not{D}\Psi^f \quad (3.2)$$

Während die G_i^μ bereits die physikalischen Gluonfelder sind, entstehen die physikalischen W - und Z -Bosonfelder sowie das Photonfeld durch Mischung aus den \tilde{A}_i^μ und dem B^μ

$$A^\mu = \frac{g'\tilde{A}_3^\mu + gB^\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad Z^\mu = \frac{g\tilde{A}_3^\mu - g'B^\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad W^{\pm\mu} = \frac{\tilde{A}_1^\mu \pm i\tilde{A}_2^\mu}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

Damit schreibt sich das Eichpotential

$$V^\mu = g(W^{+\mu}T^+ + W^{-\mu}T^-) + eA^\mu Q + Z^\mu T^0 + G_i^\mu T_i^s$$

Feld	Y	T_3	Q
l_L	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
ν_L	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
l_R	-1	0	-1
d_L	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
u_L	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
d_R	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
u_R	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
ϕ	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Tabelle 3.1: Zuordnung von Ladungsquantenzahlen im Standardmodell

mit den Generatoren

$$\begin{aligned}
T^+ &= \frac{T_1 + iT_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & T^- &= \frac{T_1 - iT_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
Q &= T_3 + Y & T^0 &= g \cos(\theta_W) T_3 - g' \sin(\theta_W) Y
\end{aligned} \tag{3.4}$$

und dem Weinbergwinkel θ_W sowie die Elementarladung e :

$$\cos(\theta_W) := \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin(\theta_W) := \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{3.5}$$

Die Ladung der linkshändigen Fermionen ist also die Summe aus der Hyperladung und dem Eigenwert des $\mathbf{SU}(2)$ -Generators T_3 , während die Ladung der rechtshändigen Felder ausschließlich durch die Hyperladung bestimmt wird. Tab.3.1 zeigt die Zuordnung der entsprechenden Quantenzahlen im Standardmodell.

Der Eichsektor des Standardmodells ergibt sich aus der Summe der Eichsektoren der Faktoren der Eichgruppe mit (2.12) zu

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{SM}} = -\frac{1}{2} \left(\text{Tr} F_{\tilde{A}}^{\mu\nu} F_{\tilde{A}\mu\nu} + \text{Tr} F_G^{\mu\nu} F_{G\mu\nu} + \frac{1}{2} F_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} \right) \tag{3.6}$$

Man kann sich mit den Mischungen (3.3) leicht davon überzeugen, daß der Eichsektor (3.6) sowohl für das W-Bosonfeld als auch für Z- und Photonfeld die korrekten kinetischen Terme liefert und diese nicht mischt. Die in (3.6) auftretenden Kopplungsterme (vgl. (2.14)) koppeln sowohl die elektroschwachen Eichbosonen als auch die Gluonen jeweils untereinander, mischen die beiden Teile der Eichgruppe jedoch nicht.

Mit Higgs- und Yukawasektor schreibt sich die gesamte Lagrangedichte des Standardmodells als

$$\mathcal{L}^{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Materie}}^{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{SM}}$$

3.2 Die nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells

Nach der Vorarbeit des ersten Kapitels ist es nun möglich, eine nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells zu formulieren, indem man alle Produkte von Feldern durch das Moyal-Weyl-Sternprodukt

und die Felder selbst durch ihr Seiberg-Witten-Abbildungen ersetzt. Die so konstruierte Lagrangedichte enthält keine neuen Felder und geht im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ in die des Standardmodells über. Aufgrund der Eichinvarianz des Standardmodells (vor der spontanen Symmetriebrechung) ist die Lagrangedichte auch nach der Ersetzung des Produktes durch das Sternprodukt invariant unter nichtkommutativen Eichtransformationen, und die Seiberg-Witten-Abbildungen garantieren die Eichinvarianz des so konstruierten nichtkommutativen Standardmodells (NCSM) in jeder Ordnung von λ (wieder vor der spontanen Symmetriebrechung).

Der Materiesektor des NCSM entsteht aus der Lagrangedichte 3.2 durch einfache Ersetzung der Produkte durch das Sternprodukt und Einsetzen der Seiberg-Witten-Abbildungen:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{Materie}}^{\text{SM}} = i \sum_f \hat{\Psi}^f \star \hat{D} \star \hat{\Psi}^f \quad (3.7)$$

Die kovariante Ableitung ist dabei wieder

$$\hat{D}^\mu = \partial^\mu - i\hat{V}^\mu$$

mit der Seiberg-Witten-Abbildung \hat{V}^μ des Vektorpotentials (3.1). Es ist wesentlich, daß \hat{V}^μ *nicht* die Summe der Seiberg-Witten-Abbildungen der einzelnen Eichfelder ist. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß die einhüllende Algebra der Gesamteichgruppe auch Produkte von Generatoren der einzelnen Gruppenfaktoren enthält.

Die Konstruktion des nichtkommutativen Eichsektors führt zu Ambiguitäten, welche durch die Forderung, das Standardmodell im Limes $\lambda \rightarrow 0$ zu erhalten, nicht beseitigt werden. Die am Ende von Abschnitt 2.2 erwähnte Freiheit der Wahl einer Darstellung der Eichgruppe bei der Konstruktion des Eichsektors gilt auch für den nichtkommutativen Fall¹; alle Darstellungen derselben einhüllenden Algebra liefern einen eichsymmetrischen kinetischen Term. Anders als im kommutativen Fall legt die Normierung der Spur (2.13) jedoch den Eichsektor nicht eindeutig fest, da auch Spuren über Produkte von mehr als zwei Generatoren auftreten (welche von der Darstellung abhängig sind).

Eine mögliche Wahl des Eichsektors ist eine Summe dreier jeweils eichinvarianter Spuren

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{Eich}}^{\text{SM},m} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}_1 \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2g'^2} \text{Tr}_2 \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2g_s^2} \text{Tr}_3 \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

mit dem Feldstärketensor

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \hat{V}^\nu - \partial^\nu \hat{V}^\mu - i [\hat{V}^\mu \star \hat{V}^\nu]$$

Für die Spuren Tr_1 sowie Tr_3 wird dabei die fundamentale Darstellung der $\text{SU}(2)$ bzw. $\text{SU}(3)$ als Darstellung der Gesamteichgruppe gewählt (die jeweils verbleibenden Generatoren sind Null). Für die Spur Tr_2 wird eine zweidimensionale Darstellung der $\text{U}(1)$ mit dem Generator

$$T_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gewählt (die verbleibenden Generatoren sind wieder Null). Das nichtkommutative Standardmodell wird bei dieser Wahl von Spuren auch als „minimales nichtkommutatives Standardmodell“ (mNCSM) bezeichnet, da eine Reihe von möglichen nichtkommutativen Kopplungstermen verschwindet. Das mNCSM wird in dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

¹allerdings muß in allen verwendeten Darstellung dieselbe Basis der einhüllenden Algebra zur Zerlegung des Eichfelds gewählt werden, im allgemeinsten Fall z.B. die der vollständig symmetrisierten Produkte von Generatoren $\{T_i, : T_i T_j :, : T_i T_j T_k :, \dots\}$

Eine natürlichere Wahl der Darstellung der Eichgruppe ist der Vektorraum, in welchem der aus einer Fermionfamilie und dem Higgsfeld bestehende Vektor

$$\Phi^f = \begin{pmatrix} e_L^f \\ E_L^F \\ u_L^f \\ d_L^f \\ Q_L^f \\ \phi \end{pmatrix}$$

transformiert. Als eichinvariante Lagrangedichte schreibt man

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{Eich}}^{\text{SM, nm}} = -\frac{1}{2} \mathbf{Tr} G \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

Die Matrix G ist dabei ein Casimiroperator der Gesamtgruppe der Form

$$G = \mathbf{diag} (g_1, g_2 \mathbb{I}_{2 \times 2}, g_3 \mathbb{I}_{3 \times 3}, g_4 \mathbb{I}_{3 \times 3}, g_5 \mathbb{I}_{6 \times 6}, g_6 \mathbb{I}_{2 \times 2}) \quad (3.10)$$

mit den $n \times n$ -Einheitsmatrizen $\mathbb{I}_{n \times n}$ und sechs Konstanten g_1, \dots, g_6 . G vertauscht offensichtlich mit allen Generatoren in dieser Darstellung, und somit ist der kinetische Term (3.9) eichinvariant. Um im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ das Standardmodell zu erhalten, muß für die Spur über Produkte zweier Generatoren gelten

$$\mathbf{Tr} G T_i T_j = \frac{1}{2g^2} \delta_{ij} \quad \mathbf{Tr} G Y^2 = \frac{1}{2g'^2} \quad \mathbf{Tr} G T_i^s T_j^s = \frac{1}{2g_s^2} \delta_{ij} \quad (3.11)$$

Mit der Normierung der Spuren über die Generatoren in den einzelnen Komponenten des Darstellungsraumes (2.13), den Ladungen Tab.3.1 und der Darstellung von G (3.10) folgen drei Bedingungen an die g_i

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} &= g_2 + 3g_5 + g_6 \\ \frac{1}{g'^2} &= 2g_1 + g_2 + \frac{8}{3}g_3 + \frac{2}{3}g_4 + \frac{1}{3}g_5 + g_6 \\ \frac{1}{g_s^2} &= g_3 + g_4 + 2g_5 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dadurch verbleiben drei Parameter in der Theorie, die frei wählbar sind. In Anlehnung an [5, 25] werden diese durch die nichtverschwindenden Spuren über Produkte von drei Generatoren parametrisiert:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mathbf{Tr} G Y^3 = -g_1 - \frac{1}{4}g_2 + \frac{8}{9}g_3 - \frac{1}{9}g_4 + \frac{1}{36}g_5 + \frac{1}{4}g_6 \\ \kappa_2 &= \mathbf{Tr} G Y T_i^2 = -\frac{1}{4}g_2 + \frac{1}{4}g_5 + \frac{1}{4}g_6 \\ \kappa_3 &= \mathbf{Tr} G Y T^{s2} = \frac{1}{3}g_3 - \frac{1}{6}g_4 + \frac{1}{6}g_5 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Stellt man zusätzlich an die g_i die Bedingung

$$g_i > 0 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.14)$$

so stellt man sicher, daß die Hamiltondichte der so konstruierten Theorie nach unten beschränkt ist (siehe [26]). Die Forderung (3.14) schränkt zusammen mit den drei Gleichungen (3.12) die möglichen

Werte für die g_i (und somit die Konstanten κ_i) auf den Schnitt dreier fünfdimensionaler Simplexes im sechsdimensionalen Parameterraum ein. Aufgrund der Hierarchie von Kopplungskonstanten im Standardmodell existieren $g_i > 0$ mit

$$g_2 + g_6 = \frac{1}{g^2} \quad g_5 = 0$$

welche die Gleichungen (3.12) erfüllen, und somit erhält man für κ_2 einen maximalen Wertebereich

$$-\frac{1}{4g^2} \leq \kappa_2 \leq \frac{1}{4g^2}$$

Mit den Kopplungskonstanten aus Anhang C ist

$$\frac{1}{4g^2} \approx 0.586$$

Im Rest dieser Arbeit wird $\kappa_2 = 0.5$ gewählt, was somit innerhalb dieses Bereiches liegt.

Das mit diesem Eichsektor konstruierte Modell wird auch als „nichtminimales nichtkommutatives Standardmodell“ (nmNCSM) bezeichnet und liegt den phänomenologischen Untersuchungen dieser Arbeit zu Grunde. Es unterscheidet sich von dem oben diskutierten mNCSM durch eine deutlich reichhaltigere Auswahl an neuen Vertizes in der Störungstheorie — im Gegensatz zum Eichsektor des mNCSM enthält der Term (3.8) z.B. Kopplungen von einem Photon an zwei Gluonen sowie Kopplungen von drei Photonen untereinander. Allen diesen neuen Kopplungen ist im nmNCSM gemein, daß die Vertexfaktoren nicht allein durch die Parameter des Standardmodells und $\theta^{\mu\nu}$ bzw. λ bestimmt sind, sondern drei neue Parameter (3.13) enthalten.

Die Konstruktion des nichtkommutativen Higgssektors $\hat{\mathcal{L}}_{\text{Higgs}}^{\text{SM}}$ erfolgt nach dem gleichen Muster wie die Konstruktion des Materiesektors durch die Ersetzung von Produkten durch Sternprodukte und der Felder durch ihre Seiberg-Witten-Abbildungen. Bei der Konstruktion des Yukawasektors $\hat{\mathcal{L}}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}}$ kommt es zu Komplikationen, da die nichtkommutativen $U(1)$ -Eichtransformationen nicht mit dem Higgsfeld vertauschen. Diese Probleme können durch eine einfache Modifikation der Seiberg-Witten-Abbildung beseitigt werden — da Higgs- und Yukawasektor in dieser Arbeit jedoch keine Rolle spielen, sei für Details auf [5] verwiesen.

Die komplette Lagrangedichte des so konstruierten nmNCSM lautet

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^{\text{SM,nm}} &= \hat{\mathcal{L}}_{\text{Materie}}^{\text{SM}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eich}}^{\text{SM,nm}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Higgs}}^{\text{SM}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} = \\ &= \sum_f i \hat{\Psi}^f \star \hat{D} \star \hat{\Psi}^f - \frac{1}{2} \text{Tr} G \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Higgs}}^{\text{SM}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} \end{aligned}$$

Alle Felder sind als die Seiberg-Witten-Abbildungen der Felder des Standardmodells zu verstehen. Das nmNCSM geht per Konstruktion im Limes $\lambda \rightarrow 0$ in das herkömmliche Standardmodell über, und ist in jeder Ordnung von λ invariant unter herkömmlichen Eichtransformation. Durch die Entwicklung der Seiberg-Witten-Abbildung treten in jeder Ordnung von λ neue Vertizes in der Störungstheorie auf. Im Rest dieses Kapitels wird der für die in dieser Arbeit vorgenommenen Rechnungen notwendige Teil der Feynmanregeln zuerst für eine beliebige nichtkommutative Yang-Mills-Theorie und anschließend für das nmNCSM abgeleitet.

3.3 Feynmanregeln einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie

Um den für diese Arbeit relevanten Teil der Feynmanregeln einer nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie abzuleiten, sei an dieser Stelle das Extrahieren der Vertizes aus der Lagrangedichte kurz wiederholt,

ohne auf die Herleitung einzugehen (ein Beweis ist auf der Basis des Pfadintegrals oder mit Feldoperatoren und dem Wick-Theorem möglich und findet sich z.B. in [7] oder [23]). Zur Konstruktion der Störungstheorie wird die Lagrangedichte \mathcal{L} in einen freien Teil \mathcal{L}_0 , welcher alle in den Feldern bilinearen Terme enthält, und einen Wechselwirkungsteil \mathcal{L}_{WW} gespalten

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{WW}}$$

Die Propagatoren der Theorie folgen aus dem freien Teil der Lagrangedichte \mathcal{L}_0 , die Vertizes aus dem Wechselwirkungsteil \mathcal{L}_{WW} . Schreibt man \mathcal{L}_{WW} als Polynom in den Feldern und deren Ableitungen, so entspricht jedes Monom einem Vertex, an dem sich genau die zu den Feldern des Monoms gehörigen Linien treffen. Um den Vertexfaktor zu erhalten, bildet man das Produkt aus dem Vorfaktor des Monoms und einem Faktor $-ik_i^\mu$ bzw. ik_i^μ für jede Ableitung eines ein- bzw. auslaufenden Feldes ϕ_i (mit dem entlang der dem Feld zugeordneten Linie fließenden Impuls k_i^μ), summiert über alle möglichen Zuordnungen der Felder zu den an dem Vertex kreuzenden Linien und multipliziert das Ergebnis mit einem Faktor i . Ein hermitesches Feld kann sowohl einer einlaufenden als auch einer auslaufenden Linie entsprechen; ein komplexes Feld entspricht einem einlaufenden Teilchen bzw. einem auslaufenden Antiteilchen, während das dazu konjugierte Feld einem auslaufenden Teilchen bzw. einem einlaufenden Antiteilchen entspricht. Diese Regeln liefern auch eine Vorschrift zum Austausch von ein- und auslaufenden Linien: wird eine einlaufende durch eine auslaufende Linie ersetzt, so erhält der Impuls ein Vorzeichen², und das Teilchen muß ggf. durch sein Antiteilchen ersetzt werden. In den Feynmanregeln dieser Arbeit sind alle Impulse einlaufend gewählt.

Sei nun eine nichtkommutative Yang-Mills-Theorie eines zu einem Vektor zusammengefaßten Satzes von Fermionfeldern Ψ und dazugehörigen Eichfeldern $A^\mu = A_i^\mu T_i$ durch ihre Lagrangedichte

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{Materie}} + \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{EF}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}} = i\hat{\Psi} \star \hat{D} \star \Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{EF}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}} \quad (3.15)$$

definiert, wobei die nichtkommutativen Felder wieder durch die Seiberg-Witten-Abbildungen der kommutativen Felder Ψ und A^μ ersetzt seien. Entwickelt man diese und das Sternprodukt in Ordnungen von λ (vgl. (2.25) und (2.26)), so erhält man für den Materiesektor³

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{Materie}} &= \bar{\Psi} (i\hat{\partial} + \hat{A} + \hat{A}_1) \Psi + \bar{\Psi}_1 (\hat{\partial} + \hat{A}) \Psi + \bar{\Psi} (\hat{\partial} + \hat{A}) \Psi_1 + \frac{i}{2} \lambda \theta^{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{\Psi} \partial_\nu \hat{A} \Psi) + \mathcal{O}(\lambda^2) = \\ &= \bar{\Psi} \left(i\hat{\partial} + \hat{A} + \frac{\lambda \theta^{\mu\nu}}{2} \left(i\overleftarrow{\partial} A_\mu \partial_\nu - i\overleftarrow{\partial}_\nu A_\mu \hat{\partial} + i\overleftarrow{\partial}_\mu \partial_\nu \hat{A} + A_\nu A_\mu \hat{\partial} + \hat{\partial} A_\nu A_\mu - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hat{A} A_\mu \partial_\nu - \overleftarrow{\partial}_\nu A_\mu \hat{A} - A_\mu \partial_\nu \hat{A} - \partial_\nu \hat{A} A_\mu + i\hat{A} A_\mu A_\nu + iA_\mu A_\nu \hat{A} - iA_\mu \hat{A} A_\nu \right) \right) \Psi + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die ersten zwei Terme in der zweiten Zeile sind der kinetische Term des Fermionfeldes und die gewöhnliche Kopplung des Fermionfeldes an das Eichfeld. Die darauffolgende Klammer enthält die Effekte der nichtkommutativen Geometrie in 1. Ordnung λ . Die ersten drei Terme in der Klammer sind eine Korrektur des kommutativen $\Psi\Psi A$ -Vertex. Die nächsten sechs Terme generieren einen neuen, in der kommutativen Theorie nicht vorhandenen Vertex $\Psi\Psi AA$, welcher zwei Fermionen an zwei Eichbosonen koppelt und im Folgenden als Kontaktvertex bezeichnet wird. Die letzten drei Terme erzeugen einen Vertex $\Psi\Psi AAA$, welcher ein Fermionpaar an drei Eichbosonen koppelt. Dieser hat jedoch keine Bedeutung für diese Arbeit.

²zusätzlich zu dem aus der Impulserhaltung folgenden Vorzeichen, so daß die Wahl der Richtung des Impulsflusses entlang einer inneren Linie für bosonische Linien keine Auswirkung hat.

³Im Folgenden wird die Lagrangedichte immer implizit als über den Raum integriert angenommen, so daß partiell integriert werden kann.

Im Folgenden werden alle Vertizes der entwickelten Lagrangedichte in einen von λ unabhängigen Teil und einen Teil erster Ordnung in λ aufgespalten. Die von λ unabhängigen Vertizes werden mit einem Punkt gekennzeichnet, die Vertizes 1. Ordnung in λ mit einem ungefüllten Quadrat, so daß für einen kompletten Vertex bis einschließlich der ersten Ordnung in λ gilt

The diagram shows an equation between three Feynman diagrams. On the left is a vertex where two lines cross, with a small black dot at the intersection. This is equal to the sum of two diagrams: the first is the same vertex with a small black dot at the intersection, and the second is the same vertex with a small white square at the intersection.

Mithilfe der eingangs erläuterten Regeln kann man den von λ unabhängigen Vertex $\Psi\Psi A$, welcher sich nicht von dem einer kommutativen Eichtheorie unterscheidet, aus (3.16) ablesen

The diagram shows a vertex with a black dot. Two fermion lines, labeled f and \bar{f} , enter from the left. A wavy line labeled A_i^ρ exits to the right. The equation is set equal to $iT_i\gamma^\rho$.

$$= iT_i\gamma^\rho \quad (3.17)$$

Für den nichtkommutativen Anteil des Vertex $\Psi\Psi A$ erhält man aus (3.16)

The diagram shows a vertex with a white square. Two fermion lines, labeled f and \bar{f} , enter from the left with momenta p and q . A wavy line labeled A_i^σ exits to the right. The equation is set equal to $\frac{\lambda}{2}T_i\theta^{\mu\nu\sigma}p_\mu q_\nu$.

$$= \frac{\lambda}{2}T_i\theta^{\mu\nu\sigma}p_\mu q_\nu \quad (3.18)$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor

$$\theta^{\mu\nu\sigma} = \theta^{\mu\nu}\gamma^\sigma + \theta^{\sigma\mu}\gamma^\nu + \theta^{\nu\sigma}\gamma^\mu \quad (3.19)$$

Ebenso erhält man nach kurzer Rechnung den Kontaktvertex $\Psi\Psi AA$ (mit der Notation (A.1)):

The diagram shows a contact vertex with a white square. Two fermion lines, labeled f and \bar{f} , enter from the left with momenta p and q . Two wavy lines, labeled A_i^ρ and A_j^σ , exit to the right with momenta k_1 and k_2 . The equation is set equal to a complex expression involving λ , θ , T_i , T_j , and γ matrices.

$$= \frac{\lambda}{2} (p\theta^{\sigma\rho} [T_i, T_j] + (k_1\theta^{\sigma\rho} + p\theta^\sigma\gamma^\rho + q\theta^\rho\gamma^\sigma) T_i T_j + (k_2\theta^{\rho\sigma} + p\theta^\rho\gamma^\sigma + q\theta^\sigma\gamma^\rho) T_j T_i + (k_1\theta^\sigma\gamma^\rho + k_2\theta^\rho\gamma^\sigma) \{T_i, T_j\}) \quad (3.20)$$

Für den Eichsektor ergibt sich mit der Seiberg-Witten-Abbildung (2.27) die Entwicklung

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\text{Eich}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \lambda\theta^{\rho\sigma}\text{Tr} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\lambda\theta^{\rho\sigma}\text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Der erste Term entspricht dem kommutativen Eichsektor und führt mit (2.14) auf die Feynmanregel für den von λ unabhängigen Anteil des Vertex AAA

$$A_i^\alpha \text{---} k_1 \text{---} \text{---} k_2 \text{---} A_j^\beta \text{---} k_3 \text{---} A_k^\gamma \quad = \quad 2i T_{i[jk]} (g^{\alpha\beta} (k_2 - k_1)^\gamma + g^{\gamma\alpha} (k_1 - k_3)^\beta + g^{\beta\gamma} (k_3 - k_2)^\alpha) \quad (3.22)$$

Ist die Spur nach (2.13) normiert, so ist der in (3.22) auftretende Faktor

$$2i T_{i[jk]} = 2i \mathbf{Tr} T_i [T_j, T_k] = -f_{ijk} \quad (3.23)$$

von der Wahl der Darstellung der Lie-Algebra unabhängig. Die beiden verbleibenden Terme in (3.21) sind von 1. Ordnung in λ und liefern eine Korrektur zu dem Vertex AAA sowie weitere Vertizes, an denen bis zu sechs Eichbosonen koppeln. Für den nichtkommutativen Anteil von AAA erhält man durch eine lange, jedoch nicht besonders schwierige Rechnung und geschicktes Zusammenfassen von identischen Termen den Ausdruck

$$A_i^\alpha \text{---} k_1 \text{---} \text{---} k_2 \text{---} A_j^\beta \text{---} k_3 \text{---} A_k^\gamma \quad = \quad -\lambda T_{i\{jk\}} \theta((k_1, \alpha), (k_2, \beta), (k_3, \gamma)) \quad (3.24)$$

mit einem von der Darstellung der Eichgruppe abhängigen, *nicht* durch (2.13) festgelegten Faktor

$$T_{i\{jk\}} = \mathbf{Tr} T_i \{T_j, T_k\} = \frac{1}{3} \sum_{\text{Perm.}} \mathbf{Tr} T_i T_j T_k \quad (3.25)$$

(die Summe läuft über alle Permutationen der drei Generatoren) und einem kinematischen Faktor⁴

$$\begin{aligned} \theta((k_1, \alpha), (k_2, \beta), (k_3, \gamma)) &= \theta_{\alpha\beta}((k_2 k_3) k_{1\gamma} - (k_1 k_3) k_{2\gamma}) + k_1 \theta k_2 (k_{3\beta} g_{\alpha\gamma} - k_{3\alpha} g_{\beta\gamma}) - \\ &k_1 \theta_\alpha (k_{2\gamma} k_{3\beta} - (k_2 k_3) g_{\beta\gamma}) + k_1 \theta_\beta (k_{2\gamma} k_{3\alpha} - (k_2 k_3) g_{\alpha\gamma}) + \\ &k_1 \theta_\gamma (k_{3\beta} k_{2\alpha} - (k_3 k_2) g_{\alpha\beta}) + \\ &\text{zykl. Perm. von } ((\alpha, 1), (\beta, 2), (\gamma, 3)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Betrachtet man die Amplitude $\langle AA | S | \bar{\Psi} \Psi \rangle$, so muß diese aufgrund der Eichinvarianz in jeder Ordnung λ die Ward-Identität erfüllen (siehe auch Abschnitt 4.2 im weiteren Teil dieser Arbeit). Da auf Baumniveau in 1. Ordnung λ der einzige von der Wahl der Spur im Eichsektor abhängige Vertex AAA ist, muß dieser für sich eichinvariant sein. Man kann sich durch explizite Rechnung leicht davon überzeugen, daß dies der Fall ist, da der kinematische Faktor (3.26) bei Kontraktion mit einem der Impulse verschwindet.

Auf die restlichen in (3.15) enthaltenen Vertizes soll hier nicht eingegangen werden, da sie in dieser Arbeit nicht benötigt werden.

3.4 Feynmanregeln des nmNCSM

Aus den im letzten Abschnitt abgeleiteten Feynmanregeln für eine beliebige nichtkommutative Yang-Mills-Theorie lassen sich nun durch Einsetzen der Felder des Standardmodells alle Vertexregeln des nmNCSM, die in dieser Arbeit benötigt werden, berechnen.

⁴Man beachte, daß diese Definition von $\theta((k_1, \alpha), (k_2, \beta), (k_3, \gamma))$ sich um ein Vorzeichen von dem in [24] definierten Objekt Θ_3 unterscheidet.

Durch Einsetzen des Vektorpotentials (3.1), der Generatoren (3.4) sowie der Ladungen Tab.3.1 in die Feynmanregel für den kommutativen Anteil (3.17) des Vertex $\Psi\Psi A$ erhält man die entsprechenden Feynmanregeln des von λ unabhängigen Teils des Materiesektors des nmNCSM:

$$\begin{array}{c} f \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bar{f} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} A_\sigma = ieQ\gamma^\sigma \quad (3.27)$$

$$\begin{array}{c} f_d, f_u \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bar{f}_u, \bar{f}_d \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} W_\sigma^+ \\ W_\sigma^- \end{array} = \frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\sigma\Pi^- \quad (3.28)$$

$$\begin{array}{c} d \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bar{d} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} Z_\sigma^0 = \frac{i\gamma^\sigma}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(\frac{g'^2}{3}\Pi^+ - \frac{1}{2} \left(g^2 + \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) = \\ = \frac{ie\gamma^\sigma}{\sin(2\theta_W)} (g_V^d - g_A^d\gamma^5) \quad (3.29)$$

$$\begin{array}{c} u \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bar{u} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} Z_\sigma^0 = \frac{i\gamma^\sigma}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(-\frac{2}{3}g'^2\Pi^+ + \frac{1}{2} \left(g^2 - \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) = \\ = \frac{ie\gamma^\sigma}{\sin(2\theta_W)} (g_V^u - g_A^u\gamma^5) \quad (3.30)$$

$$\begin{array}{c} l, \nu \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bar{l}, \bar{\nu} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} Z_\sigma^0 = \frac{ie\gamma^\sigma}{\sin(2\theta_W)} (g_V^{l/\nu} - g_A^{l/\nu}\gamma^5) \quad (3.31)$$

Dabei sind die Vektor- und Axialkopplungen definiert als

$$\begin{array}{ll} g_V^d = \frac{2}{3}\sin^2(\theta_W) - \frac{1}{2} & g_A^d = -\frac{1}{2} \\ g_V^u = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2(\theta_W) & g_A^u = \frac{1}{2} \\ g_V^l = 2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} & g_A^l = -\frac{1}{2} \\ g_V^\nu = \frac{1}{2} & g_A^\nu = \frac{1}{2} \end{array}$$

Auf die gleiche Weise erhält man durch Einsetzen der Felder und Generatoren in die Feynmanregel (3.18) die Korrekturen 1. Ordnung λ zu den Vertizes (3.27)–(3.31):

$$= \frac{\lambda e}{2} Q p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\sigma} \quad (3.32)$$

$$= \frac{\lambda g}{2\sqrt{2}} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\sigma} \Pi^- \quad (3.33)$$

$$= \frac{\lambda}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\rho} \left(\frac{g'^2}{3} \Pi^+ - \frac{1}{2} \left(g^2 + \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) =$$

$$= \frac{\lambda e}{2 \sin(2\theta_W)} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\rho} (g_V^d - g_A^d \gamma^5) \quad (3.34)$$

$$= \frac{\lambda}{2\sqrt{g^2 + g'^2}} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\rho} \left(-\frac{2}{3} g'^2 \Pi^+ + \frac{1}{2} \left(g^2 - \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) =$$

$$= \frac{\lambda e}{2 \sin(2\theta_W)} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\rho} (g_V^u - g_A^u \gamma^5) \quad (3.35)$$

$$= \frac{\lambda e}{2 \sin(2\theta_W)} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\rho} (g_V^{l/\nu} - g_A^{l/\nu} \gamma^5) \quad (3.36)$$

Die Korrekturen erster Ordnung zu den Vertizes (3.27)–(3.31) unterscheiden sich also nur durch die Ersetzung der Gammamatrix γ^ρ durch den impulsabhängigen Faktor $\frac{-i\lambda}{2} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu\sigma}$ von dem von λ unabhängigen Teil der Vertizes.

Um die in dieser Arbeit benötigten Kontaktvertizes des nmNCSM zu berechnen, benötigt man den Kommutator und den Antikommutator der Generatoren T^+ und T^- . Mit (B.6) gilt

$$[T^+, T^-] = T_3 \quad \{T^+, T^-\} = \frac{\mathbb{I}_{2 \times 2}}{2} \quad (3.37)$$

und damit für die Produkte der Generatoren

$$T^+ T^- = \frac{1}{2} (\{T^+, T^-\} + [T^+, T^-]) = \frac{T_3}{2} + \frac{\mathbb{I}_{2 \times 2}}{4} \quad T^- T^+ = \frac{1}{2} (\{T^+, T^-\} - [T^+, T^-]) = \frac{T_3}{2} - \frac{\mathbb{I}_{2 \times 2}}{4}$$

Setzt man diese in die Feynmanregel (3.20) ein, so verschwindet im Falle zweier einlaufender up-Quarks der mit dem Produkt $T^- T^+$ multiplizierte Term, und unter Verwendung der Impulserhaltung folgt für den Vertex $uuWW$

$$= \frac{g^2}{4} \theta^{\sigma\rho\mu} (k^+ + p)_\mu \Pi^- \quad (3.38)$$

Ebenso verschwindet im Falle zweier einlaufender down-Quarks der mit dem Produkt T^+T^- multiplizierte Teil des Vertex, und es folgt die Feynmanregel⁵

$$= \frac{g^2}{4} \theta^{\sigma\rho\mu} (k^+ + q)_\mu \Pi^- \quad (3.39)$$

Um den Standardmodellanteil der in dieser Arbeit benötigten Vertizes AWW und ZWW zu berechnen, muß der Faktor (3.23) in der Darstellung der einhüllenden Algebra des Eichsektors des nmNCSM (3.9) ausgewertet werden (unter Berücksichtigung der Matrix G). Für den Vertex AWW ergibt sich mit der Normierung (3.11), den Generatoren in den einzelnen Komponenten der Darstellung (3.4) und dem Kommutator (3.37) der Faktor

$$eg^2 \mathbf{Tr} GQ [T^+, T^-] = eg^2 \mathbf{Tr} GT_3^2 = \frac{1}{2}e$$

und somit folgt die wohlbekannte Feynmanregel des Standardmodells

$$= ie (g^{\beta\gamma} (k^- - k^+)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k - k^-)^\beta + g^{\alpha\beta} (k^+ - k)^\gamma) \quad (3.40)$$

Genauso erhält man für den Vertex ZWW den Faktor

$$g^2 \mathbf{Tr} GT^0 [T^+, T^-] = g^3 \cos(\theta_W) \mathbf{Tr} GT_3^2 = \frac{g^2}{2\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

und somit die Feynmanregel

$$= \frac{ig^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g^{\beta\gamma} (k^- - k^+)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (k - k^-)^\beta + g^{\alpha\beta} (k^+ - k)^\gamma) \quad (3.41)$$

Auf die gleiche Weise berechnet man die nichtkommutativen, aus dem Eichsektor stammenden Korrek-

⁵In [24] wird nicht zwischen up- und downartigen Quarks unterschieden und lediglich die Regel (3.38) angegeben. Wie die Untersuchung der Ward-Identität für W -Paarproduktion im nächsten Kapitel zeigt, ist der Unterschied zwischen den beiden Vertizes jedoch zwingend notwendig.

toren 1. Ordnung in λ dieser Vertizes durch Auswerten des Faktors (3.25), wobei beachtet werden muß, daß in der Darstellung der einhüllenden Algebra eine verallgemeinerte Variante von (3.37) gilt:

$$\{T^+, T^-\} = 2T_1^2 = 2T_2^2 = 2T_3^2$$

Der an dem Vertex AWW stehende Faktor ist mit (3.13)

$$eg^2 \mathbf{Tr} GQ \{T^+, T^-\} = 2eg^2 \mathbf{Tr} GYT_3^2 = 2eg^2 \kappa_2$$

und ergibt mit der Feynmanregel (3.24) die Vertexregel⁶

$$\begin{array}{c}
 \text{---} W_\beta^+ \\
 \text{---} k^+ \\
 \text{---} k^- \\
 \text{---} W_\gamma^- \\
 \square \\
 A_\alpha \text{---} \text{---} k
 \end{array}
 = -2eg^2 \kappa_2 \lambda \theta((k, \alpha), (k^+, \beta), (k^-, \gamma)) \quad (3.42)$$

An dem Vertex ZWW steht der Faktor

$$g^2 \mathbf{Tr} GT^0 \{T^+, T^-\} = -2g^2 g' \sin(\theta_W) \mathbf{Tr} GYT_3^2 = -2gg' e \kappa_2$$

welcher die Feynmanregel

$$\begin{array}{c}
 \text{---} W_\beta^+ \\
 \text{---} k^+ \\
 \text{---} k^- \\
 \text{---} W_\gamma^- \\
 \square \\
 Z_\alpha \text{---} \text{---} k
 \end{array}
 = 2egg' \kappa_2 \lambda \theta((k, \alpha), (k^+, \beta), (k^-, \gamma)) \quad (3.43)$$

ergibt.

Weitere Feynmanregeln des nmNCSM werden in dieser Arbeit nicht benötigt und daher hier nicht abgeleitet; der vollständige Satz von Feynmanregeln des Standardmodells findet sich z.B. in [27]. Eine weitere Quelle von Beiträgen zu den oben berechneten Feynmanregeln findet sich im nichtkommutativen Higgs- bzw. Yukawasektor: da die Seiberg-Witten-Abbildung des Higgs-Feldes in erster Ordnung λ Terme proportional zu $\theta^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ bzw. $\theta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ enthält, gibt es für jedes massive Teilchen in 1. Ordnung λ zwei zusätzliche Vertizes, die proportional zur Masse m sind und das Teilchen an ein bzw. zwei Eichbosonen koppeln. Da die entsprechenden Beiträge zum Wirkungsquerschnitt jedoch mit einem Faktor $\frac{m^2}{E^2}$ (mit der Schwerpunktsenergie E) unterdrückt sind, werden sie in dieser Arbeit (genau wie die Kopplung an das Higgsfeld) nicht berücksichtigt. Eine Ableitung dieser Vertizes findet sich in [24].

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die in dieser Arbeit verwendeten Propagatoren angegeben (zur Herleitung siehe z.B. [7]). Der Propagator eines Fermions der Masse m mit Impuls p ist

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \blacktriangleright \\
 p
 \end{array}
 = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.44)$$

Der Propagator eines massiven Vektorbosons mit Impuls k und Masse m ergibt sich in unitärer Eichung zu

⁶Die Feynmanregel (3.42) unterscheidet sich um einen Faktor -1 von der in [24] angegebenen Feynmanregel.

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ k, m \end{array} = \frac{-i}{k^2 - m^2 + im\Gamma + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right) \quad (3.45)$$

Die Zerfallsbreite Γ des Eichbosons folgt dabei nicht aus dem bilinearen Teil der Lagrangedichte, sondern ist ein Effekt höherer Ordnungen (eine detaillierte Erklärung der Zerfallsbreite findet sich in [7]). Der Photonpropagator lautet in Feynman-Eichung.

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ k \end{array} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.46)$$

Die in diesem Kapitel abgeleiteten Feynmanregeln werden im zweiten Teil dieser Arbeit zur Untersuchung der W -Paarerzeugung bei der Kollision zweier Quarks bzw. zweier Protonen in 1. Ordnung λ auf Baumniveau verwendet. In unitärer Eichung werden die Goldstonebosonen aus dem Spektrum des nmNCSM entfernt und müssen daher nicht berücksichtigt werden (siehe [7]). Da die Rechnung auf Baumniveau durchgeführt und außerdem nur über physikalische Polarisationen summiert wird, treten keine Diagramme mit Geistern auf. Die Kopplung der Teilchen an das Higgs-Boson wird, wie oben erläutert, vernachlässigt.

Kapitel 4

W -Paarproduktion aus Quarks im nmNCSM

Nachdem in den ersten beiden Kapiteln die nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells konstruiert und die zugehörigen Feynmanregeln bestimmt wurden, wird nun im zweiten Teil dieser Arbeit die W -Paarproduktion im nmNCSM untersucht.

Gegenstand dieses Kapitels sind die partonischen Prozesse $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$ sowie $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$. Im ersten Abschnitt wird die Definition des Wirkungsquerschnitts wiederholt und das Bezugssystem festgelegt, in welchem die Prozesse betrachtet werden. Im zweiten Abschnitt werden die notwendigen Feynmandiagramme zusammengestellt und die Gültigkeit der Ward-Identität untersucht. Im dritten Teil wird mithilfe der Programme FORM und Mathematica ein analytischer Ausdruck für das über die Polarisierungen summierte und über die Fermionspins gemittelte Quadrat der Feynmanamplitude abgeleitet, und im vierten Abschnitt schließlich wird die Produktion polarisierter W -Bosonen numerisch mit einem FORTRAN-Programm untersucht.

4.1 Wirkungsquerschnitt und Kinematik

Nahezu alle Experimente, mit denen in der Teilchenphysik Theorien getestet werden, sind Colliderexperimente. Dazu werden zwei Teilchenstrahlen hoher Intensität und Energie in einem eng begrenzten Volumen zur Kollision gebracht und die entstehenden Produkte detektiert. Die dabei gemessene Observable ist der differentielle Wirkungsquerschnitt¹ $d\sigma$ für einen bestimmten Prozess. Dieser ist definiert als die Anzahl der Streueignisse pro Zeiteinheit und einfallenden Teilchenfluß in einen bestimmten Teil des Phasenraums. Aus dem differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ erhält man durch Integration über den Phasenraum den totalen Wirkungsquerschnitt σ .

Für die Kollision zweier Teilchen mit Impulsen p_1, p_2 sowie Massen m_1, m_2 und die Produktion von n Teilchen mit Impulsen p_3, \dots, p_{n+2} gilt allgemein

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \delta^{(4)} \left(\sum_{n=1,2} p_n - \sum_{n>2} p_n \right) \prod_f (2m_f) \prod_{n>2} \frac{d^3 p_n}{2(2\pi)^3 p_n^0} |\mathcal{M}|^2 \quad (4.1)$$

wobei das erste Produkt über alle massiven Fermionen zu bilden ist (für einen Beweis siehe z.B. [27] oder [23]). Das Betragsquadrat der Feynmanamplitude \mathcal{M} ist proportional zu der Wahrscheinlichkeits-

¹Im Folgenden wird der differentielle Wirkungsquerschnitt immer als $d\sigma$ bezeichnet, unabhängig davon, wieviele der auslaufenden Impulskomponenten ausintegriert sind.

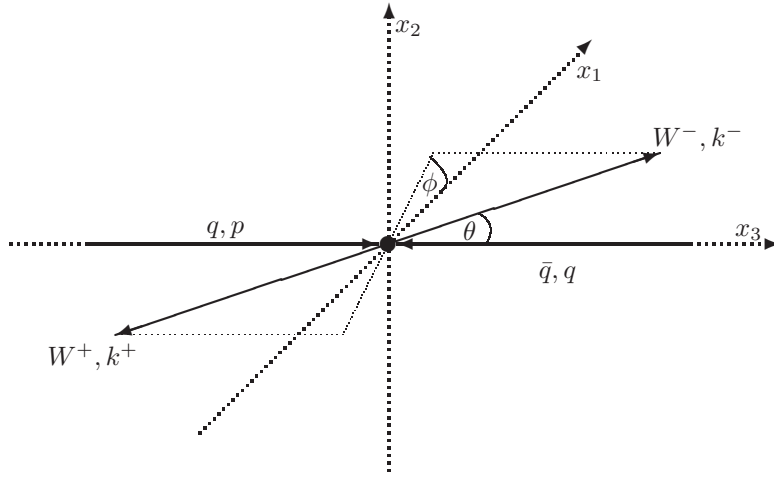


Abbildung 4.1: Wahl des Bezugssystems für die W -Paarproduktion

dichte für die Streuung des asymptotisch einlaufenden Zustandes $|p_1, p_2; \text{in}\rangle$ in den asymptotisch auslaufenden Zustand $|p_3, \dots, p_{n+2}; \text{out}\rangle$ und wird diagrammatisch mithilfe der Feynmanregeln berechnet (siehe z.B. [7] oder [27]). Die Deltafunktion vermittelt die Energie- und Impulserhaltung, so daß sich die Zahl der Freiheitsgrade der auslaufenden Teilchen (für eine feste Wahl von Polarisierungen) von $3n$ auf $3n - 4$ reduziert. Die Definition des Wirkungsquerschnitts (4.1) ist lorentzinvariant, da sowohl die Viererdeltafunktion $\delta^{(4)}$ als auch die Differentiale $\frac{d^3 p_n}{p_n^0}$ invariant unter Lorentztransformationen sind. Im Spezialfall der Produktion zweier Teilchen verbleiben von den sechs Phasenraumdifferentialen nach Ausintegration der Deltafunktion noch zwei unabhängige Variablen, welche als Polarwinkel $0 \leq \theta < \pi$ und Azimutalwinkel $0 \leq \phi < 2\pi$ eines der auslaufenden Teilchen wählbar sind.

Betrachten wir nun den in dieser Arbeit untersuchten Prozess, in welchem aus der Kollision eines up- oder down-Quarks sowie des zugehörige Antiquarks ein W^+ - und ein W^- -Boson produziert werden. Aufgrund der Energieerhaltung muß die Energie der einlaufenden Teilchen mindestens der doppelten W -Masse entsprechen, und da diese mit etwa $m_W \approx 80 \text{ GeV}$ deutlich größer ist als die Masse der Quarks ($m_u \approx m_d \approx 5 \text{ MeV}$) werden diese im Folgenden als masselos angenommen. Mit dieser Vereinfachung erhält man durch Ausintegration der Deltafunktion aus (4.1) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Massennittelpunktsystem (in welchem der Prozess im Folgenden untersucht werden soll) den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2 E^2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_W^2}{E^2}} |\mathcal{M}|^2$$

mit dem Raumwinkelement

$$d\Omega = d\phi d\cos\theta$$

und der Gesamtenergie der einlaufenden Teilchen E . Die Wahl der Koordinaten und Winkel ist in Abb.4.1 dargestellt, und mit diesen Konventionen ergeben sich unter Verwendung der Energie- und

Impulserhaltung die Viererimpulse der Teilchen zu

$$\begin{aligned}
p^\mu &= \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}, 0, 0 \right) \\
q^\mu &= \left(\frac{E}{2}, -\frac{E}{2}, 0, 0 \right) \\
k^{-\mu} &= \left(\frac{E}{2}, |k| \sin \theta \cos \phi, |k| \sin \theta \sin \phi, |k| \cos \theta \right) \\
k^{+\mu} &= \left(\frac{E}{2}, -|k| \sin \theta \cos \phi, -|k| \sin \theta \sin \phi, -|k| \cos \theta \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

mit dem Betrag des Dreierimpulses der W -Bosonen

$$|k| = \sqrt{\frac{E^2}{4} - m_W^2}$$

Also sind die einzigen nicht durch Energie- und Impulserhaltung festgelegten Freiheitsgrade die Gesamtenergie der Quarks E , Azimuthal- und Polarwinkel des W^- sowie die Polarisierungen der Teilchen.

Befinden sich die Teilchen in Helizitätseigenzuständen, so muß im Standardmodell der differentielle Wirkungsquerschnitt aufgrund der Lorentzinvarianz symmetrisch unter Drehungen um die Strahlachse sein, und der Betrag der Feynmanamplitude darf nicht von dem Azimuthalwinkel ϕ abhängen. Die verbleibenden Parameter E und $\cos \theta$ lassen sich durch die lorentzinvarianten Mandelstamvariablen

$$\begin{aligned}
s &= (p + q)^2 = (k^+ + k^-)^2 = 2(pq) = 2m_W^2 + 2(k^- k^+) = E^2 \\
t &= (p - k^-)^2 = (q - k^+)^2 = m_W^2 - 2(pk^-) = m_W^2 - 2(qk^+) = m_W^2 - \frac{s}{2} + E|k| \cos \theta \\
u &= (p - k^+)^2 = (q - k^-)^2 = m_W^2 - 2(pk^+) = m_W^2 - 2(qk^-) = m_W^2 - \frac{s}{2} - E|k| \cos \theta
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ausdrücken, von denen aufgrund der Relation

$$s + t + u = 2m_W^2$$

lediglich zwei unabhängig sind.

Im nichtkommutativen Standardmodell dagegen wird durch den Tensor $\theta^{\mu\nu}$ explizit die Lorentzinvarianz gebrochen, und die den Tensor parametrisierenden Vektoren \vec{E} und \vec{B} zeichnen zwei Richtungen im Raum aus. Daher läßt sich im nmNCSM der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht ausschließlich durch Mandelstamvariablen ausdrücken, sondern enthält eine explizite Abhängigkeit vom Azimuthalwinkel ϕ .

4.2 Feynmandiagramme und Ward-Identitäten

Enwickelt man die vollständige Feynmanamplitude im nmNCSM $\hat{\mathcal{M}}$ bis zur 1. Ordnung in λ , so unterteilt sie sich in einen von λ unabhängigen Teil \mathcal{M}_0 , welcher identisch zu der Feynmanamplitude im Standardmodell ist, und einen in λ linearen, im Folgenden als \mathcal{M}_1 bezeichneten Teil auf

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Bildet man das Betragsquadrat, so mischen die beiden Terme miteinander, und man erhält die Summe aus dem Betragsquadrat des Standardmodellanteils, einen Interferenzterm 1. Ordnung in λ und das

Betragsquadrat von \mathcal{M}_1 , welches bereits von 2. Ordnung in λ ist

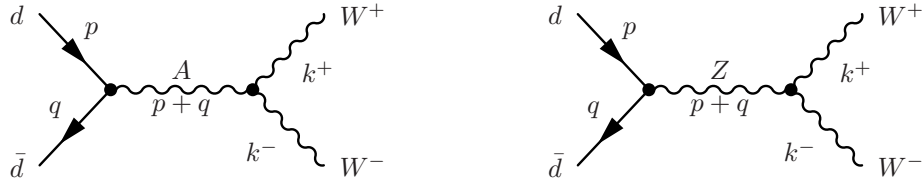
$$|\hat{\mathcal{M}}|^2 = \underbrace{|\mathcal{M}_0|^2}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{2\Re(\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1^*)}_{\mathcal{O}(\lambda^1)} + \underbrace{|\mathcal{M}_1|^2}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Entwickelt man das Betragsquadrat der Feynmanamplitude bis zu 1. Ordnung in λ , so muß die Entwicklung also nach dem Interferenzterm abgebrochen und das Betragsquadrat von \mathcal{M}_1 vernachlässigt werden

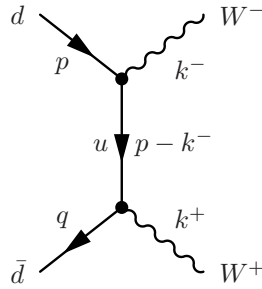
$$|\hat{\mathcal{M}}|^2 = |\mathcal{M}_0|^2 + 2\Re(\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1^*) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (4.4)$$

Der Ausdruck (4.4) ist kein Betragsquadrat einer komplexen Zahl mehr, und kann daher negativ werden, falls der nichtkommutative Anteil der Amplitude \mathcal{M}_1 von der gleichen Größenordnung ist wie der Standardmodellanteil \mathcal{M}_0 . Dies ist jedoch *kein* physikalisches Phänomen, sondern lediglich ein Hinweis darauf, daß die Entwicklung zu früh abgebrochen wurde und höhere Ordnungen in λ berücksichtigt werden müssen.

Der Standardmodellanteil der Feynmanamplitude \mathcal{M}_0^d für den Prozess $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$ setzt sich auf Baumniveau aus zwei s -Kanal-Diagrammen²

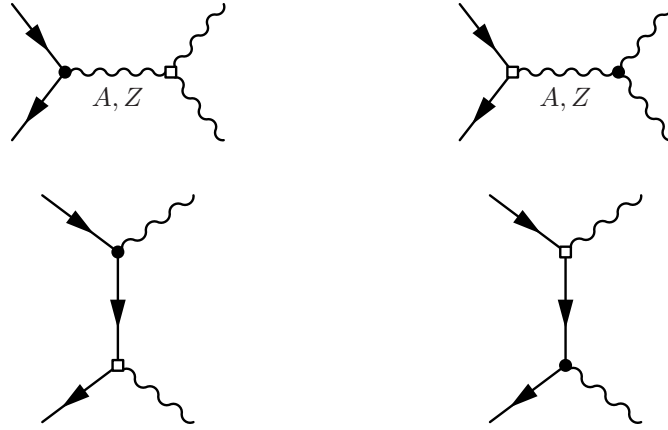


und einem t -Kanal-Diagramm



zusammen. Ein entsprechendes u -Kanal-Diagramm tritt nicht auf, da W^+ und W^- voneinander unterscheidbare Teilchen sind. Zu jedem dieser drei Diagramme gehören in 1. Ordnung λ zwei Diagramme, bei denen je einer der beiden Vertizes durch seine nichtkommutative Korrektur 1. Ordnung ersetzt ist und die zu \mathcal{M}_1^d beitragen (die Felder und Impulse unterscheiden sich nicht von denen der Standardmodellldiagramme):

²Die Bezeichnung s -Kanal bzw. t - und u -Kanal bezieht sich auf den Impuls, der entlang der inneren Linie fließt und dessen Betragsquadrat durch die entsprechende Mandelstamvariable (vgl. (4.3)) gegeben ist.



Außerdem kommt in erster Ordnung λ ein weiteres Diagramm hinzu, welches im Standardmodell nicht existiert und den Kontaktvertex (3.39) enthält:

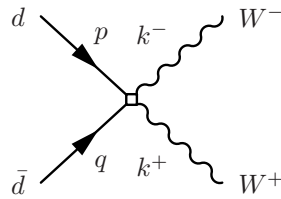


Diagramme mit zwei nichtkommutativen Vertizes sind von 2. Ordnung in λ und werden daher nicht berücksichtigt.

Die einzigen Diagramme, bei denen die CKM-Matrix V_{ij} die einzelnen Familien mischen könnte, sind die t -Kanal-Diagramme (für eine Erläuterung des Yukawasektors des Standardmodells und der Mischungsmatrix siehe [7]). Diese haben mit den Spinoren von Quark bzw. Antiquark $u(p)$ bzw. $\bar{v}(q)$ im Falle einer nichttrivialen CKM-Matrix die Struktur

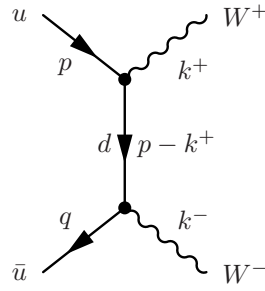
$$\bar{v}_i(q)V_{ij}^* \dots V_{jk}u_k(p)$$

und aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix gilt

$$V_{ij}^*V_{jk} = \delta_{ik}$$

Also fällt die CKM-Matrix auch aus diesen Diagrammen heraus, und die Quarkfamilien mischen bei den in diesem Kapitel besprochenen Prozessen nicht. Daher kann die CKM-Matrix in diesem Kapitel o.B.d.A. als Einheitsmatrix angenommen werden, und die Familienindizes können weggelassen werden.

Durch Vertauschen der down-Quarks gegen up-Quarks erhält man aus den Diagrammen des Prozesses $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$ die zu dem Prozess $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$ gehörenden Diagramme, welche die Amplituden \mathcal{M}_0^u und \mathcal{M}_1^u bilden. Der einzige weitere Unterschied sind die t -Kanal-Diagramme, welche nun durch u -Kanal-Diagramme ersetzt werden müssen, so beispielsweise



Aufgrund der Eichinvarianz der Theorie muß die Feynmanamplitude in jeder Ordnung von λ die Ward-Identität erfüllen. Ein Beweis der Ward-Identität für nichtabelsche Eichtheorien ist leider recht aufwendig und geht über den Rahmen diese Arbeit hinaus; der interessierte Leser sei z.B. an [28] verwiesen. Die Ward-Identität ist eine Konsequenz der Eichinvarianz einer Theorie und bedeutet für die Green'schen Funktionen einer Eichtheorie die Relation

$$\langle \partial_\mu A^\mu(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_n) \rangle = 0 \quad (4.5)$$

(vorausgesetzt, alle Felder sind physikalisch polarisiert), wobei Terme weggelassen wurden, die bei der LSZ-Reduktion keine Pole liefern und somit für das zu der Green'schen Funktion gehörenden Übergangsmatrixelement bedeutungslos sind. Im Falle einer spontan gebrochenen Eichtheorie wird die entsprechende Identität auch als Goldstone-Boson-Äquivalenztheorem bezeichnet und lautet

$$\langle \partial_\mu A_i^\mu(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_n) \rangle = g\xi \sum_a F_a^i \langle \phi_a(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_n) \rangle \quad (4.6)$$

mit den Goldstone-Bosonen ϕ_a sowie der Massenmatrix

$$F_a^i = T_{ab}^i \phi_b^0$$

wobei ϕ^0 der Vakuumerwartungswert des die Symmetrie brechenden Feldes ϕ ist. Im Standardmodell nimmt (4.6) z.B. für das W^+ in Feynmanzeichnung die Form

$$\langle \partial^\mu W_\mu^+(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_n) \rangle = m_W \langle \phi_+ \psi(x_2) \dots \psi(x_n) \rangle$$

an. Da wir in dieser Arbeit die Ward-Identität nur als Hilfsmittel zur Kontrolle von Rechnungen verwenden werden, setzen wir für diesen Zweck die Eichbosonmassen auf Null und beschränken uns auf die einfache Identität (4.5) (zur Kontrolle des Äquivalenztheorems wäre zusätzlich zu den in 3.4 abgeleiteten Feynmanregeln noch die Berechnung der aus dem Higgs-Sektor stammenden nmNCSM-Feynmanregeln 1. Ordnung in λ notwendig).

Auf die Feynmanamplitude übertragen bedeutet die Ward-Identität (4.5), daß die Amplitude im Grenzfall verschwindender Eichbosonmassen bei Ersetzung eines der Polarisationsvektoren durch den Impuls des Eichbosons verschwinden muß (vorausgesetzt, alle anderen Teilchen sind physikalisch polarisiert und befinden sich auf der Massenschale). Die Ward-Identität ist ein nützliche Hilfsmittel, um die Korrektheit einer Rechnung zu prüfen und soll im Folgenden nachgerechnet werden, um die im letzten Kapitel abgeleiteten Feynmanregeln zu testen. Die Rechnungen werden explizit für den Fall zweier einlaufender down-Quarks durchgeführt und die Amplitude mit k^+ kontrahiert; die Rechnung für die anderen Fälle ist vollkommen analog und wird nicht explizit vorgeführt. Da die Feynmanamplitude die Ward-Identität in jeder Ordnung von λ erfüllen muß, können wir sie getrennt für die Amplituden \mathcal{M}_0^d und \mathcal{M}_1^d überprüfen. Außerdem lassen sich die Amplituden immer in der Form

$$\mathcal{M} = \bar{v}(q) \dots \Pi^+ u(p) + \bar{v}(q) \dots \Pi^- u(p)$$

schreiben, und da die Ward-Identität sowohl für rechts- als auch für linkshändige Fermionen erfüllt sein muß, muß jeder der beiden Terme die Identität für sich erfüllen. Im folgenden bezeichne $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ den Standardmodellanteil der Helizitätsamplitude mit einem Index, welcher das zugehörige Diagramm kennzeichnet, so daß gilt³

$$\mathcal{M}_0^d = \left(\mathcal{M}_{0,s,\gamma}^{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{0,s,Z}^{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{0,t}^{\alpha\beta} \right) \epsilon_\alpha^{+*} \epsilon_\beta^{-*}$$

Betrachten wir zunächst den Standardmodellanteil der Amplitude. Die beiden s -Kanal-Diagramme unterscheiden sich lediglich durch die Faktoren an dem zu Π^+ bzw. Π^- proportionalen Teil des die Fermionen an das innere Eichboson koppelnden Vertex sowie in dem Vorfaktor des drei Eichbosonen koppelnden Vertex. Beiden Diagrammen gemeinsam ist ein kinetischer Faktor, welcher unter Berücksichtigung der Impulserhaltung

$$k = p + q = k^+ + k^-$$

und Beachtung der Impulsrichtung bei der Definition der Feynman-Diagramme (siehe Abschnitt. 3.3) mit den Feynmanregeln (3.40) bzw. (3.41) lautet

$$\bar{v}(q) \left(g^{\alpha\beta} (k - 2k^+)^\mu + g^{\alpha\mu} (2k^+ + k^-)^\beta - g^{\mu\beta} (2k^- + k^+)^\alpha \right) k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- \gamma_\mu \Pi^\pm u(p) \quad (4.7)$$

Da die einfache Ward-Identität (4.5) nur im Grenzfall verschwindender Eichbosonmassen erfüllt ist, setzen wir

$$k^{+2} = k^{-2} = 0$$

Die Spinoren $u(p)$ und $\bar{v}(q)$ erfüllen die Dirac-Gleichung (B.9), und unter der Voraussetzung, daß das W^- transversal polarisiert ist, vereinfacht sich der der Ausdruck (4.7) zu

$$-\bar{v}(q) s \not{\epsilon}^- \Pi^\pm u(p)$$

mit der Mandelstamvariablen s (siehe (4.3)). Damit erhält man für die beiden s -Kanal-Amplituden

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0,s,\gamma}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- &= \frac{ie^2}{3} \bar{v}(q) \not{\epsilon}^- (\Pi^+ + \Pi^-) u(p) \\ \mathcal{M}_{0,s,Z}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- &= -\frac{ig^2}{g^2 + g'^2} \bar{v}(q) \left(\frac{g'^2}{3} \Pi^+ - \frac{1}{2} \left(g^2 + \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) \not{\epsilon}^- u(p) \end{aligned}$$

Für das t -Kanal-Diagramm erhält man durch Anwendung der Feynmanregel (3.28) die Amplitude

$$\mathcal{M}_{0,t}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = -\frac{ig^2}{2t} \bar{v}(q) \not{k}^+ (\not{p} - \not{k}^-) \not{\epsilon}^- \Pi^- u(p)$$

mit der Mandelstamvariablen t . Schreibt man unter Ausnutzung der Impulserhaltung \not{k}^+ als

$$\not{k}^+ = \not{p} + \not{q} - \not{k}^-$$

so folgt mit (B.8) und der Dirac-Gleichung (B.9)

$$\mathcal{M}_{0,t}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = -\frac{ig^2}{2} \bar{v}(q) \not{\epsilon}^- \Pi^- u(p)$$

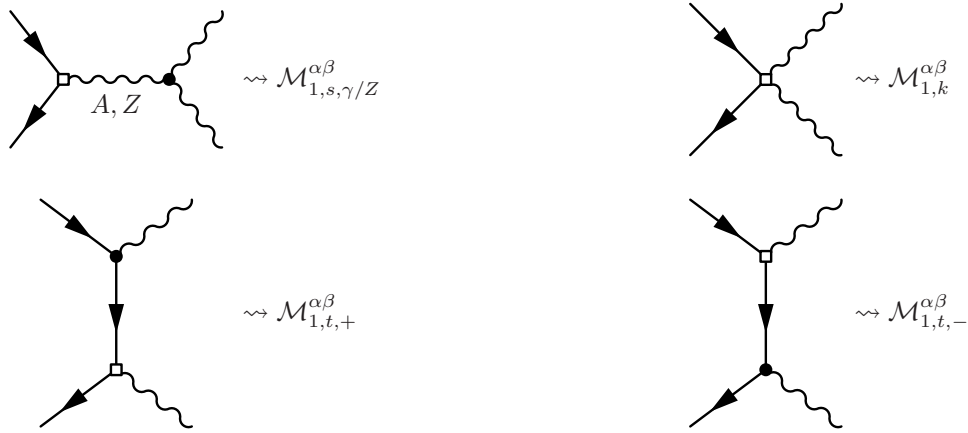
³Da die W -Bosonen auslaufend sind, tritt der konjugierte Polarisationsvektor $\epsilon^{\mu*}$ auf. Um die Rechnungen nicht unnötig unübersichtlich zu machen, wird jedoch im weiteren die Polarisation o.B.d.A als linear und der Polarisationsvektor als reell angenommen, so daß auf die Konjugation verzichtet werden kann.

Bildet man die Summe der einzelnen Beiträge, so erhält man mit der Definition der Elementarladung (3.5)

$$\mathcal{M}_0^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = \left(\frac{ie^2}{3} - \frac{ig^2 g'^2}{3(g^2 + g'^2)} \right) \bar{v}(q) \not{\epsilon}^- \Pi^+ u(p) + \left(\frac{ie^2}{3} + \frac{ig^2}{2(g^2 + g'^2)} \left(g^2 + \frac{g'^2}{3} \right) - \frac{ig^2}{2} \right) \bar{v}(q) \not{\epsilon}^- \Pi^- u(p) = 0$$

Damit ist die Ward-Identität für den Standardmodellanteil der Amplitude \mathcal{M}_0^d gezeigt.

Betrachten wir nun den nichtkommutativen Anteil der Amplitude \mathcal{M}_1^d . Wie bereits bei der Ableitung des Vertex (3.22) erwähnt wurde, kann man leicht nachrechnen, daß der kinematische Faktor $\theta((k_1, \alpha), (k_2, \beta), (k_3, \gamma))$ an den Vertizes (3.42) und (3.43) verschwindet, wenn man ihn mit einem der Impulse kontrahiert. Daher erfüllen die beiden s -Kanal-Diagramme, die diese Vertizes enthalten, die Ward-Identität separat. Die Helizitätsamplituden für die verbleibenden Diagramme werden wie folgt bezeichnet



und der Parameter λ zur besseren Lesbarkeit weggelassen. Die beiden s -Kanal-Amplituden unterscheiden sich von ihren kommutativen Gegenstücken $\mathcal{M}_{0,s,\gamma}^{\alpha\beta}$ und $\mathcal{M}_{0,s,Z}^{\alpha\beta}$ lediglich durch die Ersetzung der Matrix γ^μ durch den Faktor $\frac{i}{2} p_\sigma q_\rho \theta^{\sigma\rho\mu}$ (siehe (3.19)). Mit der Dirac-Gleichung für Spinoren (B.9) folgt

$$\bar{v}(q) p_\sigma q_\rho \theta^{\sigma\rho\mu} \Pi^\pm u(p) = \bar{v}(q) (p\theta q) \gamma^\mu \Pi^\pm u(p)$$

und somit erhält man ohne weitere Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1,s,\gamma}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- &= -\frac{i}{2} (p\theta q) \mathcal{M}_{0,s,\gamma}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = \frac{e^2}{6} (p\theta q) \bar{v}(q) \not{\epsilon}^- (\Pi^+ + \Pi^-) u(p) \\ \mathcal{M}_{1,s,Z}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- &= -\frac{i}{2} (p\theta q) \mathcal{M}_{0,s,Z}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = -\frac{g^2 (p\theta q)}{2(g^2 + g'^2)} \bar{v}(q) \left(\frac{g'^2}{3} \Pi^+ - \frac{1}{2} \left(g^2 + \frac{g'^2}{3} \right) \Pi^- \right) \not{\epsilon}^- u(p) \end{aligned}$$

Mit der Feynmanregel (3.33) erhält man für die erste der beiden t -Kanal-Amplituden den Ausdruck

$$\mathcal{M}_{1,t,+}^{\alpha\beta} k_\alpha^+ \epsilon_\beta^- = -\frac{g^2}{4t} \bar{v}(q) (p - k^-)_\sigma q_\rho k_\alpha^+ \theta^{\sigma\rho\alpha} (\not{p} - \not{k}^-) \not{\epsilon}^- \Pi^- u(p)$$

Aufgrund der Antisymmetrie von $\theta^{\sigma\rho\alpha}$ in allen drei Indizes gilt mit der Impulserhaltung

$$(p - k^-)_\sigma q_\rho k_\alpha^+ \theta^{\sigma\rho\alpha} = (k^+ - q)_\sigma q_\rho k_\alpha^+ \theta^{\sigma\rho\alpha} = 0$$

und somit folgt

$$\mathcal{M}_{1,t,+}^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = 0$$

Für das zweite t -Kanal-Diagramm gilt

$$\mathcal{M}_{1,t,-}^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = \frac{g^2}{4t} \bar{v}(q) \not{k}^{+} (\not{p} - \not{k}^{-}) p_{\sigma} (p - k^{-})_{\rho} \epsilon_{\beta}^{-} \theta^{\sigma\rho\beta} \Pi^{-} u(p)$$

Mit demselben Trick, der bereits bei der Umformung des t -Kanal-Diagramms im Standardmodellanteil verwendet wurde, zeigt man

$$\bar{v}(q) \not{k}^{+} (\not{p} - \not{k}^{-}) = t \bar{v}(q)$$

und unter erneuter Verwendung der Dirac-Gleichung sowie der Antisymmetrie von $\theta^{\mu\nu}$ folgt für die Amplitude

$$\mathcal{M}_{1,t,-}^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = \frac{g^2}{4} \bar{v}(q) \left(k^{-} \theta p \not{\epsilon}^{-} + p \theta \epsilon^{-} \not{k}^{-} \right) \Pi^{-} u(p) = \frac{g^2}{4} \bar{v}(q) \left(k^{-} \theta p \not{\epsilon}^{-} + \epsilon^{-} \theta p \not{k}^{+} \right) \Pi^{-} u(p)$$

Als letzte Amplitude bleibt das Kontakt diagramm zu berechnen, für welches aus der Feynmanregel (3.39) folgt

$$\mathcal{M}_{1,k}^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = \frac{g^2}{4} \bar{v}(q) k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} (q - k^{-})_{\mu} \theta^{\alpha\beta\mu} \Pi^{-} u(p)$$

Mithilfe der Dirac-Gleichung und der Impulserhaltung läßt sich diese Gleichung umformen zu

$$\mathcal{M}_{1,k}^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = -\frac{g^2}{4} \bar{v}(q) \left(p \theta k^{+} \not{\epsilon}^{-} + \epsilon^{-} \theta p \not{k}^{+} \right) \Pi^{-} u(p)$$

Untersucht man nun die Summe der einzelnen Amplituden, so zerfällt diese wieder in einen zu Π^{+} und einen zu Π^{-} proportionalen Teil. Zu dem zu Π^{+} proportionalen Teil tragen nur die beiden s -Kanal-Diagramme bei, und da diese sich nur durch einen Faktor von den Standardmodellamplituden unterscheiden, ist dieser Teil gleich Null. Der zu Π^{-} proportionale Teil teilt sich in einen zu $\not{\epsilon}^{-}$ proportionalen Term (zu welchem alle vier Amplituden beitragen) und einen zu \not{k}^{+} proportionalen Term auf. Der zu \not{k}^{+} proportionale Teil enthält nur Beiträge aus dem t -Kanal-Diagramm und dem Kontakt diagramm, die sich offensichtlich wegheben. Als Rest bleibt

$$\mathcal{M}_1^{\alpha\beta} k_{\alpha}^{+} \epsilon_{\beta}^{-} = \frac{1}{12} \frac{g^2}{g^2 + g'^2} \left((p\theta q)(2g'^2 + 3g^2 + g'^2) + 3 \left((k^{-} \theta p) - (p\theta k^{+}) \right) (g^2 + g'^2) \right) \bar{v}(q) \not{\epsilon}^{-} \Pi^{-} u(p)$$

Ersetzt man unter Verwendung der Impulserhaltung und der Antisymmetrie von $\theta^{\mu\nu}$ den Term $k^{-} \theta p$ durch

$$k^{-} \theta p = p \theta k^{+} - p \theta q$$

so wird auch dieser Teil der Summe Null, und die Ward-Identität ist somit für den nichtkommutativen Teil der Amplitude \mathcal{M}_1^d gezeigt.

Die Rechnung für den Prozess $u\bar{u} \rightarrow W^{+}W^{-}$ verläuft vollkommen analog, nur daß in diesem Falle das zweite u -Kanal-Diagramm verschwindet und für das Kontakt diagramm die Vertexregel (3.38) verwendet werden muß. Auch die Kontraktion mit k^{-} anstelle von k^{+} verläuft genauso, so daß diese Fälle hier nicht mehr explizit vorgerechnet werden. Der so durchgeführte Test der Ward-Identität ist ein Indiz für die Richtigkeit der im letzten Kapitel abgeleiteten Feynmanregeln, da bis auf die drei Eichbosonen koppelnden NC-Vertizes sämtliche Vertizes an den Auslöschungen der einzelnen Teile der Amplitude beteiligt sind.

4.3 Analytische Berechnung der quadrierten Feynmanamplitude

Zur Berechnung analytischer Ausdrücke für das Betragsquadrat der Feynmanamplituden zu den in diesem Kapitel diskutierten Prozessen wurde das Programm FORM von J. Vermaseren verwendet (für eine kurze Beschreibung siehe z.B. [29]). Da es im Experiment nicht möglich ist, die Polarisierungen der einlaufenden Quarks zu kontrollieren, wurde über diese gemittelt, und um das (ohnehin recht umfangreiche Ergebnis) in einer Größe zu halten, welche mit dem Programm Mathematica sinnvoll weiterverarbeitet werden kann, wurde über die Polarisierungen der Eichbosonen summiert. Außerdem wurden die Quarks (wie bereits erwähnt) als masselos angenommen und die Z -Breite vernachlässigt.

Zur Berechnung des Betragsquadrates wurden die üblichen Methoden der Spurbildung verwendet (welche als bekannt vorausgesetzt werden; eine Herleitung findet sich z.B. in [27]). Bezeichnet man die „amputierten“ Amplituden, bei denen die Spinoren entfernt wurden, mit einem Tilde (also z.B. $\widetilde{\mathcal{M}}$), so gilt mit (4.4) für das über die Spins gemittelte und über die Polarisierungen summierte Betragsquadrat bis zur 1. Ordnung in λ

$$\sum |\hat{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{12} \sum_{r,s} \Re \left(\left(\text{Tr} \widetilde{\mathcal{M}}_0^{\alpha\beta} \widetilde{\mathcal{M}}_0^{\sigma\beta\dagger} + 2\text{Tr} \widetilde{\mathcal{M}}_0^{\alpha\beta} \widetilde{\mathcal{M}}_1^{\sigma\beta\dagger} \right) \epsilon_{r,\sigma}^+ \epsilon_{r,\alpha}^{+\ast} \epsilon_{s,\rho}^- \epsilon_{s,\beta}^{-\ast} \right) \quad (4.8)$$

Der Faktor $\frac{1}{12}$ setzt sich aus einem Faktor $\frac{1}{4}$ aus der Spinmittelung und dem Farbfaktor $\frac{1}{3}$ zusammen (da die elektroschwache Wechselwirkung die Farben nicht mischt, führen nur 3 der 9 möglichen Farbkombinationen zu einem nichtverschwindenden Matrixelement). Da nur über die physikalischen Polarisierungen der W -Bosonen summiert wird, müssen keine Diagramme mit äußeren Geistern berücksichtigt werden, und die Polarisationsvektoren können durch die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_r \epsilon_r^\mu \epsilon_r^{\nu\ast} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \quad (4.9)$$

für ein Eichboson der Masse m in unitärer Eichung eliminiert werden.

Da der nichtkommutative Anteil des Matrixelements in (4.8) lediglich innerhalb des Interferenzterms auftaucht, tragen nur diejenigen Kombinationen von Diagrammen zu dem Betragsquadrat bei, deren Spur im Interferenzterm nicht rein imaginär ist. Jedes Diagramm setzt sich aus einem Vorfaktor und einer Spur über ein Produkt von von Gammamatrizen zusammen. Wie im Anhang B gezeigt ist eine solche Spur rein imaginär, falls sie einen Faktor γ^5 enthält, und ansonsten rein reell. Da an jedem Standardmodellvertex ein Faktor i steht, und die Propagatoren ebenfalls rein imaginär sind, sind die Vorfaktoren aller Standardmodelllidiagramme rein imaginär, während die Vorfaktoren aller NC-Diagramme rein reell sind (da alle NC-Vertizes einen reellen Vorfaktor haben). Daher tragen nur Kombinationen von NC- und Standardmodelllidiagrammen bei, bei welchen die Spur einen Faktor γ^5 enthält. Aufgrund der linkshändigen Kopplung der W - und Z -Bosonen an die Fermionen sind die einzige Kombinationen, die diese Voraussetzung nicht erfüllen, die Produkte aus NC- und Standardmodelllidiagrammen mit je einem Photon im s -Kanal. Also tragen die Interferenzterme von zwei Diagrammen mit einem Photon im s -Kanal nicht zum Betragsquadrat der Feynmanamplitude bei. Diese Aussage bleibt gültig, wenn Z -Breite sowie die Quarkmassen endlich gewählt werden. Untersucht man jedoch die Produktion polarisierter W -Bosonen, so sind die Polarisationsvektoren zusätzliche Quellen für Faktoren i , so daß die oben angestellten Überlegungen in diesem Fall keine Gültigkeit mehr haben.

Aus kinematischen Überlegungen kann man weitere Informationen über die Form der Amplitude gewinnen. Da sich der Tensor $\theta^{\mu\nu}$ mit zwei Dreivektoren \vec{E} und \vec{B} unter Rotationen darstellen läßt (siehe (2.3)), dürfen diese Vektoren nur in Kombinationen mit $\vec{p} = -\vec{q}$ und $\vec{k}^- = -\vec{k}^+ = \vec{k}$ auftreten, die invariant unter Rotationen sind. Da die Entwicklung nach der 1. Ordnung in λ abgebrochen wurde, müssen alle Beiträge linear in den Komponenten der Vektoren \vec{E} und \vec{B} sein, und mit der Parame-

trisierung der Impulse (4.2) sind für \vec{E} alle in Frage kommenden Kombinationen

$$\begin{aligned}\vec{p}\vec{E} &= \frac{\sqrt{s}}{2}E_3 \\ \vec{k}\vec{E} &= \vec{k}_L\vec{E}_L + \vec{k}_\perp\vec{E}_\perp = |k|(\cos\theta E_3 + \sin\theta(E_1\cos\phi + E_2\sin\phi)) \\ \vec{p}(\vec{E} \times \vec{k}) &= \vec{p}(\vec{E}_\perp \times \vec{k}_\perp) = \frac{\sqrt{s}}{2}|k|\sin\theta(E_1\sin\phi - E_2\cos\phi)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Dabei bezeichnen die Indizes L bzw. \perp die bezüglich der Strahlachse longitudinalen bzw. transversalen Anteile der Impulse. Dieselben Relationen gelten auch für den Vektor \vec{B} . Da der Wirkungsquerschnitt invariant unter Drehungen um die Strahlachse sein muß, falls \vec{E} und \vec{B} ebenfalls gedreht werden, können die Terme (4.10) nur mit von ϕ unabhängigen Faktoren multipliziert vorkommen. Somit kann der Wirkungsquerschnitt nur Terme enthalten, die höchstens linear in $\cos\phi$ und $\sin\phi$ sind, und alle zu E_3 und B_3 proportionalen Anteile müssen unabhängig von ϕ sein.

Zur Implementation dieser Rechnung in FORM wurden zunächst die in dieser Arbeit benötigten Feynmanregeln des nmNCSM in einer Bibliothek zusammengestellt. Aus diesen wurden dann die einzelnen Diagramme zusammengesetzt. Auch bei dieser Rechnung wurde die Ward-Identität für den nichtkommutativen Anteil der Amplitude \mathcal{M}_1 kontrolliert: da die Ward-Identität für alle Kombinationen von Spins und physikalischen Polarisierungen gültig sein muß, ist sie genau dann erfüllt, wenn sie von dem über die Spins und Polarisierungen summierten Betragsquadrat erfüllt wird⁴ (die Ausführung der Spinsumme kann durch Spurbildung geschehen, was ein wesentlicher Vorteil für die konkrete Rechnung in FORM ist). Zur Vereinfachung der Rechnung wurden die Polarisationsvektoren o.B.d.A reell angenommen. Danach wurden mit FORM die Spur berechnet, die Eichbosonmassen auf Null gesetzt, die Transversalität des verbleibenden Polarisationsvektors implementiert und der vereinfachte Ausdruck an das Programm Maple weitergegeben. In einem letzten Schritt wurde mit Maple gezeigt, daß der (recht komplizierte Ausdruck) gleich Null ist. Auf diese Art und Weise wurden die berechneten Amplituden \mathcal{M}_1^d und \mathcal{M}_1^u sowohl für die Kontraktion mit k^+ als auch mit k^- überprüft.

Zur Berechnung der quadrierten Amplituden wurden die Diagramme jeweils mit einem formalen Vorfaktor „markiert“, die Vollständigkeitsrelation (4.9) eingesetzt und anschließend die Spur berechnet. Besondere Sorgfalt verlangt dabei die Behandlung von γ^5 , da FORM nicht die Minkowski-Metrik, sondern die euklidische Metrik implementiert. Die Produkte von Impulsen wurden mit Mandelstamvariablen ausgedrückt, und die Kontraktionen von Impulsen mit $\theta^{\mu\nu}$ sowie mit dem Levi-Civita-Tensor im Bezugssystem Abb.4.1 parametrisiert. Anschließend wurde der Realteil des Ausdrucks extrahiert und an Mathematica weitergegeben. In Mathematica wurde die quadrierte Amplitude in ihren Standardmodellanteil und ihren nichtkommutativen Anteil getrennt und diese mit Hilfe der „Markierungsfaktoren“ weiter in die Beiträge der einzelnen Diagramme zerlegt. Diese wurden anschließend getrennt vereinfacht.

Die explizite Rechnung zeigt sowohl für down- als auch up-Quarks, daß die oben angestellten Überlegungen zutreffen — es gibt keine Beiträge von Interferenztermen, die zwei Photonen in s -Kanälen enthalten. Eine zunächst vorhandene Abhängigkeit von \vec{B} hebt sich bei sorgfältiger Untersuchung in jedem Interferenzterm weg, ebenso wie die Abhängigkeit von der longitudinalen Komponente E_3 von \vec{E} und es bleibt eine Abhängigkeit von \vec{E}_\perp die dem Spatprodukt von \vec{p} , \vec{E} und \vec{k} proportional ist (siehe (4.10)). Damit nimmt die gesamte Feynmanamplitude für beide Prozesse die Form an

$$\left|\hat{\mathcal{M}}^{d/u}\right|^2 = M^{d/u} + \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2}|k|\sin\theta(E_1\sin\phi - E_2\cos\phi)\hat{M}^{d/u}\quad (4.11)$$

Der Faktor $M^{d/u}$ ist der Standardmodellanteil der Amplitude, und $\hat{M}^{d/u}$ stellt zusammen mit dem Vorfaktor den nichtkommutativen Anteil der Amplitude in 1. Ordnung λ dar. Der einzige Parameter

⁴Das Betragsquadrat bezeichnet hier $|\mathcal{M}_1|^2$.

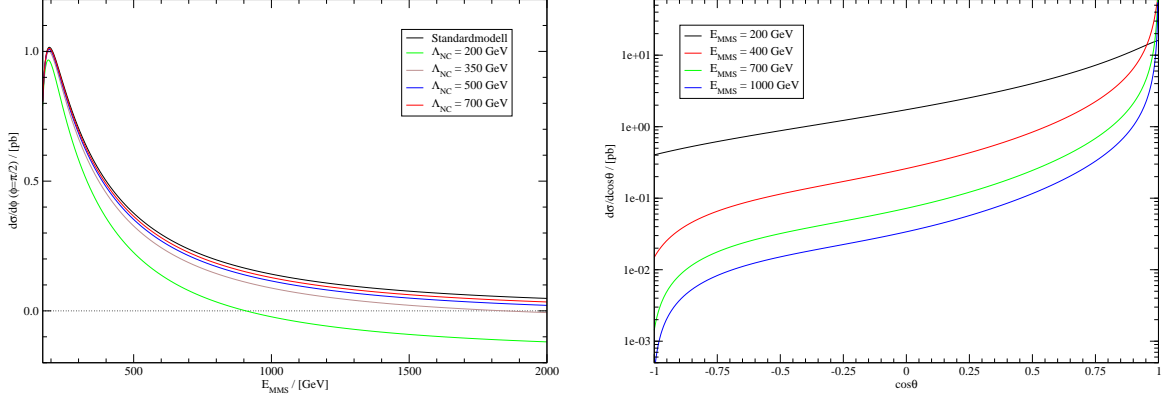


Abbildung 4.2: links: Maximale Abweichung des über $\cos \theta$ integrierten Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ im nmNCSM für verschiedene Werte von Λ_{NC} ; Prozess: $d\bar{d}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ rechts: differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ im SM für verschiedene Werte von $E_{\text{MMS}} = \sqrt{s}$; Prozess: $d\bar{d}$

des nmNCSM, von dem $\hat{M}^{d/u}$ abhängt, ist die Spur κ_2 (siehe (3.13)). Sowohl M als auch $\hat{M}^{d/u}$ sind nicht von ϕ abhängig und lassen sich somit prinzipiell lorentzinvariant durch Mandelstamvariablen ausdrücken. Für den Fall einlaufender down-Quarks findet sich der vollständige Ausdruck nach den beitragenden Diagrammen aufgeschlüsselt im Anhang E.

Aus (4.11) folgt, daß in 1. Ordnung von λ die einzige Auswirkung der nichtkommutativen Struktur der Raumzeit eine Oszillation der Form

$$\Delta \frac{d\sigma}{d\phi} \propto \sin(\phi - \alpha)$$

(mit dem Winkel α zwischen \vec{E}_\perp und der x_1 -Achse) um den kommutativen Wert ist. Eine von ϕ unabhängige nichtkommutative Korrektur tritt nicht auf, und daher verschwinden alle nichtkommutativen Effekte bei Integration über ϕ . Im Folgenden wird die Größenordnung anhand einiger Plots sowohl für den Prozess⁵ $d\bar{d}$ als auch für den Prozess $u\bar{u}$ diskutiert. Da eine Änderung von \vec{E} nur eine lineare Skalierung des NC-Anteils des Wirkungsquerschnitts sowie eine Phasenverschiebung der Oszillation bedeutet, wurde $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$ gewählt. Die verwendeten Parameter sind im Anhang C aufgeführt, wobei die Z -Breite bei der analytischen Rechnung vernachlässigt wurde.

Die Graphen Abb.4.2 links sowie Abb.F.1 links zeigen die maximale Abweichung von $\frac{d\sigma}{d\phi}$ im nmNCSM im Vergleich zum Standardmodell. Offensichtlich sind die Abweichungen für Werte der Skala $\Lambda_{\text{NC}} > 350$ GeV nur von der Größenordnung 10^{-2} pb, was für Energien $\sqrt{s} < 500$ GeV einigen Prozent des Standardmodellwirkungsquerschnitt entspricht. Nur im Falle einer sehr niedrig gewählten NC-Skala $\Lambda_{\text{NC}} = 200$ GeV sind die nichtkommutativen Effekte so stark, daß der Wirkungsquerschnitt unterhalb von 1.8 TeV negativ und somit der nichtkommutative Beitrag von der Größenordnung des Standardmodellanteils wird (vgl. Abschnitt 4.2).

In Abb.4.2 rechts und Abb.F.1 rechts ist die Abhängigkeit des über ϕ integrierten differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ von $\cos \theta$ für verschiedene Energien \sqrt{s} im Standardmodell gezeigt. Der Wirkungsquerschnitt hat ein scharfes Maximum bei $\theta = 0$ ($d\bar{d}$) bzw. $\theta = \pi$ ($u\bar{u}$) und fällt dann sehr schnell um eine bis zwei Größenordnungen ab. Dieses Verhalten ist nicht überraschend und eine Folge der

⁵Die Prozesse $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$ und $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$ werden im Folgenden zur besseren Lesbarkeit des Textes nur noch mit den einlaufenden Quarks bezeichnet.

Struktur der Feynmanamplitude. Für t bzw. u gilt bei Energien $E \gg 2m_W$

$$t \approx m_W^2 - \frac{s}{2}(1 - \cos\theta) \quad u \approx m_W^2 - \frac{s}{2}(1 + \cos\theta)$$

Damit gilt für die Verhältnisse zwischen den t - bzw. u -Kanal-Propagatoren und dem s -Kanal-Propagator

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{t} = -\frac{2}{1 - \cos\theta} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{u} = -\frac{2}{1 + \cos\theta}$$

Also ist zu erwarten, daß in der Umgebung von $\cos\theta = 1$ ($d\bar{d}$) bzw. $\cos\theta = -1$ ($u\bar{u}$) die t - bzw. u -Kanal-Diagramme bei Energien $E \gg 2m_W$ stark dominieren. Geht der Wirkungsquerschnitt in allen anderen Bereichen des Phasenraums gegen Null, so ergibt sich das beobachtete Verhalten. Da sich das t -Kanal-Diagramm für den Prozess $d\bar{d}$ und das u -Kanal-Diagramm für $u\bar{u}$ nur durch Vertauschung von W^+ und W^- unterscheiden, kann man erwarten, daß sich für Energien $E \gg 2m_W$ die Wirkungsquerschnitte ebenfalls nur durch eine Vertauschung der Eichbosonen unterscheiden. Dies sollte auch im nmNCSM gelten, da die Kontaktvertices (3.39) und (3.38) sich genauso nur durch die Vertauschung der Eichbosonen unterscheiden (man beachte die Impulserhaltung am Vertex sowie die Antisymmetrie von $\theta^{\sigma\rho\mu}$). Vergleicht man die unterschiedlichen Plots miteinander, so findet man diese Erwartungen bestätigt.

Abb.F.2–F.5 zeigen die maximale Abweichung von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ vom Standardmodell für verschiedene Werte von \sqrt{s} und Λ_{NC} in Abhängigkeit von $\cos\theta$. Um den Effekt des neuen Parameters κ_2 zu untersuchen, ist außerdem sowohl die von κ_2 unabhängige als auch die in κ_2 lineare prozentuale Abweichung dargestellt. Die Abweichungen für andere Werte von Λ_{NC} als auch κ_2 lassen sich aus diesen Graphen leicht durch Skalierung berechnen. Man erkennt, daß die NC-Korrektur stark von dem von κ_2 unabhängigen Anteil dominiert wird. Die beiden Anteile unterscheiden sich ihre Amplitude und für $\kappa_2 > 0$ durch ihr Vorzeichen, zeigen aber einen ähnlichen Verlauf, so daß der Effekt von κ_2 eine leichte Verringerung (für $\kappa_2 > 0$) bzw. Verstärkung (für $\kappa_2 < 0$) der azimuthalen Oszillation ist. Bei einer Skala $\Lambda_{\text{NC}} = 500 \text{ GeV}$ und einer Energie $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$ beträgt die maximale Abweichung über 100%; allerdings unterscheidet sich der Wirkungsquerschnitt hier um drei Größenordnungen von seinem Maximum, so daß dieser Teil des Phasenraums keinerlei experimentelle Relevanz mehr besitzt. Ein zweites Maximum der Abweichung befindet sich bei etwa 1% des Maximums; der Wirkungsquerschnitt oszilliert hier um etwa 20% des Standardmodellwertes. Am Maximum selbst beträgt die Abweichung höchstens etwa 1%.

Auch wenn die in diesem Abschnitt gefundenen Abweichungen des über die Polarisierungen summierten Wirkungsquerschnitts im nmNCSM vom Standardmodell recht klein sind und daher die Aussichten auf eine experimentelle Überprüfung eher schlecht scheinen, wird der nächste Abschnitt zeigen, daß bei der Erzeugung polarisierter Eichbosonen der Wirkungsquerschnitt deutlich stärker oszilliert, was eine experimentelle Untersuchung möglich erscheinen läßt. Bemerkenswert ist, daß im Schwerpunktsystem durch die Polarisationssumme jede Abhängigkeit von \vec{B} und von der longitudinalen Komponente von \vec{E} verschwindet. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß zumindest die Unabhängigkeit des Querschnitts von \vec{B} eine Konsequenz der CP-Symmetrie des nmNCSM ist.

4.4 Die Produktion polarisierter W -Bosonen

Um die Produktion polarisierter W -Bosonen zu untersuchen (und als Vorbereitung für die Simulation von Ereignissen mithilfe von Monte-Carlo-Generatoren in den nächsten beiden Kapiteln) wurden die Feynmanregeln des nmNCSM in der Sprache FORTRAN 95 implementiert. Als Basis der Implementation wurden die FORTRAN-Bibliotheken des Pakets O'Mega gewählt. O'Mega ist ein in der Sprache OCaml implementierter Generator für Matrixelemente, der für einen vorgegebenen Prozess die Berechnung des Matrixelements in einem FORTRAN 95-Modul umsetzt. Diesen Modulen liegt ein Satz von Bibliotheken zugrunde, in denen Spinoren, Vektoren und Tensoren sowie deren Verknüpfungen

definiert und die Feynmanregeln und Propagatoren des Standardmodells implementiert sind. Für eine nähere Beschreibung von O'Mega siehe [30]; der die nichtkommutativen Vertizes implementierende Code befindet sich im Anhang D.1.1. Zur Produktion der in diesem Abschnitt diskutierten Plots wurden dieselben Parameter wie im letzten Kapitel verwendet, wobei allerdings die Z -Breite nicht mehr vernachlässigt wurde.

Mithilfe der um die Vertizes des nmNCSM erweiterten O'Mega-Bibliotheken wurden die nichtkommutativen Anteile der Feynmanamplituden sowohl für den Prozess $d\bar{d}$ als auch für den Prozess $u\bar{u}$ von Hand implementiert (ein Beispiel findet sich im Anhang D.1.2). Zusammen mit den von O'Mega generierten Standardmodellamplituden wurde daraus das Betragsquadrat der Feynmanamplitude (4.4) berechnet. Auch hier wurde die Ward-Identität numerisch überprüft, indem einer der zwei Polarisationsvektoren durch den Impuls ersetzt wurde (bei verschwindender Z -Breite sowie W - und Z -Masse). In allen Fällen ergeben sich so für das Matreixelement Werte der Größenordnung⁶ $10^{-32} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$, die außer numerischem Rauschen keinerlei funktionale Abhängigkeit mehr von ϕ und $\cos\theta$ aufweisen — die Ward-Identität kann also als numerisch erfüllt betrachtet werden.

Da der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ als Funktion von $\cos\theta$ nur in der Nähe von 1 (im Falle $d\bar{d}$) bzw. -1 (im Falle $u\bar{u}$) wesentlich zum integrierten Wirkungsquerschnitt beiträgt und in allen anderen Teilen des Phasenraums um mehrere Größenordnungen von seinem Maximum abweicht, wurde der Wirkungsquerschnitt für die Plots, welche die Abhängigkeit von ϕ zeigen, über das gesamte Intervall $[-1; 1]$ über $\cos\theta$ integriert. Die nichtkommutative Korrektur tritt in 1. Ordnung λ nur multipliziert mit der Standardmodellamplitude auf, und zeigt daher den gleichen Abfall, so dass eine Einschränkung des Integrationsintervalls die meßbare Oszillation nicht wesentlich verbessert (dies wurde auch numerisch geprüft). Zur numerischen Integration der quadrierten Feynmanamplitude über $\cos\theta$ und ϕ wurde die Simpson-Regel verwendet (siehe z.B. [31]). Statt über $\cos\theta$ wurde die Integration über θ ausgeführt

$$\int_{-1}^{+1} d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi}$$

um die numerische Stabilität zu verbessern (da der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\cos\theta$ bei $\cos\theta = 1$ (im Falle $d\bar{d}$) bzw. $\cos\theta = -1$ (im Falle $u\bar{u}$) sehr steil abfällt).

Zunächst wollen wir untersuchen, welche der im letzten Kapitel abgeleiteten Eigenschaften des Wirkungsquerschnitts sich bei der Produktion polarisierter Eichbosonen ändern. Eine mögliche Darstellung der Polarisationsvektoren⁷ des W^- im Koordinatensystem Abb.4.1 ist

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm}^{\mu} &= \epsilon_{\mp}^{\mu*} = (0, \cos\theta \cos\phi \mp i \sin\phi, \cos\theta \sin\phi \pm i \cos\phi, -\sin\theta)^{\mu} = (0, \vec{\epsilon}_{\pm})^{\mu} \\ \epsilon_0^{\mu} &= \frac{k^0}{m_W} \left(\frac{|k|}{k^0}, \sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta \right)^{\mu} = \frac{1}{m_W} \left(|k|, \frac{k^0}{|k|} \vec{k} \right)^{\mu} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die transversalen Polarisationsvektoren sind komplex und somit eine zusätzliche Quelle für Faktoren i , so daß nun auch Produkte von Diagrammen mit Photonen im s -Kanal beitragen können. An der Linearität der nichtkommutativen Korrektur des Wirkungsquerschnitts in den NC-Vektoren sowie $\frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2}$ und der Invarianz unter Drehungen um die Strahlachse (sofern \vec{E} und \vec{B} ebenfalls gedreht werden) ändert sich jedoch nichts, und daher müssen die zu den longitudinalen Komponenten von \vec{E} und \vec{B} proportionalen Anteile nach wie vor von ϕ unabhängig sein. Ebenso darf eine Drehung der NC-Vektoren um die Strahlachse nach wie vor nur eine Phasenverschiebung einer eventuellen Oszillation mit ϕ bewirken. Da im polarisierten Fall auch die Polarisationsvektoren für Kontraktionen mit $\theta^{\mu\nu}$ zur Verfügung

⁶Die Auslöschung findet in den Matrixelementen statt, so daß die Größenordnung von 10^{-32} der Unterdrückung des Wirkungsquerschnitts eine Unterdrückung des Matrixelements mit einem Faktor 10^{-16} bedeutet, was in etwa der Genauigkeit einer Double-Variablen entspricht.

⁷Polarisation positiver bzw. negativer Helizität wird im folgenden immer mit „+“ bzw. „-“ bezeichnet, und longitudinale Polarisation wird mit „0“ gekennzeichnet.

stehen, gibt es nun eine reichhaltigere Auswahl an möglichen rotationsinvarianten Termen, die mit den NC-Vektoren gebildet werden können. Die einzigen möglichen Kombinationen, die zu in $\sin \phi$ und $\cos \phi$ quadratischen Termen führen können, sind mit (4.12)

$$\vec{E}(\vec{\epsilon}_+ \times \vec{\epsilon}_-) \quad \vec{E}(\vec{\epsilon}_\pm \times \vec{k})$$

(und die entsprechenden Produkte mit \vec{B}). Man kann sich durch explizite Rechnung leicht davon überzeugen, daß diese Produkte wieder höchstens linear in $\sin \phi$ und $\cos \phi$ sind, und somit gilt dies für den gesamten Wirkungsquerschnitt.

Im Standardmodell folgt außerdem aus der CP-Symmetrie ein Zusammenhang zwischen den quadrierten Amplituden zu bestimmten Kombinationen von Polarisierungen. Unter einer Paritätstransformation transformiert sich im Massenmittelpunktsystem ein Satz von Zuständen⁸

$$|(d, p); (\bar{d}, q)\rangle \quad |(W^+, k^+, \lambda_+); (W^-, k^-, \lambda_-)\rangle$$

zu

$$|(d, q); (\bar{d}, p)\rangle \quad |(W^+, k^-, -\lambda_+); (W^-, k^+, -\lambda_-)\rangle$$

mit den Helizitäten λ_\pm der W -Bosonen (aufgrund der Spinsumme ignorieren wir den Spin der Quarks), und unter einer darauffolgenden C-Transformation transformieren die Zustände zu

$$|(\bar{d}, q); (d, p)\rangle \quad |(W^-, k^-, -\lambda_+); (W^+, k^+, -\lambda_-)\rangle$$

was bis auf Vertauschen der Polarisierungen und „Umklappen“ von transversalen Polarisierungen wieder den ursprüngliche Zuständen entspricht. Also folgen für das Standardmodell die Identitäten⁹

$$|\mathcal{M}_{++}^{\text{SM}}|^2 = |\mathcal{M}_{--}^{\text{SM}}|^2 \quad |\mathcal{M}_{+0}^{\text{SM}}|^2 = |\mathcal{M}_{0-}^{\text{SM}}|^2 \quad |\mathcal{M}_{-0}^{\text{SM}}|^2 = |\mathcal{M}_{0+}^{\text{SM}}|^2$$

Um diese Relationen auf das NCSM zu übertragen, muß man den Tensor $\theta^{\mu\nu}$ korrekt transformieren. Da $\theta^{\mu\nu}$ ein Lorentztensor ist, transformieren unter Paritätstransformationen \vec{E} wie ein Vektor und \vec{B} wie ein Pseudovektor

$$\vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{E} \quad \vec{B} \xrightarrow{P} \vec{B}$$

Um die CP-Invarianz einer aus einer CP-invarianten Theorie konstruierten nichtkommutativen Theorie sicherzustellen, muß man eine nichttriviale Transformation von $\theta^{\mu\nu}$ unter Ladungskonjugation fordern

$$\theta^{\mu\nu} \xrightarrow{C} -\theta^{\mu\nu}$$

(eine Herleitung in der NCQED findet sich in [32]; das Argument wird in [26] auf mithilfe von Seiberg-Witten-Abbildungen konstruierte nichtabelsche Eichtheorien übertragen). Daraus folgt die Transformation der NC-Vektoren

$$\vec{E} \xrightarrow{CP} \vec{E} \quad \vec{B} \xrightarrow{CP} -\vec{B}$$

Also muß das oben abgeleitete Symmetrieargument im nmNCSM um die korrekte Transformation der Vektoren \vec{E} und \vec{B} erweitert werden. Untersucht man die numerisch berechneten Wirkungsquerschnitte für verschiedene Polarisierungen, so findet man diese Überlegung bestätigt. Die CP-Invarianz liefert auch eine elegante Begründung für den Wegfall der \vec{B} -Abhängigkeit bei der Produktion unpolarisierter Bosonen — auch der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt muß invariant unter CP-Transformationen sein,

⁸Eventuelle bei der Transformation auftretende Phasen sind für diese Überlegung unerheblich, da in den Wirkungsquerschnitt nur die Betragsquadrate der Amplituden eingehen.

⁹Falls nichts explizit anders angegeben, bezeichnen Kombinationen xy mit $x, y \in \{+, -, 0\}$ ein W^+ der Helizität x und ein W^- der Helizität y .

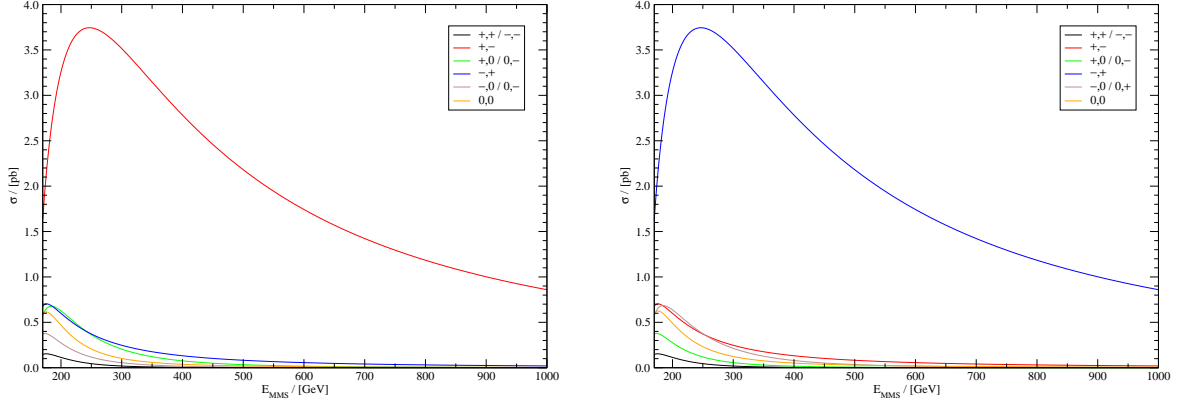


Abbildung 4.3: Totaler Wirkungsquerschnitt σ für verschiedene Helizitäten (Reihenfolge in der Legende $\lambda^+ \lambda^-$) im SM; links: $d\bar{d}$, rechts: $u\bar{u}$

und mit obigen Argument bedeutet dies Invarianz unter $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$. Also kann der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt in erster Ordnung nicht von \vec{B} abhängig sein. Dies ist konsistent mit dem in [2] erzielten Ergebniss für den Prozess $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$, bei welchem ebenfalls keine Abhängigkeit von \vec{B} auftritt (man beachte, daß die Photonen identische Teilchen sind). Auch der in [4] untersuchte Prozess $e^+e^- \rightarrow ZZ$ zeigt nach Durchführung der Spin- und Polarisationssumme keine Abhängigkeit von \vec{E} . Auf den in derselben Arbeit diskutierten Prozess $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ hingegen läßt sich diese Symmetrieüberlegung nicht anwenden, und tatsächlich zeigt der Wirkungsquerschnitt auch nach der Spin- und Polarisationssumme eine nichtverschwindende Abhängigkeit von \vec{B} .

Um einen Eindruck von dem Beitrag der verschiedenen Kombinationen von Polarisierungen zum gesamten Wirkungsquerschnitt zu erhalten, ist in Abb.4.3 der totale Wirkungsquerschnitt σ im Standardmodell für $d\bar{d}$ und $u\bar{u}$ in Abhängigkeit von \sqrt{s} wiedergegeben. Man sieht, daß der Wirkungsquerschnitt sehr stark von den Kombinationen $(+-)$ (im Falle $d\bar{d}$) bzw. $(-+)$ (im Falle $u\bar{u}$) dominiert wird. Wieder erkennt man, daß sich die Wirkungsquerschnitte der beiden Prozesse im Wesentlichen nur durch eine Vertauschung der Eichbosonen unterscheiden, was konsistent mit der Begründung dieses Effektes im letzten Kapitels ist (welche an keiner Stelle die Polarisationssumme voraussetzte).

Untersucht man die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von den longitudinalen Komponenten der NC-Vektoren, so stellt man eine Abhängigkeit von E_3 fest, die in allen Kombinationen von Polarisierungen auftritt und eine Konsequenz der endlichen Z -Breite ist. Da diese Korrektur jedoch verschwindend klein ist ($\ll 0.01\%$) soll sie hier nicht weiter beachtet werden. Für alle Kombinationen eines transversal polarisierten und eines longitudinal polarisierten Bosons findet man außerdem eine in κ_2 lineare Änderung. Für die Helizitäten -0 ($d\bar{d}$) bzw. $0-$ ($u\bar{u}$) sowie die Parameter $\sqrt{s} = 500$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 250$ GeV und $\kappa_2 = 0.5$ ist diese Verschiebung in den Graphen Abb.F.6 und Abb.F.7 über ϕ integriert dargestellt. Da dieser Effekt linear in κ_2 ist und somit nur Interferenzterme beitragen, die ein s -Kanal-Diagramm enthalten, ist es nicht verwunderlich, daß die Verschiebung für die beiden Prozesse unterschiedlich ausfällt. Beiden Prozessen gemeinsam ist jedoch das geringe Ausmaß dieses Effektes, welcher trotz des sehr niedrigen Wertes von Λ_{NC} z.B. für $u\bar{u}$ mit maximal ca. 0.75 fb an dieser Stelle nur etwa $\approx 7\%$ des ohnehin schon stark unterdrückten Standardmodellwirkungsquerschnitts ausmacht. Da bei Integration über den Azimutalwinkel die zu \vec{E}_\perp und \vec{B}_\perp proportionalen Oszillationen verschwinden, ist dieser Effekt jedoch trotz seiner geringen Amplitude von experimentellem Interesse, da er prinzipiell das Ausmessen der neuen Kopplungskonstanten κ_2 erlaubt. Untersucht man die Polarisierungen $(0+)$ ($d\bar{d}$) bzw. $(+0)$ ($u\bar{u}$), so ergibt sich die genau entgegengesetzte Verschiebung, was wie oben erläutert eine Folge der

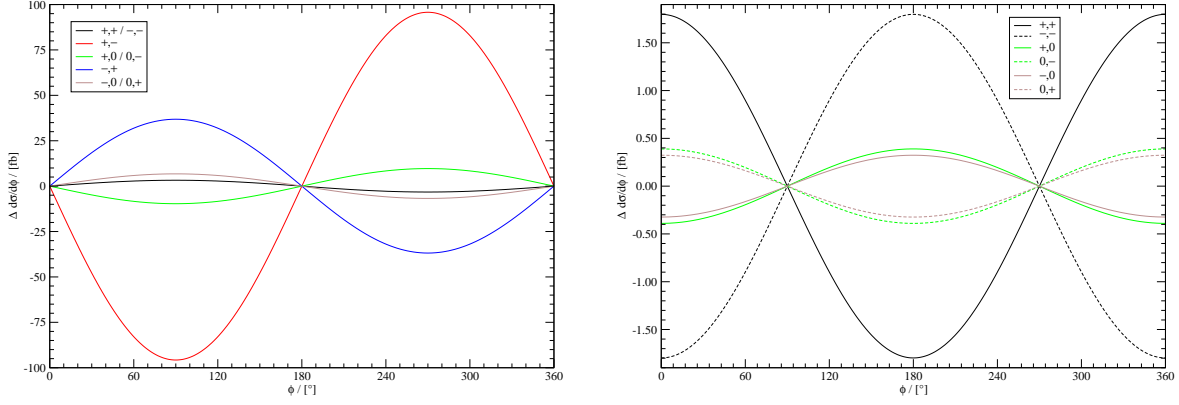


Abbildung 4.4: Oszillation des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ um den kommutativen Wert für verschiedene Helizitäten; Prozess: $d\bar{d}$, $\sqrt{s} = 200$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 200$ GeV; links: $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, rechts: $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

CP-Symmetrie ist.

Abb.4.4 links und Abb.F.8 zeigen die zu \vec{E}_\perp proportionale Oszillation des über $\cos\theta$ integrierten differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ bei $\sqrt{s} = \Lambda_{\text{NC}} = 200$ GeV bzw. $\sqrt{s} = \Lambda_{\text{NC}} = 350$ GeV für den Prozess $d\bar{d}$. Die Oszillation ist für die im Verhältnis zu den anderen Polarisationen dominante Kombination von Helizitäten $(+-)$ deutlich stärker ausgeprägt als für die anderen Kombinationen, die fast alle dazu gegenphasig sind. Daher verspricht eine selektive Beobachtung dieser Kombination bessere Chancen auf den experimentellen Nachweis einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit als die Untersuchung des unpolarisierten Wirkungsquerschnitts (es tritt auch eine Oszillation für die Kombination (00) auf, deren Amplitude aber auf der Skala der Plots nicht mehr sichtbar und deshalb weggelassen ist). Vergleicht man die beiden Graphen miteinander, so sieht man, daß mit steigender Energie die restlichen Helizitätskombinationen rasch an Bedeutung verlieren.

Untersucht man die Auswirkung von \vec{B}_\perp auf den polarisierten Wirkungsquerschnitt, so findet man für alle Helizitätskombinationen außer $(+-)$, $(-+)$ und (00) eine Oszillation des differentiellen Wirkungsquerschnitts, deren Amplitude aber etwa eine Größenordnung geringer ausfällt als die der durch \vec{E}_\perp verursachten Oszillation. Aufgrund der CP-Symmetrie sind die Oszillationen der Paare $(d\sigma_{++}; d\sigma_{--})$, $(d\sigma_{-0}; d\sigma_{0+})$ und $(d\sigma_{+0}; d\sigma_{0-})$ jeweils genau gegenphasig zueinander und heben sich in der Summe auf. Diese Oszillationen sind in Abb.4.4 rechts und F.9 gezeigt. Untersucht man die Abhängigkeit der Oszillationen von κ_2 , so zeigt sich, daß alle zu \vec{B}_\perp proportionalen Oszillationen, bei denen eine der Helizitäten longitudinal ist, proportional zu κ_2 sind und für $\kappa_2 = 0$ verschwinden. Auch dieser Effekt eröffnet prinzipiell eine Möglichkeit zur Bestimmung von κ_2 , wenn auch die Durchführbarkeit einer tatsächlichen Messung — wie schon im Falle der zu B_3 proportionalen Verschiebung — aufgrund des geringen Effekts zweifelhaft erscheint.

Dieselben Oszillationen sind in Abb.F.10 bzw. Abb.F.11 für den Prozess $u\bar{u}$ für $\sqrt{s} = \Lambda_{\text{NC}} = 350$ GeV gezeigt. Der Vergleich mit Abb.F.8 und Abb.F.9 zeigt wieder die Ähnlichkeit der beiden Prozesse: vertauscht man die Eichbosonen (was einem Vertauschen der Helizitäten und einer Phasenverschiebung der Oszillation um π entspricht), so zeigen beide Wirkungsquerschnitte sowohl dieselben Oszillationen als auch die gleiche Hierarchie der einzelnen Helizitätskombinationen. Da die zu κ_2 proportionalen Oszillationen ihren Ursprung in den nichtkommutativen Korrekturen der s -Kanal-Diagramme haben, unterscheiden sie sich für die beiden Prozesse deutlich in ihrer Amplitude, während die Amplituden

für die restlichen Kombinationen von Helizitäten annähernd gleich sind.

Kapitel 5

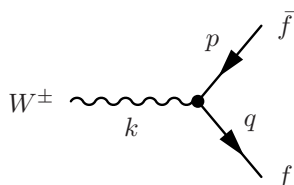
Zerfall der W -Bosonen und Rekonstruktion der Polarisationen

Die Untersuchung der W -Paarproduktion aus Quarks im letzten Kapitel läßt sich aus mehreren Gründen nicht direkt auf tatsächliche Experimente an Teilchenbeschleunigern übertragen. Da Quarks nicht frei vorkommen, sondern nur gebunden als Konstituenten von Hadronen, ist es nicht möglich, einen Anfangszustand freier Quarks mit wohldefinierten Impulse zu präparieren. Stattdessen muß man auf mit Hadronen durchgeführte Experimente zurückgreifen und den Kollisionsprozess mithilfe des Partonmodells beschreiben. Dies ist jedoch erst Gegenstand des nächsten Kapitels. Die restlichen Probleme betreffen den im letzten Kapitel untersuchten Enzustand. Da W -Bosonen sehr kurzlebige Teilchen sind, können sie im Detektor nicht direkt, sondern nur anhand ihrer Zerfallsprodukte nachgewiesen werden. Weiterhin wurde gezeigt, daß für den Nachweis einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit die Untersuchung der Produktion *polarisierter* Eichbosonen wünschenswert wäre. Dazu ist es notwendig, eine Methode zur Rekonstruktion der Polarisationen der zerfallenden Eichbosonen zu finden.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird demonstriert, daß bei dem Zerfall polarisierter W -Bosonen in Paare von Leptonen bzw. Quarks unterschiedliche Helizitäten des Eichbosons zu charakteristischen Winkelverteilungen des produzierten Fermionpaares führen. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, wie bei der Produktion polarisierter W -Bosonen und deren darauffolgem Zerfall in ein Lepton-Neutrino-Paar und ein Quarkpaar aus der Winkelverteilung der Fermionen im Prinzip die Polarisation der intermediären Eichbosonen rekonstruiert werden kann. Im dritten Abschnitt werden die zu dem Prozess $q\bar{q} \rightarrow (l\bar{\nu}_l)(u\bar{d})$ zusätzlich zu den Diagrammen der Paarproduktion auftretenden Hintergrunddiagramme zusammengestellt. Es wird gezeigt, daß die Einschränkung auf einen Teil dieser Diagramme genügt, um die Eichinvarianz des Ergebnisses sicherzustellen.

5.1 W -Zerfall und Winkelverteilung der produzierten Fermionen

Im Standardmodell ist die Feynmanamplitude für den Zerfall eines W -Bosons in ein Paar von masselosen Fermionen durch das Feynmandiagramm



gegeben, wobei der Typ der produzierten Fermionen durch die Ladung des zerfallenden W -Bosons eingeschränkt ist. Die daraus resultierende Feynmanamplitude ist unabhängig von der Ladung des Bosons und ergibt sich mit der Feynmanregel (3.28) zu¹

$$\mathcal{M}_{0,D} = i \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{v}(q) \not{\epsilon} \Pi^- u(p)$$

Da die Spins der Zerfallsprodukte im Experiment nicht nachweisbar sind, führen wir die Spinsumme aus und erhalten mit den Spuridentitäten (B.11) und (B.12) sowie der Normierung des Polarisationsvektors

$$\epsilon^\mu \epsilon_\mu^* = -1$$

das Betragsquadrat der Feynmanamplitude²

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{0,D}|^2 = \frac{g^2}{4} \text{Tr} \not{q} \not{p} \not{\epsilon} \not{\epsilon}^* (1 - \gamma^5) = g^2 ((q\epsilon)(p\epsilon^*) + (p\epsilon)(q\epsilon^*) + (pq) - iq^\mu \epsilon^\nu p^\sigma \epsilon^{\rho*} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}) \quad (5.1)$$

In 1. Ordnung in λ ist die nichtkommutative Korrektur zum Betragsquadrat der Interferenzterm

$$2 \sum_{\text{Spins}} \Re \mathcal{M}_{0,D} \mathcal{M}_{1,D}^* = \Re i \lambda (q\theta p) \underbrace{\frac{g^2}{4} \text{Tr} \not{q} \not{p} \not{\epsilon} \not{\epsilon}^* (1 - \gamma^5)}_{|\mathcal{M}_{0,D}|^2}$$

wobei die Dirac-Gleichung (B.9) verwendet wurde. Der Interferenzterm ist also der Realteil einer komplexen Zahl, welche bis auf einen rein imaginären Faktor dem Betragsquadrat (5.1) entspricht, und da dieses rein reell ist, ist der Interferenzterm Null. Somit verschwindet die nichtkommutative Korrektur in 1. Ordnung λ .

Um einen expliziten Ausdruck für die quadrierte Feynmanamplitude (5.1) zu erhalten, wählen wir das Bezugssystem so, daß die x_3 -Achse mit dem Impuls \vec{k} des W -Bosons zusammenfällt und transformieren mit einem Boost in negative x_3 -Richtung in das Schwerpunktsystem des W -Bosons. Abb.5.1 zeigt die beiden Bezugssysteme. Nimmt man die Fermionen als masselos an, so ergeben sich die Impulse der Teilchen im Ruhesystem des W -Bosons aufgrund der Viererimpulserhaltung zu³

$$\begin{aligned} \bar{k}^\mu &= (m_W, 0, 0, 0) \\ \bar{p}^\mu &= \frac{m_W}{2} (1, \sin \bar{\theta} \cos \phi, \sin \bar{\theta} \sin \phi, \cos \bar{\theta}) \\ \bar{q}^\mu &= \frac{m_W}{2} (1, -\sin \bar{\theta} \cos \phi, -\sin \bar{\theta} \sin \phi, -\cos \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Der die Impulse und Polarisierungen vom Ruhe- in das Laborsystem abbildende Boost lautet explizit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

¹Handelt es sich bei den Zerfallsprodukten um Quarks, so tritt in der quadrierten Feynmanamplitude zusätzlich des Betragsquadrat eines CKM-Matrixelements $|V_{ij}|^2$ auf. Aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix ist das Betragsquadrat jedes Zeilen- und Spaltenvektors 1, und da bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen über die ersten beiden Quarkgenerationen im Endzustand summiert wird, ist der durch die Annahme der CKM Matrix als Einheitsmatrix entstehende Fehler vernachlässigbar (die ignorierten CKM-Matrixelemente sind von der Größenordnung 10^{-3}).

²Der Term $iq^\mu \epsilon^\nu p^\sigma \epsilon^{\rho*} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ verschwindet für longitudinale Polarisation und ist im Falle transversaler Polarisation reell.

³In diesem Kapitel kennzeichnet ein Überstrich eine Größe im Ruhesystem des entsprechenden zerfallenden W -Bosons.

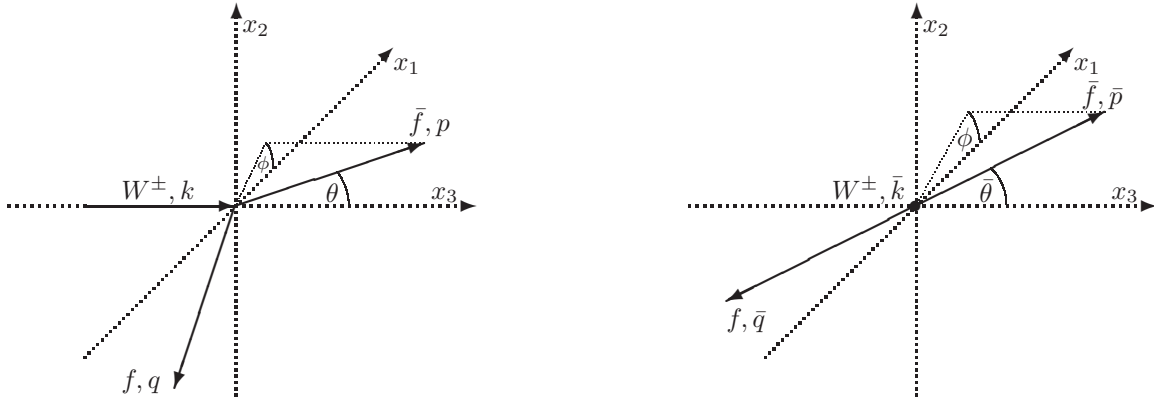


Abbildung 5.1: Bezugssysteme zur Berechnung der Feynmanamplitude des W-Zerfalls; das linke System ist das Laborsystem, das rechte Bezugssystem ist das durch einen Boost in negative x_3 -Richtung daraus hervorgehende Ruhesystem des W-Bosons (die Skalen sind nicht identisch)

mit den Lorentzfaktoren

$$\beta = -\sqrt{1 - \frac{m_W^2}{E^2}} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{m_W}$$

und der Energie E des W-Bosons im Laborsystem. Durch Anwendung des Boosts erhält man die Impulse im Laborsystem

$$\begin{aligned} k^\mu &= \left(E, 0, 0, \sqrt{E^2 - m_W^2} \right) \\ p^\mu &= \frac{1}{2} \left(E(1 - \beta \cos \bar{\theta}), m_W \sin \bar{\theta} \cos \phi, m_W \sin \bar{\theta} \sin \phi, E(\cos \bar{\theta} - \beta) \right) \\ q^\mu &= \frac{1}{2} \left(E(1 + \beta \cos \bar{\theta}), -m_W \sin \bar{\theta} \cos \phi, -m_W \sin \bar{\theta} \sin \phi, -E(\cos \bar{\theta} + \beta) \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Da wir die Fermionen als masselos angenommen haben, gilt für den Betrag von \vec{p}

$$|p| = p^0 = E(1 - \beta \cos \bar{\theta})$$

und somit folgt eine Beziehung zwischen den Polarwinkeln $\bar{\theta}$ und θ

$$\cos \theta = \frac{p^3}{p^0} = \frac{\cos \bar{\theta} - \beta}{1 - \beta \cos \bar{\theta}} \quad \longleftrightarrow \quad \cos \bar{\theta} = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}$$

(der Azimutalwinkel erfährt keine Änderung durch den Boost). Da transversale Vektoren nicht von dem Boost betroffen sind, sind die im Laborsystem transversalen Polarisationsvektoren in beiden Bezugssystemen identisch

$$\epsilon_\pm^\mu = \bar{\epsilon}_\pm^\mu = (0, \mp i, 1, 0)$$

Für den im Laborsystem longitudinalen Polarisationsvektor gilt

$$\epsilon_0^\mu = \gamma(-\beta, 0, 0, 1) = \frac{1}{m_W} (|k|, 0, 0, E) \quad \bar{\epsilon}_0^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

mit dem Betrag des Dreierimpulses \vec{k}

$$|k| = \sqrt{E^2 - m_W^2}$$

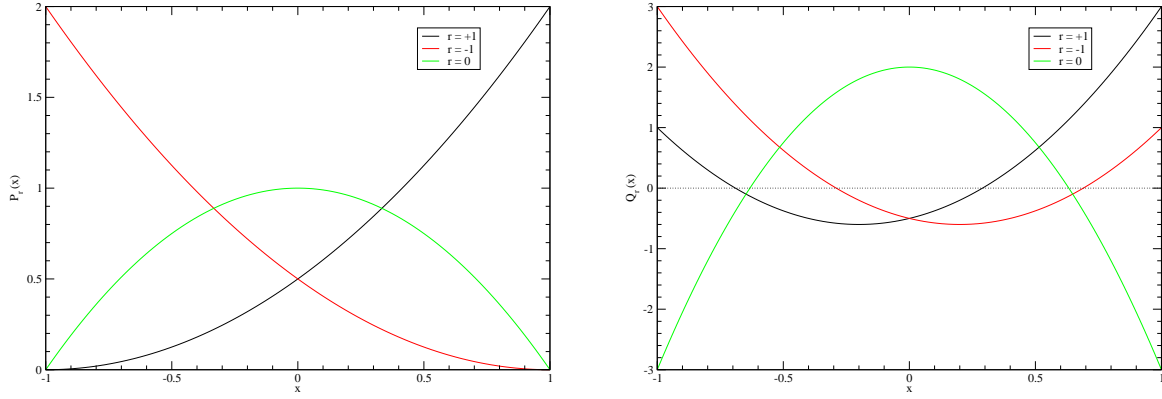


Abbildung 5.2: links: Die im Text definierten Polynome $P_r(x)$, rechts: die Projektorfunktionen $Q_r(x)$

Setzt man die Impulse und Polarisationsvektoren im Ruhesystem des W -Bosons in (5.1) ein und führt die Skalarprodukte sowie die Kontraktion mit dem Levi-Civita-Tensor aus, so erhält man die quadrierte und über die Fermionspins summierte Feynmanamplitude im Ruhesystem. Aufgrund der Rotationsinvarianz des Standardmodells und der Helizität darf sich die Feynmanamplitude bei Rotationen um die x_3 -Achse nur um eine Phase ändern, und daher muß die quadrierte Feynmanamplitude von ϕ unabhängig sein. Allerdings wurde durch unsere Wahl von Polarisationsvektoren die x_3 -Achse ausgezeichnet, und so ist zu erwarten, daß eine Abhängigkeit von $\cos \bar{\theta}$ auftritt. Führt man zur Kennzeichnung der Polarisation einen Index $r \in \{\pm 1, 0\}$ ein (wobei $r = \pm 1$ für positive bzw. negative Helizität steht, und $r = 0$ longitudinale Polarisation kennzeichnet), so erhält man für die quadrierte Feynmanamplitude aus (5.1)⁴

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|_{0,W}^r{}^2 = \frac{g^2}{2} m_W^2 P_r(\cos \bar{\theta})$$

Die Funktionen $P_r(x)$ sind Polynome zweiten Grades und lauten explizit

$$P_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2 & , r = 1 \\ \frac{1}{2}(1-x)^2 & , r = -1 \\ 1-x^2 & , r = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Offensichtlich unterscheidet die funktionale Abhängigkeit der quadrierten Feynmanamplitude von $\cos \bar{\theta}$ zwischen den Polarisierungen des zerfallenden W -Bosons. Dies weckt die Hoffnung, auf diese Art und Weise die Polarisation des zerfallenden W -Boson identifizieren zu können.

Tatsächlich ist es möglich, Projektorfunktionen $Q_s(x)$ zu finden, für welche gilt

$$\int_{-1}^1 dx P_r(x) Q_s(x) = \delta_{rs} \int_{-1}^1 dx P_r(x) \quad (5.6)$$

Um die $Q_s(x)$ zu finden, setzt man diese ebenfalls als Polynom zweiten Grades an

$$Q_s(x) = a_s + b_s x + c_s x^2$$

⁴Es wird *nicht* zwischen oberer und unterer Positionierung des Helizitätsindex r unterschieden; die unterschiedlichen Positionen dienen lediglich der Lesbarkeit.

(5.6) liefert ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_s , b_s und c_s , welches eindeutig lösbar ist. Damit ergeben sich die Projektorfunktionen $Q_s(x)$ zu

$$Q_s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + x + \frac{5}{2}x^2 & , s = 1 \\ -\frac{1}{2} - x + \frac{5}{2}x^2 & , s = -1 \\ 2 - 5x^2 & , s = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

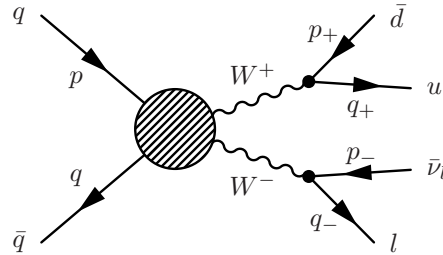
Abb.5.2 zeigt die Polynome (5.5) sowie die Projektoren (5.7).

Obwohl es nicht möglich ist, in einem einzelnen Zerfallsereignis die Polarisation des zerfallenden W -Bosons zu bestimmen, kann durch Faltung der bei einem (fiktiven) Experiment zum Zerfall physikalischer W -Bosonen gemessenen Winkelverteilung mit den Projektorfunktionen somit der Anteil Teil der W -Bosonen, die eine bestimmte Polarisation hatten, bestimmt werden (vorausgesetzt, alle zerfallenden Bosonen befanden sich in Helizitätseigenzuständen).

5.2 Rekonstruktion der W -Polarisation bei der Paarproduktion mit anschließendem semileptonischen Zerfall

Nachdem im letzten Abschnitt gezeigt wurde, wie aus der bei W -Zerfällen gemessenen Winkelverteilung der entstandenen Fermionen die W -Polarisation rekonstruiert werden kann, werden wir in diesem Abschnitt dieses Verfahren auf die im letzten Kapitel untersuchte W -Paarproduktion übertragen. Obwohl wir uns in diesem Kapitel auf den semileptonischen Zerfall $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- \rightarrow (l\bar{\nu}_l)(q\bar{q})$ beschränken wollen, gelten die Ausführungen dieses Abschnitts genauso auch für Zerfälle in andere fermionische Endprodukte (da die W -Kopplung nicht zwischen Quarks und Leptonen unterscheidet).

Die im Standardmodell diesem Prozess zugeordnete Feynmanamplitude hat diagrammatisch die Gestalt



(Diagramme anderer Topologie, die zu demselben Endzustand beitragen, werden im nächsten Abschnitt in Betracht gezogen). Der schraffierte Kreis steht dabei für die Summe der in Abschnitt 4.2 angegebenen Diagramme zu den Standardmodellprozessen $d\bar{d} \rightarrow W^+W^-$ bzw. $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$. Die Feynmanamplitude läßt sich also in eine zu der Produktion zweier W -Bosonen und zwei zum W -Zerfall gehörige Helizitätsamplituden sowie die beiden W -Propagatoren (3.45) aufspalten

$$\mathcal{M}_0 = -C_W(k_+)C_W(k_-)\mathcal{M}_{0,P}^{\mu\nu}(p, q, k, k_+) \left(g_{\mu\sigma} - \frac{k_{+, \mu}k_{+, \sigma}}{m_W^2} \right) \cdot \left(g_{\nu\rho} - \frac{k_{-, \nu}k_{-, \rho}}{m_W^2} \right) \mathcal{M}_{0,D}^\sigma(p_+, q_+)\mathcal{M}_{0,D}^\rho(p_-, q_-)$$

mit der Abkürzung

$$C_W(k) = \frac{1}{k^2 - m_W^2 + im_W\Gamma_W}$$

sowie den Impulsen der intermediären W -Bosonen

$$k_- = q_- + p_- \quad k_+ = q_+ + p_+$$

$\mathcal{M}_{0,P}^{\mu\nu}$ bezeichnet dabei die Helizitätsamplitude für die Produktion zweier polarisierter W -Bosonen, und $\mathcal{M}_{0,D}^\mu$ steht für die Helizitätsamplitude des im letzten Abschnitt diskutierten W -Zerfalls⁵. Da die Breite des W -Bosons Γ_W klein gegen die Masse m_W ist, können wir als Näherung die W -Bosonen auf der Massenschale annehmen und somit den Propagator in unitärer Eichung durch die Vollständigkeitsrelation (4.9) ersetzen. Damit folgt näherungsweise

$$\mathcal{M}_0 = -C_W(k_+)C_W(k_-) \sum_{r,s} \mathcal{M}_{0,P}^{\mu\nu}(p, q, k_+, k_-) \epsilon_{+,\mu}^{r*} \epsilon_{-,\nu}^{s*} \epsilon_{+,\sigma}^r \epsilon_{-,\rho}^s \mathcal{M}_{0,D}^\sigma(p_+, q_+) \mathcal{M}_{0,D}^\rho(p_-, q_-)$$

bzw.

$$\mathcal{M}_0 = -C_W(k_+)C_W(k_-) \sum_{r,s} \mathcal{M}_{0,P}^{rs}(p, q, k_+, k_-) \mathcal{M}_{0,D}^r(p_+, q_+) \mathcal{M}_{0,D}^s(p_-, q_-)$$

mit den Feynmanamplituden für die Produktion zweier W -Bosonen mit den Polarisierungen r und s sowie für den Zerfall eines W -Bosons mit der Polarisation r

$$\mathcal{M}_{0,P}^{rs} = \mathcal{M}_{0,P}^{\mu\nu} \epsilon_{+,\mu}^{r*} \epsilon_{-,\nu}^{s*} \quad \mathcal{M}_{0,D}^r = \mathcal{M}_{0,D}^\mu \epsilon_{\pm,\mu}^r \quad (5.8)$$

Ab jetzt wird die explizite Impulsabhängigkeit der Feynmanamplituden zur besseren Lesbarkeit weggelassen, da sie eindeutig aus den Polarisationsindizes hervorgeht.

Bildet man das Betragsquadrat und summiert über die Spins, so erhält man aus Gleichung (5.8) die quadrierte Feynmanamplitude

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_0|^2 = |C_W(k^+)|^2 |C_W(k^-)|^2 \sum_{\text{Spins}} \sum_{\substack{r,s \\ t,u}} \mathcal{M}_{0,P}^{rs} \mathcal{M}_{0,P}^{tu*} \mathcal{P}_{rt} \mathcal{P}_{su}$$

mit dem hermiteschen Zerfallstensor

$$\mathcal{P}_{rt} = \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_{0,D}^r \mathcal{M}_{0,D}^{t*}$$

Für die Elemente von \mathcal{P}_{rt} folgt analog zu (5.1) durch Spurbildung⁶

$$\mathcal{P}_{rt} = g^2 ((q\epsilon_r)(p\epsilon_t^*) + (p\epsilon_r)(q\epsilon_t^*) - (pq)(\epsilon_r\epsilon_t^*) - iq_\mu\epsilon_{r,\nu}p_\sigma\epsilon_{t,\rho}^*\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho})$$

Setzt man die Impulse und Polarisationsvektoren aus dem letzten Abschnitt ein, so erhält man die explizite Form von \mathcal{P}_{rt} im Schwerpunktsystem des entsprechenden intermediären W -Bosons

$$\mathcal{P} = \frac{g^2}{2} m_W^2 \begin{pmatrix} \frac{(1-\cos\bar{\theta})^2}{2} & \frac{ie^{i\phi}}{\sqrt{2}} \sin\bar{\theta}(1-\cos\bar{\theta}) & \frac{e^{-2i\phi}}{2}(1-\cos^2\bar{\theta}) \\ -\frac{ie^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \sin\bar{\theta}(1-\cos\bar{\theta}) & 1-\cos^2\bar{\theta} & -\frac{ie^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \sin\bar{\theta}(1+\cos\bar{\theta}) \\ \frac{e^{2i\phi}}{2}(1-\cos^2\bar{\theta}) & \frac{ie^{i\phi}}{\sqrt{2}} \sin\bar{\theta}(1+\cos\bar{\theta}) & \frac{(1+\cos\bar{\theta})^2}{2} \end{pmatrix}$$

⁵Die Fermionspins werden zu besseren Lesbarkeit ignoriert, da über sie am Ende ohnehin summiert wird

⁶Man beachte allerdings, daß die beiden Polarisationsvektoren jetzt zu unterschiedlichen Helizitäten gehören.

wobei die Polarisationen so gezählt werden, das der linke obere Eintrag der Matrix $\mathcal{P}_{-1,-1}$ und der rechte untere Eintrag $\mathcal{P}_{1,1}$ ist. Die Diagonalelemente sind gerade die im letzten Abschnitt berechneten quadrierten Feynmanamplituden für den Zerfall eines polarisierten W -Bosons

$$\mathcal{P}_{rr} = \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{0,D}^r|^2$$

Die Nebendiagonalelemente sind im Gegensatz zu den Diagonalelementen alle von dem Azimutalwinkel abhängig und verschwinden durch Integration über ϕ . Also gilt mit den im letzten Abschnitt definierten Polynomen $P_r(x)$ für die quadrierte Feynmanamplitude im Standardmodell

$$\int_0^{2\pi} d\phi_+ \int_0^{2\pi} d\phi_- \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_0|^2 = g^4 m_W^4 \pi^2 |C_W(k_+)|^2 |C_W(k_-)|^2 \sum_{r,s} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{0,W}^{rs}|^2 P_r(\cos \bar{\theta}_+) P_s(\cos \bar{\theta}_-)$$

wobei ϕ_+ und ϕ_- bzw. $\bar{\theta}_+$ und $\bar{\theta}_-$ Azimutal- und Polarwinkel im jeweiligen Ruhesystem der intermediären W -Bosonen sind. Somit ist die quadrierte Feynmanamplitude im Standardmodell nach der Integration (bis auf einen vom Impuls der W -Bosonen in den Zwischenzuständen abhängigen Vorfaktor, der diese annähernd auf die Massenschale zwingt) proportional zu der Summe der quadrierten Feynmanamplituden für die einzelnen Helizitätskombinationen, multipliziert mit Gewichten $\mathcal{P}_r(\cos \bar{\theta}_\pm)$. Damit lassen sich aber die im letzten Abschnitt definierten Projektorfunktionen $Q_r(x)$ verwenden, um aus der Statistik für den Standardmodellprozess $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- \rightarrow (u\bar{d})(l\bar{\nu}_l)$ die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Paarproduktion polarisierten W -Bosonen zu rekonstruieren!

Im nmNCSM erhält der Prozess zusätzlich zu den bereits in Abschnitt 4.2 diskutierten Korrekturen in 1. Ordnung λ weitere Beiträge, durch die Ersetzung der beiden neu hinzugekommen Vertizes entstehen. Explizit ausgeschrieben lautet die spinsummierte und quadrierte Feynmanamplitude bis zur 1. Ordnung in λ

$$\sum_{\text{Spins}} |\hat{\mathcal{M}}|^2 = |C_W(k_+)|^2 |C_W(k_-)|^2 \sum_{\text{Spins}} \sum_{\substack{r,s \\ t,u}} \left(\left(\mathcal{M}_{0,P}^{rs} \mathcal{M}_{0,P}^{tu*} + \mathcal{M}_{1,P}^{rs} \mathcal{M}_{0,P}^{tu*} + \mathcal{M}_{0,P}^{rs} \mathcal{M}_{1,P}^{tu*} \right) \mathcal{P}_{rs} \mathcal{P}_{su} + \right. \\ \left. \mathcal{M}_{0,P}^{rs} \mathcal{M}_{0,P}^{tu} \left(\hat{\mathcal{P}}_{rs} \mathcal{P}_{tu} + \mathcal{P}_{rs} \hat{\mathcal{P}}_{tu} \right) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Der Index „1“ der Feynmanamplituden bezeichnet dabei wieder die Korrektur in 1. Ordnung λ , und für die Korrektur des Polarisationstensors $\hat{\mathcal{P}}_{rt}$ gilt

$$\hat{\mathcal{P}}_{rt} = \sum_{\text{Spins}} \left(\mathcal{M}_{0,D}^r \mathcal{M}_{1,D}^t + \mathcal{M}_{1,D}^r \mathcal{M}_{0,D}^t \right) \quad (5.9)$$

Anhand der Feynmanregel (3.33) sieht man mithilfe der Dirac-Gleichung (B.9) leicht, daß für die Feynmanamplitude des W -Zerfalls gilt

$$\mathcal{M}_{1,D}^r(p, q) = -\frac{i\lambda}{2} (q\theta p) \mathcal{M}_{0,D}^r(p, q)$$

Die Korrektur unterscheidet sich also nur durch einen Vorfaktor von der Amplitude selbst, und da dieser rein imaginär und von der Polarisation des zerfallenden W -Bosons unabhängig ist, folgt für (5.9)

$$\hat{\mathcal{P}}_{rt} = 0$$

Also vereinfacht sich auch im nmNCSM durch Integration über die Polarwinkel ϕ_+ und ϕ_- die quadrierte Feynmanamplitude zu

$$\begin{aligned} \iint d\phi_+ d\phi_- \sum_{\text{Spins}} |\hat{\mathcal{M}}_D|^2 = \\ g^4 m_W^4 \pi^2 |C_W(k_+)|^2 |C_W(k_-)|^2 \sum_{r,s} \sum_{\text{Spins}} \left(|\mathcal{M}_{0,P}^{rs}|^2 + 2\Re \mathcal{M}_{0,P}^{rs*} \mathcal{M}_{1,P}^{rs} \right) P_r(\cos \bar{\theta}_-) P_s(\cos \bar{\theta}_-) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Somit lassen sich auch im nmNCSM (zumindest in 1. Ordnung λ) die Projektorfunktionen $Q_r(x)$ verwenden, um aus der Statistik für den semileptonischen Zerfall den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Paarproduktion zu extrahieren. Die einzige Näherung bei diese Vorgehensweise ist die Annahme, daß die intermediären W -Bosonen auf der Massenschale liegen.

Um dieses Verfahren zur Rekonstruktion auf den Wirkungsquerschnitt zu übertragen, müssen wir zunächst von den in der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts (4.1) als Parameter des Phasenraums auftretenden Impulsen p_\pm, q_\pm zu den Impulsen \bar{p}_\pm der Antifermionen im Schwerpunktsystem sowie den Impulsen der intermediären Vektorbosonen

$$k_\pm = p_\pm + q_\pm$$

als Phasenraumparameter übergehen (und dabei sicherstellen, daß aus der Transformation der Differentiale keine neue Abhängigkeit von θ_\pm folgt). Um dies zu bewerkstelligen fügen wir in das Phasenraumintegral über eines der beiden Fermionpaare einen Faktor „1“ ein

$$\int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{d^3 q}{q^0} = \int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{d^3 q}{q^0} d^4 k \delta^4(p + q - k)$$

wobei das Integral über k sich über den gesamten Vorwärtslichtkegel erstreckt. Zu jedem solchen k finden wir einen eindeutigen Boost Λ_k in \vec{k} -Richtung, der alle raumartigen Komponenten von k auf Null abbildet. Da die Differentiale $\frac{d^3 p}{p^0}$ und $\frac{d^3 q}{q^0}$ lorentzinvariant sind, können wir nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge Λ_k als Variablentransformation anwenden und erhalten

$$\int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{d^3 q}{q^0} d^4 k \delta^4(p + q - k) = \int d^4 k \frac{d^3 \bar{p}}{\bar{p}^0} \frac{d^3 \bar{q}}{\bar{q}^0} \delta^4(\Lambda_k^{-1}(\bar{p} + \bar{q} - \bar{k}))$$

(der Überstrich kennzeichnet die geboosteten Impulse). Um \bar{q} und k^0 auszuintegrieren, betrachten wir die Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J}^\mu_\nu = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^\nu} ((\Lambda_k^{-1})^\mu_\sigma (\bar{p} + \bar{q} - \bar{k})^\sigma) = (\Lambda_k^{-1})^\mu_\nu & , \nu \in 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial k^0} ((\Lambda_k^{-1})^\mu_\sigma (\bar{p} + \bar{q} - \bar{k})^\sigma) = -\frac{\partial \bar{k}^0}{\partial k^0} (\Lambda_k^{-1})^\mu_\nu + \left(\frac{\partial}{\partial k^0} (\Lambda_k^{-1})^\mu_\sigma \right) (\bar{p} + \bar{q} - \bar{k})^\sigma & , \nu = 0 \end{cases}$$

Da Λ_k^{-1} eine Lorentz-Transformation ist, gilt für die entsprechende Jacobi-Determinante

$$|\det \mathcal{J}| \Big|_{\bar{p} + \bar{q} - \bar{k} = 0} = \left| \frac{\partial \bar{k}^0}{\partial k^0} \right| \Big|_{\bar{p} + \bar{q} - \bar{k} = 0}$$

Aufgrund der Lorentzinvarianz des Vierervektorquadrats gilt

$$\bar{k}^0 = \sqrt{k^{02} - \vec{k}^2} \quad (5.11)$$

und somit folgt weiter

$$|\det \mathcal{J}| \Big|_{\bar{p}+\bar{q}-\bar{k}=0} = \frac{k^0}{\bar{k}^0}$$

Also ist die Jacobi-Matrix in einer Umgebung der Nullstelle des Arguments der Deltafunktion nichtsingulär, und wir können die Deltafunktion ausintegrieren

$$\int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{d^3 q}{q^0} = \int \frac{d^3 \bar{p}}{\bar{p}^0} \frac{d^3 \bar{q}}{\bar{q}^0} d^4 k |\det \mathcal{J}|^{-1} \delta^3(\bar{p} + \bar{q}) \delta \left(\sqrt{(\bar{p}^0 + \bar{q}^0)^2 + \bar{k}^2} - k^0 \right) = \int d^3 k \frac{d^3 \bar{p}}{(\bar{p}^0)^2} \frac{\bar{k}^0}{k^0}$$

(die Nullstelle der zweiten Deltafunktion folgt aus (5.11)). Nach Ausintegration der Deltafunktion gilt die Impulserhaltung, also

$$p + q = k \quad \bar{p} + \bar{q} = \bar{k} = (2\bar{p}^0, 0, 0, 0)$$

womit k jetzt der Impuls des intermediären Vektorbosons und \bar{p} der Impuls des Antifermions im Ruhesystem ist. Auf diese Weise haben wir schließlich die gewünschte Variablentransformation

$$\int \frac{d^3 p}{p^0} \frac{d^3 q}{q^0} = 2 \int d^3 k \frac{d^3 \bar{p}}{k^0 \bar{p}^0}$$

erhalten, bei der $2\bar{p}^0$ die Rolle der W -Masse übernimmt

$$k^0 = \sqrt{4(\bar{p}^0)^2 + \bar{k}^2} \quad (5.12)$$

Durch die Transformation tritt keine neue Abhängigkeit von $\cos \bar{\theta}$ auf.

Das Differential $d^3 \bar{p}$ kann nun in Polarkoordinaten im Ruhesystem des intermediären W -Bosons umgeschrieben werden

$$d^3 \bar{p} = d|\bar{p}| d\phi d \cos \bar{\theta} = d\bar{p}^0 d\phi d \cos \bar{\theta}$$

In dieser Parametrisierung gilt für das Betragsquadrat der Faktoren C_W

$$|C_W(k_{\pm})|^2 = \frac{1}{(4(\bar{p}_{\pm}^0)^2 - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2}$$

Da die Breite klein gegen die Masse ist, kann man die Integration über \bar{p}_{\pm}^0 näherungsweise bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor ausführen, indem man im Integranden

$$\bar{p}_{\pm}^0 = \frac{m_W}{2}$$

setzt. Mit (5.12) werden somit die intermediären Vektorbosonen auf die Massenschale gesetzt. Integriert man die Azimutalwinkel ϕ_{\pm} aus, so erhält man schließlich mit (5.10) näherungsweise

$$\frac{d\sigma}{d^3 k_+ d^3 k_- d\theta_+ d\theta_-} \propto \sum_{rs} \frac{d\sigma_{rs}}{d^3 k_+ d^3 k_-} P_r(\cos \bar{\theta}_+) P_s(\cos \bar{\theta}_-) \quad (5.13)$$

mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{rs}$ bezeichnet dabei den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Produktion zweier polarisierter W -Bosonen, welcher sich somit durch Faltung von (5.13) mit den Projektorfunktionen (5.7) rekonstruieren läßt.

Als letzten Schritt wollen wir eine Methode konstruieren, um mithilfe von (5.13) aus einem Satz von Ereignissen (entweder aus einem echten Colliderexperiment oder Monte-Carlo-Daten) einen Satz von „Pseudoereignissen“ zu erzeugen, der einem Experiment zur W -Produktion entspricht. Mit der Definition

$$\frac{d\Delta\sigma}{d \cos \theta_+ d \cos \theta_-} = \frac{d\sigma}{d^3 k_+ d^3 k_- d \cos \theta_+ d \cos \theta_-} \Delta^3 k_+ \Delta^3 k_-$$

ist die Zahl von Ereignissen mit intermediären W -Bosonen der Helizitäten (rs) innerhalb eines Phasenraumvolumens⁷ $\Delta^3 k_+ \Delta^3 k_-$

$$\Delta N_{rs} \approx A \int_{-1}^1 d \cos \bar{\theta}_+ \int_{-1}^1 d \cos \bar{\theta}_- \frac{d\Delta\sigma}{d \cos \bar{\theta}_+ d \cos \bar{\theta}_-} Q_r(\cos \bar{\theta}_+) Q_s(\cos \bar{\theta}_-)$$

mit einem konstanten Faktor A , der das Produkt aus dem Proportionalitätsfaktor in (5.13) und der integrierten Luminosität des Experiments ist. Teilt man das Intervall $[-1; 1]$ in n (kleine) Teilintervalle Δx_i auf, so ist dieses Integral näherungsweise

$$\Delta N_{rs} \approx A \sum_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \frac{d\Delta\sigma}{d \cos \bar{\theta}_+ d \cos \bar{\theta}_-} Q_r(x_i) Q_s(x_j) = \sum_{ij} \Delta N^{ij} Q_r(x_i) Q_s(x_j)$$

wobei x_i einen fest definierten Punkt innerhalb des Intervalls Δx_i bezeichnet (z.B. den Mittelpunkt). ΔN^{ij} steht für die Zahl der Ereignisse innerhalb des Phasenraumvolumens

$$\Delta^3 k_+ \Delta^3 k_- (\Delta \cos \bar{\theta}_+ = \Delta x_i) (\Delta \cos \bar{\theta}_- = \Delta x_j) \quad (5.14)$$

Wählt man die Intervalle Δx_i so klein, daß jedes der Phasenraumvolumina (5.14) exakt ein Ereignis enthält, so folgt schließlich

$$\Delta N_{rs} \approx \sum_N Q_r(\cos \bar{\theta}_{+,i}) Q_s(\cos \bar{\theta}_{-,i}) \quad (5.15)$$

wobei die Summe über alle Ereignisse in dem Volumen $\Delta^3 k_+ \Delta^3 k_-$ läuft. Wählt man schließlich diese Volumina ebenfalls so klein, daß sie jeweils nur ein einzelnes Ereignis enthalten, so erhält man aus Gleichung (5.15) eine einfache Vorschrift zur Rekonstruktion der Polarisation: für jedes Ereignis ist durch

$$G_{rs}^i = Q_r(\cos \bar{\theta}_{+,i}) Q_s(\cos \bar{\theta}_{-,i})$$

ein Gewicht gegeben, welches den Anteil einer bestimmten Helizitätskombination (r, s) an einem einzelnen Ereignis angibt. Gewichtet man die einzelnen Ereignisse mit den G_{rs}^i , so kann man diese bezüglich der W -Impulse für verschiedene Helizitäten histogrammieren, und die so gewonnenen Histogramme entsprechen den bei einer (hypothetischen) direkten Untersuchung der Paarproduktion auftretenden Verteilungen. Die Normierung der Projektorfunktionen (5.6) stellt sicher, daß eine Summe über die verschiedenen Histogramme wieder die ursprüngliche Zahl von Ereignissen ergibt.

Das in diesem Kapitel konstruierte Verfahren zur Rekonstruktion der Helizitäten der W -Bosonen ist bis auf die Vernachlässigung von Hintergrunddiagrammen und die Näherung von on-shell-Eichbosonen exakt. Die vernachlässigten Hintergrunddiagramme sind das Thema des nächsten Abschnitts. Ein Problem bei der Rekonstruktion ist die Ununterscheidbarkeit der beiden Quarks im Experiment, die nur anhand der von ihnen produzierten Jets detektiert und nicht voneinander unterschieden werden können. Daher kann das Vorzeichen von $\bar{\theta}_+$ nicht bestimmt werden. Für die Projektoren gilt

$$Q_1(x) = Q_{-1}(-x) \quad Q_0(x) = Q_0(-x)$$

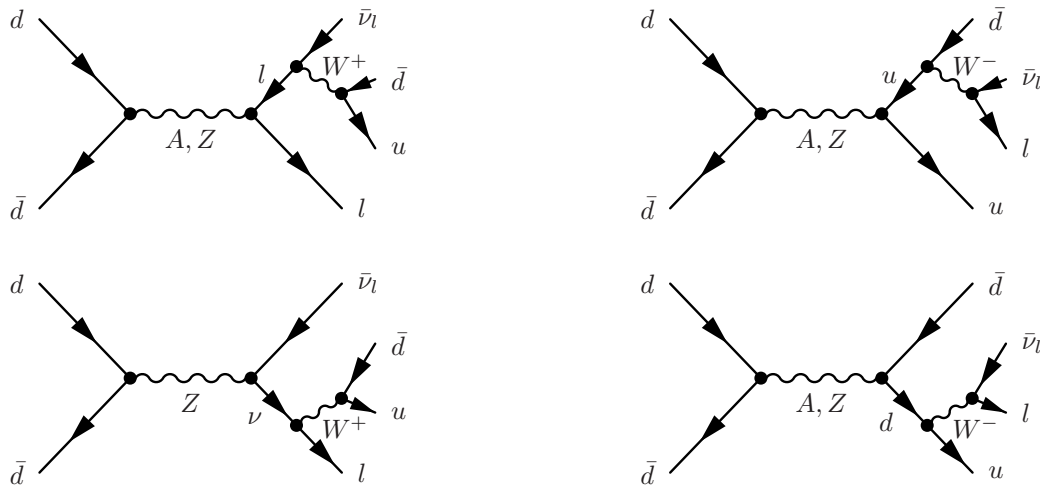
und somit können nur Q_0 sowie die Summe $Q_1 + Q_{-1}$ bestimmt werden, was einer Summe über die transversalen Polarisationen des W^+ gleichkommt. Ein weiteres Problem ist die Unmöglichkeit der Detektion des Neutrinos. Da tatsächliche Experimente nicht mit Quarks im Anfangszustand realisiert werden können, sondern mit Hadronen durchgeführt werden müssen, ist die partonische Gesamtenergie nicht bekannt, und die Energie-Impulserhaltung kann nicht direkt zur Rekonstruktion des Neutrinoimpulses verwendet werden. Im nächsten Kapitel wird ein mögliches Verfahren vorgestellt, um diese Einschränkung zu umgehen und den Impuls zu rekonstruieren.

⁷Dies ist nicht ganz korrekt, da die Ausintegration der die Gesamtimpulserhaltung vermittelnden Deltafunktion vier Freiheitsgrade eliminiert und der tatsächliche Phasenraum der intermediären W -Bosonen somit nur zweidimensional ist. Da die genaue Form des Volumenelements jedoch von der Parametrisierung abhängt, behalten wir im Folgenden diese etwas unsaubere Notation bei.

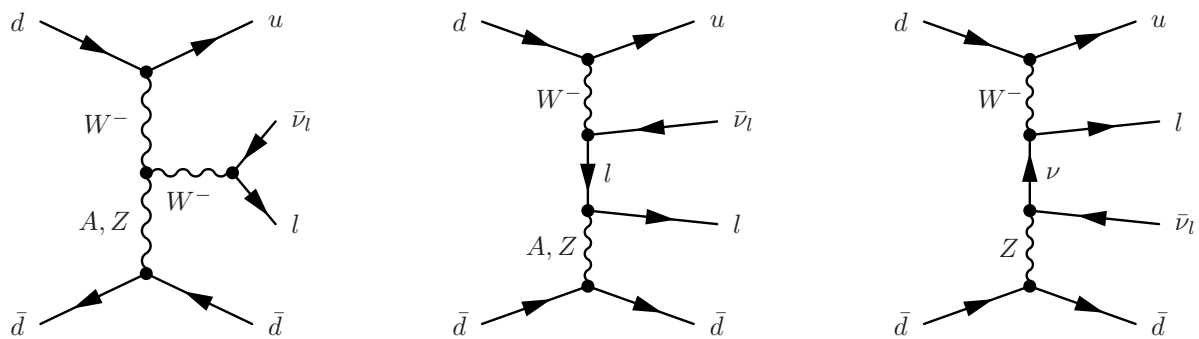
5.3 Hintergrunddiagramme und Eichinvarianz

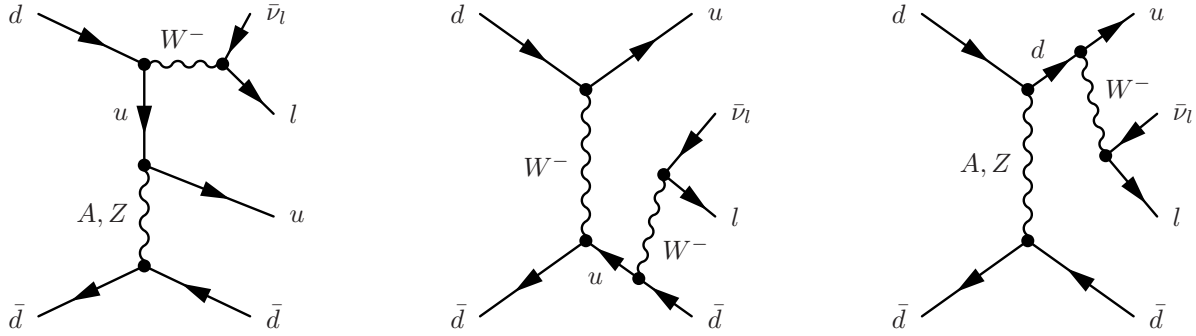
Die im letzten Abschnitt diskutierten Diagramme sind nicht die einzigen Feynmandiagramme, die zu dem Prozess $q\bar{q} \rightarrow (l\bar{\nu}_l)(u\bar{d})$ beitragen. Im Standardmodell gibt zusätzlich zu diesen drei Diagrammen (bei denen zwei intermediäre W -Bosonen produziert werden, die in zwei Fermionpaare zerfallen) noch 17 weitere Diagramme, welche sich in zwei Klassen teilen. Die im Folgenden zur ersten Klasse zusammengefaßten Diagramme besitzen wie die drei bereits diskutierten Diagramme keine durchgehende Fermionlinie, während die zur zweiten Klasse gehörigen Diagramme zwei durchgehende Fermionlinien aufweisen.

Für den Fall einlaufender down-Quarks lauten die zusätzlichen Diagramme der ersten Klasse explizit



In der zweiten Klasse finden sich 10 weitere Diagramme





Die entsprechenden Diagramme für den Fall einlaufender up-Quarks erhält man, indem man die Richtung der einlaufenden Fermionlinien umdreht. Betrachtet man andere mögliche Endzustände, so ändert sich auch die Auswahl der Hintergrunddiagramme — im Falle des Endzustands $(e^- \bar{\nu}_e \tau^+ \nu_\tau)$ verbleiben z.B. nur 9 Diagramme, während zu dem Endzustand $(u \bar{d} d \bar{u})$ 92 Diagramme beitragen.

Summiert man in jeder der beiden Klassen die einzelnen Diagramme auf, so müssen die beiden Klassen separat eichinvariant, d.h. unabhängig vom Eichfixierungsparameter sein. Ein einfaches Argument hierfür erhält man, wenn man den Familienindex einer der durchgehenden Quarklinien ändert, also z.B. das einlaufende down-Quark durch ein strange-Quark ersetzt (und das auslaufende up-Quark durch ein charm-Quark). Zu diesem Prozess können die Diagramme der ersten Klasse keinen Beitrag liefern, und da sich die Struktur der Diagramme in der zweiten Klasse nicht ändert, muß diese separat eichinvariant sein. Da die tatsächlichen Auslöschungen eine Folge der Eichinvarianz der zugrundeliegenden Theorie sowie der Topologie der Diagramme sind, kann das Modell für diesen Zweck immer formal um eine weitere Familie erweitert werden, so daß dieses Argument unabhängig von der Zahl der Familien im Standardmodell (und von den Massen der einzelnen Teilchen sowie den Einträgen der CKM-Matrix) ist. Eine ausführlichere Diskussion von Eichinvarianzklassen findet sich in [33].

In allen zusätzlichen Diagramme der ersten Klasse treten sowohl ein W^- - als auch ein Fermionpropagator auf, die für eine feste Wahl von externen Impulsen aufgrund des extremen Massenunterschieds nicht beide in der Nähe der Massenschale liegen können. Also ist davon auszugehen, daß diese Diagramme im Vergleich zu den bereits diskutierten Diagrammen im Falle geeigneter kinematischer Schnitte stark unterdrückt sind. Die Diagramme der zweiten Klasse besitzen aufgrund der durchgehenden Fermionlinien eine andere kinematische Struktur, und daher sollten die entsprechenden Beiträge zum Wirkungsquerschnitt durch geeignete Schnitte leicht von den Beiträgen der ersten Klasse von Diagrammen zu separieren sein.

Zu jedem dieser Diagramme kommen im nmNCSM in 1. Ordnung λ vier weitere Diagramme dazu, bei denen je einer der Vertices durch seine nichtkommutative Korrektur ersetzt ist. Da für die im nächsten Kapitel durchgeführten Monte-Carlo-Simulationen Diagramme 1. Ordnung in λ von Hand in FORTRAN implementiert werden mußten, wurden in dieser Arbeit nur die Diagramme der ersten Klasse berücksichtigt. Diese Vorgehensweise stellt zumindest sicher, daß die Ergebnisse der Simulation unabhängig von der Wahl des Eichfixierungsparameters sind und reduziert gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bei der Implementation der Diagramme (da keine externen Eichbosonen vorhanden sind, steht für diesen Prozess die Ward-Identität zur Überprüfung des Ergebnisses nicht zur Verfügung).

Kapitel 6

W -Produktion am LHC

Nachdem in den letzten Kapiteln die W -Paarproduktion aus Quarks besprochen wurde, werden in diesem Kapitel die Ergebnisse auf Proton-Proton-Kollisionen am LHC übertragen.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels ist eine kurze Diskussion des Partonmodells der QCD (eine ausführlichere Einführung findet sich in [7]). Im zweiten Kapitel wird die Funktionsweise von Monte-Carlo-Generatoren skizziert und das zur Simulation verwendete Softwarepaket WHIZARD vorgestellt. Im dritten Abschnitt werden die Ergebnisse von Simulationen der Produktion polarisierter W -Bosonen ohne anschließenden Zerfall diskutiert. Im vierten Kapitel finden sich die Ergebnisse von Simulationen der im letzten Kapitel diskutierten Paarproduktion mit anschließendem semileptonischen Zerfall, aus welchen die Helizitäten der intermediären Eichbosonen rekonstruiert werden. Im letzten Abschnitt schließlich wird ein Verfahren zur Rekonstruktion des experimentell nicht meßbaren Neutrinoimpulses vorgestellt und diskutiert.

6.1 Das Partonmodell der QCD

In den letzten Kapiteln wurden Prozesse untersucht, bei denen der einlaufende Zustand aus zwei Quarks mit wohldefinierten Impulsen bestand. In der Natur existieren Quarks jedoch nicht als freie Teilchen, sondern lediglich gebunden als Konstituenten von Hadronen. Daten zur Wechselwirkung der Quarks können daher nicht direkt durch Kollisionen von Quarks, sondern nur indirekt aus Colliderexperimenten mit Hadronen gewonnen werden. Ist die Energieskala der Kollision groß genug ($> 10 \text{ GeV}$), so verhält sich das Proton dabei aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD so, als wäre es aus einzelnen Konstituenten (Quarks und Gluonen) zusammengesetzt, die auf der Zeitskala der Kollision nicht untereinander wechselwirken. Die Konstituenten des Hadrons werden als Partonen bezeichnet, und die Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{dp}{dx}$ für die Wechselwirkung mit einem Parton mit Impuls¹

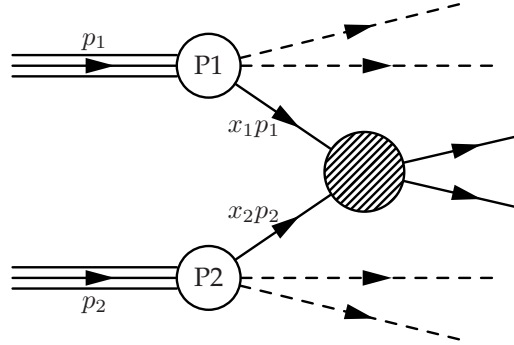
$$p = xP$$

(mit dem hadronischen Impuls P und einer Zahl $0 < x < 1$) ist eine Funktion von x , welche als Partonverteilung oder PDF („Parton Density Function“) bezeichnet wird. Die genaue Form der PDF resultiert aus dem Bereich der Energieskala, auf der die Theorie stark wechselwirkend ist und läßt sich daher mit perturbativen Methoden nicht berechnen. Also müssen die PDFs als Parameter behandelt werden, die aus Messungen bestimmt werden. Ist die Skala des Impulsübertrags bei der Kollision groß genug,

¹Da W -Paarproduktion erst aber einer partonischen Schwerpunktsenergie von $2m_W$ stattfinden kann, können wir sowohl die Partonen als auch die Protonen als masselos annehmen, so daß sich auch die Partonen auf der Massenskala befinden. Berücksichtigt man die Massen, so müssen Korrekturen an dem einfachen Partonmodell vorgenommen werden.

so wird α_s klein, und die Wechselwirkung der kollidierenden Partonen läßt sich mit herkömmlicher Störungstheorie beschreiben.

Die in diesem Kapitel untersuchte Kollision zweier Protonen P1 und P2 mit Impulsen p_1 und p_2 ist daher diagrammatisch von der Form



(die Pfeile stehen lediglich für Impulse und enthalten keine Information über die Teilchenart). Die gestrichelten Linien repräsentieren die Reste der einlaufenden Protonen, die nicht an der Wechselwirkung teilnehmen; der schraffierte Kreis steht für die partonische Wechselwirkung, die perturbativ beschrieben werden kann. Damit gilt also für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines W -Paares bzw. von dessen Zerfallsprodukten bei der Kollision der Protonen

$$d\sigma(p_1, p_2) = \sum_{i,j} \iint dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu) f_j(x_2, \mu) d\sigma_{ij}(x_1 p_1, x_2 p_2)$$

mit den Partonverteilungen $f_i(x, \mu)$ und der Faktorisierungsskala μ . Die Summe läuft dabei über $i, j \in \{d, \bar{d}, u, \bar{u}\}$, und die $d\sigma_{rs}$ sind die bereits berechneten partonischen Wirkungsquerschnitte zur Paarproduktion aus $(u\bar{u})$ bzw. $(d\bar{d})$ (andere Kombinationen von einlaufenden up- und down-Quarks treten nicht auf, da sie aufgrund der Ladungserhaltung für die in dieser Arbeit untersuchten Endzustände verboten sind). Die Integration über x_1 und x_2 impliziert, daß die wechselwirkenden Partonen unterschiedliche Impulse besitzen und somit insbesondere der Prozess nicht mehr im Schwerpunktsystem abläuft. Aufgrund der Ladung und des Isospins des Protons muß für die Partonverteilungen die Normierung

$$\int dx (f_u(x, \mu) - f_{\bar{u}}(x, \mu)) = 2 \quad \int dx (f_d(x, \mu) - f_{\bar{d}}(x, \mu)) = 1$$

gelten.

Die Abhängigkeit der PDFs von der Faktorisierungsskala μ macht es notwendig, einen Wert für μ zu wählen. Dieser sollte in der Nähe der in dem untersuchten Prozess auftretenden Skalen Λ gewählt sein, um Logarithmen der Form $\log \frac{\mu}{\Lambda}$ zu minimieren, die den durch den Abbruch der Störungsreihe verursachten Fehler bestimmen. Die Plots Abb.6.1 zeigen die Partonverteilungen von Quarks und Antiquarks einmal für eine feste Skala $\mu = 80$ GeV und einmal für eine laufende Skala $\mu = x \cdot 7$ TeV, was der Hälfte der hadronischen Energie von 14 TeV am LHC entspricht (die Partonverteilungsfunktionen sind der CTEQ5M-Serie [34] entnommen). Offensichtlich ändert die Variation der Skala die funktionale Abhängigkeit der Partonverteilungen nicht wesentlich, so daß kein großer Einfluß der Wahl der Skala auf die relative Modifikation des Wirkungsquerschnitts im nmNCSM im Vergleich zum Standardmodell zu erwarten ist. Da das Ziel dieser Arbeit eine qualitative Studie zur Nachweisbarkeit einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit auf Baumniveau und nicht eine detaillierte, quantitative Untersuchung des nichtkommutativen Wirkungsquerschnitts ist, wird in allen Monte-Carlo-Simulationen dieses Kapitels eine laufende Skala verwendet, die der Schwerpunktsenergie der einlaufenden Partonen

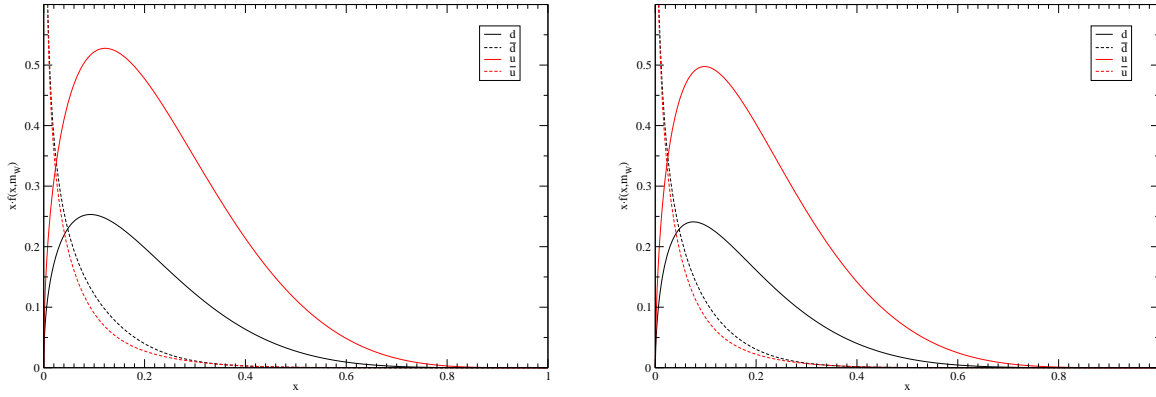


Abbildung 6.1: Partonverteilungsfunktionen der CTEQ5M-Serie; links für einen festen Wert der Skala $\mu = 80$ GeV, rechts für eine laufende Skala $\mu = x \cdot 7$ TeV

entspricht. Eine Untersuchung des Einflusses der Wahl der Skala auf den nichtkommutativen Wirkungsquerschnitt sollte Schleifen (und auch höhere Ordnungen von λ) berücksichtigen und ist daher nicht Teil dieser Arbeit.

6.2 Monte-Carlo-Simulationen und das Softwarepaket Whizard

Um die Auswirkungen einer eventuellen nichtkommutativen Struktur der Raumzeit auf die W -Paarproduktion am LHC zu untersuchen, wurden für diese Arbeit Monte-Carlo-Simulationen von Ereignissen durchgeführt. Eine Monte-Carlo-Simulation verwendet eine Quelle von Pseudozufallszahlen (siehe z.B. [31]), um zu einer als Funktion eines Phasenraums Γ vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$, $x \in \Gamma$ eine entsprechend dieser Dichte verteilte Menge von Punkten \mathfrak{p} zu generieren. Wählt man als Wahrscheinlichkeitsdichte einen (nach Division durch den totalen Wirkungsquerschnitt normierten) differentiellen Wirkungsquerschnitt, so entspricht jeder Punkt im Phasenraum $x_i \in \mathfrak{p}$ einem Ereignis bei einem fiktiven Colliderexperiment.

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte nach f nach oben beschränkt mit einer Schranke

$$F = \max_{x \in \Gamma} f(x)$$

so besteht ein naiver Algorithmus zur Erzeugung von \mathfrak{p} darin, eine Folge uniform im Phasenraum verteilter Punkte x_i zu generieren, für jeden dieser Punkte eine Zufallszahl z_i zwischen 0 und 1 zu erzeugen und diese mit dem Wert der Verteilung $\frac{f(x_i)}{F}$ zu vergleichen. Ist $z_i < \frac{f(x_i)}{F}$, so wird der Punkt in die Menge \mathfrak{p} übernommen, anderenfalls wird er verworfen. Variiert die Dichte f jedoch über einen großen Wertebereich, so ist dieses Vorgehen jedoch ausgesprochen ineffizient, da unter Umständen die Mehrzahl der generierten Punkte verworfen werden muß.

Generiert man die Punkte x_i nicht uniform, sondern bezüglich einer Dichte $g(x)$ verteilt, so muß dieser Algorithmus modifiziert werden — die zu den Punkten generierten Zufallszahlen z_i werden nun mit der Zahl $\frac{1}{F'} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$ verglichen, wobei die Zahl F' das Maximum

$$F' = \max_{x \in \Gamma} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bezeichnet. Wählt man $g(x)$ derart, daß die Dichte $\frac{f(x)}{g(x)}$ möglichst wenig fluktuiert, so läßt sich die Menge der verworfenen Punkte deutlich reduzieren. Eine Zeitersparnis für die Simulation folgt daraus aber nur, wenn der Gewinn an Rechenzeit durch die verbesserte Akzeptanz von Punkten größer ist als der durch die Erzeugung von bezüglich $g(x)$ verteilten Punkten auftretende Zeitverlust.

Der weit verbreitete Monte-Carlo-Code VEGAS [35] und dessen Weiterentwicklung VAMP [36], die in dieser Arbeit verwendet wird, bestimmen eine geeignete Funktion $g(x)$ dynamisch in einer Reihe von Adaptionsschritten, die der eigentlichen Simulation vorausgehen. Während dieser Adaptionphase wird außerdem eine Approximation des Integrals

$$\sigma = \int_{\Gamma} dx d\sigma(x) \approx \frac{V_{\Gamma}}{N} \sum_i d\sigma(x_i)$$

mit dem Volumen des Phasenraums²

$$V_{\Gamma} = \int_{\Gamma} dx$$

gewonnen, die zur Normierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts benötigt wird. Eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise von VAMP findet sich in [37, 36].

Um die für diese Arbeit benötigten Monte-Carlo-Generatoren zu erzeugen, wurde das Paket WHIZARD verwendet [38]. WHIZARD besteht aus Code zur Parametrisierung des n -Teilchen-Phasenraums sowie der notwendigen Infrastruktur, um aus diesem zusammen mit VAMP und von O'Mega (siehe Abschnitt 4.4) generierten Matrixelementen automatisiert einen in FORTRAN 95 implementierten Monte-Carlo-Generator erzeugen. Dabei kann die Bibliothek PDFLIB (ein Bestandteil der CERNLIB) zur Bereitstellung von Partonverteilungen verwendet werden, so daß auch Kollisionen von Hadronen simuliert werden können. Der Standardmodellanteil der Matrixelemente wurde mithilfe von O'Mega automatisch erzeugt und danach per Hand um die nichtkommutativen Korrekturen erweitert.

Eine mögliche Komplikation bei der Verwendung eines Monte-Carlo-Generators ist die Entwicklung des nichtkommutativen Wirkungsquerschnitts in Ordnungen von λ . Wie in Abschnitt 4.2 diskutiert, kann es Regionen im Phasenraum geben, in denen der bis zur ersten Ordnung in λ entwickelte Wirkungsquerschnitt negativ wird. Da die Interpretation des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Wahrscheinlichkeitsdichte (und damit die Anwendbarkeit des oben skizzierten Algorithmus) voraussetzt, daß der Wirkungsquerschnitt positiv definit ist, kann die Existenz von Regionen negativen Wirkungsquerschnitts im Phasenraum die Konvergenz des von VAMP verwendeten adaptiven Algorithmus zur Bestimmung von $g(x)$ stören. Tatsächlich zeigt sich bei einer Überprüfung der von so konstruierten Generatoren in verschiedenen Läufen erzeugten Daten, daß das Ergebnis auch dann nicht stabil ist, wenn das Matrixelement in allen Regionen negativen Wirkungsquerschnitts im Phasenraum auf Null gesetzt wird. In diesen Bereichen des Phasenraums ist der Standardmodellwirkungsquerschnitt bereits sehr klein, und die nichtkommutative Korrektur des Wirkungsquerschnitts (die eine andere funktionale Abhängigkeit zeigt) dominiert daher trotz des Faktors Λ_{NC}^{-2} . Nimmt man an, daß diese Regionen keinen wesentlichen Einfluß auf den Gesamtwirkungsquerschnitt haben, so läßt sich das Problem beheben, indem alle negativen Werte der Feynmanamplitude durch einen von Null verschiedenen Wert der Größenordnung $\approx 10^{-300}$ ersetzt werden³. Da die quadrierte Feynmanamplitude in den relevanten Bereichen des Phasenraums im Gegensatz dazu von der Größenordnung 1 ist, verfälscht dies nicht die so erzeugten Daten. Auf diese Art und Weise konnten stabile und reproduzierbare Ergebnisse erzielt werden.

Die Verwendung eines Monte-Carlo-Generators bietet die Möglichkeit, einen Wert für den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten und somit prüfen zu können, ob die über die Laufzeit des LHC gesamt-

²Da Monte-Carlo-Integration über unendliche Mengen nicht möglich ist, muß das Integrationsgebiet auf eine endliche Teilmenge des Phasenraums eingeschränkt werden.

³Dieser extrem kleine Wert ist etwas mehr als die Rückgabe der FORTRAN-Funktion „tiny“ für eine Double-Variable (also in der Nähe der kleinsten möglichen als Double darstellbaren Zahl).

melte Statistik genügt, eine eventuelle Nichtkommutativität der Raumzeit nachzuweisen. Außerdem entfällt bei diesem Zugang die explizite Transformation des Tensors $\theta^{\mu\nu}$ sowie der Polarisationsvektoren in das partonische Schwerpunktsystem, da die numerische Berechnung der Feynmanamplituden durch O'Mega nicht auf die Wahl eines speziellen Bezugssystems angewiesen ist.

6.3 Die Produktion polarisierter W -Bosonen

Als Vorbereitung für die Untersuchung der W -Paarproduktion mit anschließendem semileptonischen Zerfall in den nächsten Abschnitten wollen wir im Folgenden die in Abschnitt 4.4 diskutierte Produktion polarisierter W -Bosonen auf den hadronischen Prozess $pp \rightarrow W^+W^-$ übertragen. Dazu ist es wie in Abschnitt 6.1 besprochen nötig, die Wirkungsquerschnitte für die partonische Paarproduktion mit den Partonverteilungen zu falten. Wie im letzten Abschnitt diskutiert, wurde dafür mithilfe von WHIZARD ein Monte-Carlo-Generator erzeugt; die Implementation der nichtkommutativen Korrektur 1. Ordnung in λ wurde aus Abschnitt 4.4 übernommen. Die Partonverteilungen wurden der CTEQ5M-Serie entnommen (siehe Abschnitt 6.1), und die verwendeten Parameter finden sich im Anhang C.

Betrachtet man die Partonverteilungen des Protons Abb.6.1, so zeigen sich große Unterschiede zwischen den Verteilungen der Quarks und der Antiquarks. Die Valenzquarks u und d tragen den wesentlichen Teil des hadronischen Gesamtimpulses und sind um ein Maximum in der Nähe von $x \approx 0.1$ verteilt. Die Verteilung der Seequarks \bar{u} und \bar{d} hingegen divergiert bei $x = 0$ und fällt zu größeren Werten von x hin steil ab. Daher ist zu erwarten, daß für den überwiegenden Teil der Ereignisse die Kinematik im Laborsystem sich durch einen starken Boost in Richtung des Impulses des Quarks von der im Schwerpunktsystem unterscheidet. Dieser Boost transformiert insbesondere sowohl die Vektoren \vec{E} und \vec{B} als auch die Polarisationsvektoren nichttrivial, so daß eine Modifikation der in Abschnitt 4.4 diskutierten Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von den Komponenten der NC-Vektoren und von den Helizitäten der W -Bosonen zu erwarten ist.

Der Tensor $\theta^{\mu\nu}$ transformiert unter einer Lorentztransformation Λ als Lorentztensor, also

$$\theta^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho \theta^{\sigma\rho}$$

Ein Boost der Form (5.3) entlang der x_3 -Achse induziert somit eine Transformation der NC-Vektoren

$$\begin{aligned} E_1 &\xrightarrow{\Lambda} \gamma(E_1 - \beta B_2) & E_2 &\xrightarrow{\Lambda} \gamma(E_2 + \beta B_1) & E_3 &\xrightarrow{\Lambda} E_3 \\ B_1 &\xrightarrow{\Lambda} \gamma(B_1 + \beta E_2) & B_2 &\xrightarrow{\Lambda} \gamma(B_2 - \beta E_1) & B_3 &\xrightarrow{\Lambda} E_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Also mischt der Boost die transversalen Komponenten der Felder \vec{E}_\perp und \vec{B}_\perp , während die longitudinalen Komponenten E_3 und B_3 unverändert bleiben. Durch die Mischung der transversalen Feldkomponenten kann der Vektor \vec{B}_\perp auf den hadronischen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem einen deutlich stärkeren Einfluß haben als auf den partonischen Prozess im Schwerpunktsystem (siehe Kapitel 4). Da die longitudinalen Komponenten der NC-Felder in Labor- und Schwerpunktsystem identisch sind und den partonischen Prozess kaum beeinflussen, werden die von ihnen verursachten Korrekturen in 1. Ordnung λ auch am LHC vernachlässigbar sein.

Die Diskussion der funktionalen Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts vom Azimutalwinkel aus den Abschnitten 4.3 und 4.4 läßt sich auch auf den mit Partonverteilungen gefalteten hadronischen Prozess übertragen — der differentielle Wirkungsquerschnitt kann nur von rotationsinvarianten Kombinationen der Vektoren \vec{P} , \vec{k}_\pm , \vec{E} , \vec{B} und $\vec{\epsilon}_\pm$ abhängig sein und aus der Linearität der nichtkommutativen Korrektur in \vec{E} und \vec{B} folgen die bereits diskutierten funktionalen Abhängigkeiten. Somit spaltet sich die Korrektur in einen von E_3 und B_3 abhängigen und von ϕ unabhängigen⁴ Teil so

⁴Auch bei der Proton-Proton-Kollision muß die Summe der Transversalimpulse der W -Bosonen aufgrund der Impulserhaltung verschwinden, und für die Azimutalwinkel gilt $\phi_- = \pi + \phi_+ = \phi$.

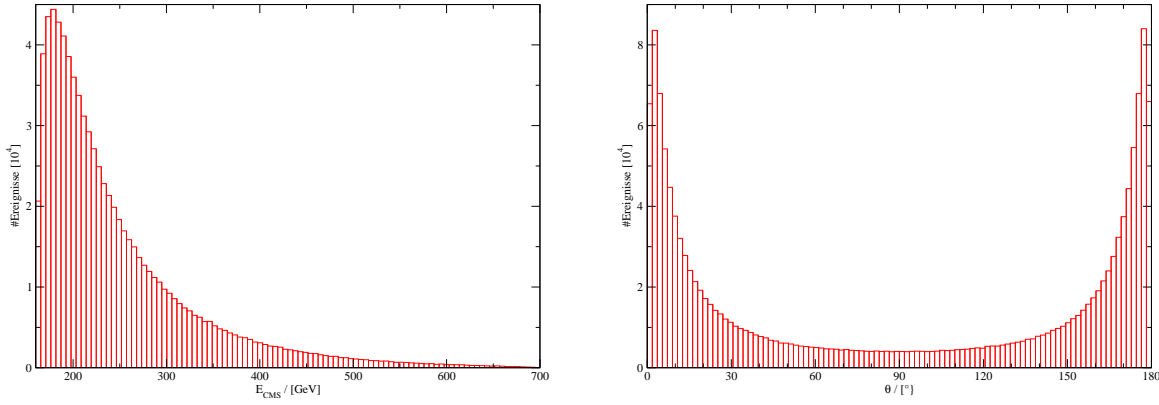


Abbildung 6.2: links: Die Verteilung der Gesamtenergie \sqrt{s} im partonischen Schwerpunktsystem im Standardmodell; keine Schnitte rechts: Die Verteilung des Polarwinkels des W^- im Standardmodell; ebenfalls keine Schnitte

wie einen in $\cos \phi$ bzw. $\sin \phi$ und den transversalen Komponenten der NC-Vektoren linearen Anteil⁵ auf. Eine Drehung der NC-Vektoren um die Strahlachse verursacht dabei wieder nur eine Phasenverschiebung der harmonischen Oszillation mit ϕ , weshalb im Folgenden \vec{E} und \vec{B} immer entlang der x_1 -Achse gewählt und auf den Betrag 1 normiert werden. Für kleine Werte der NC-Skala $\Lambda_{NC} \approx 200$ GeV kann ein Abweichen von dieser harmonischen Abhängigkeit beobachtet werden, welches auf die abgeschnittenen negativen Werte des Wirkungsquerschnitts zurückzuführen und daher nicht physikalisch ist. In den Termen höherer Ordnung in λ , die zur Korrektur des unphysikalischen Verhaltens des Wirkungsquerschnitts in diesem Falle nötig wären, treten allerdings auch in $\cos \phi$ und $\sin \phi$ nichtlineare Terme auf, so daß auch der physikalische Wirkungsquerschnitt für einen derartigen Wert der NC-Skala keine harmonische Abhängigkeit vom Azimuthalwinkel mehr zeigen wird.

Das Histogramm Abb.6.2 links zeigt die Standardmodellverteilung der partonischen Gesamtenergie \sqrt{s} im Schwerpunktsystem von $1.5 \cdot 10^6$ Ereignissen. Man sieht, daß diese trotz der hohen Kollisionsenergie im Laborsystem am LHC von 14 TeV fast ausschließlich in einem Bereich zwischen der Produktionsschwelle und einer Grenze von etwa 700 GeV mit einem Maximum bei etwa 180 GeV liegen. Dies liegt an der Form der Partonverteilungen sowie der Form des Gesamtwirkungsquerschnitts. Abb.6.2 rechts zeigt die Verteilung des Polarwinkels des W^- . Diese ist symmetrisch unter $\theta \rightarrow -\theta$, da der Anfangszustand symmetrisch unter Vertauschung der Protonen ist. Die Polarwinkelverteilung für das W^+ unterscheidet sich nur unwesentlich von Abb.6.2 rechts und ist daher nicht explizit dargestellt. Bei der tatsächlichen Messung am LHC ist es sinnvoll, die Ereignisse in der Nähe der Produktionsschwelle abzuschneiden, um den Einfluß von Hintergrundprozessen zu reduzieren und die Güte des Signals zu verbessern. Daher wurde für alle weiteren Histogramme ein Schnitt an die Schwerpunktsenergie

$$200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1000 \text{ GeV} \quad (6.2)$$

vorgenommen. Eine weitere Einschränkung von \sqrt{s} reduziert die Statistik so stark, daß es schwierig wird, nichtkommutative Effekte von der Standardmodellverteilung zu unterscheiden. Ein Schnitt an

⁵Die Linearität in $\cos \phi$ bzw. $\sin \phi$ läßt sich explizit anhand der mögliche Spatprodukte von Vektoren prüfen; alternativ kann man sich leicht überlegen, daß alle auftretenden Zweivektoren unter Rotationen in der $x_1 x_2$ -Ebene von der Form

$$\vec{v}_\perp = v_1 (\cos \phi, \sin \phi)^T + v_2 (\sin \phi, -\cos \phi)^T$$

mit von ϕ unabhängigen Koeffizienten $v_{1/2}$ sein müssen, woraus die Linearität in $\cos \phi$ bzw. $\sin \phi$ des Wirkungsquerschnitts in 1. Ordnung λ folgt (da die \vec{E}_\perp bzw. \vec{B}_\perp nur als Skalarprodukt mit einem derartigen Zweivektor auftreten können).

den Polarwinkel, wie er im Experiment aufgrund des beschränkten Winkelbereichs des Detektors auftritt, wird in diesem Abschnitt nicht vorgenommen, da dieser die Impulse der aus dem Zerfall entstehenden Fermionen und nicht direkt die W -Impulse betrifft — die entsprechenden Schnitte werden im nächsten Abschnitt bei der Diskussion der Produktion mit anschließendem Zerfall vorgenommen.

Da der Einfluß der longitudinalen Komponenten der NC-Felder wie bereits diskutiert gering ist, bleibt als wichtigste Observable eventueller Auswirkungen einer nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells die Oszillation des Wirkungsquerschnitts mit dem Azimuthalwinkel. Der Anfangszustand ist symmetrisch unter einer Rotation um den Winkel π sowohl um die x_1 - als auch um die x_2 -Achse, und daher muß die Azimuthalwinkelverteilung symmetrisch unter den Ersetzungen

$$E_1 \rightarrow -E_1 \quad B_1 \rightarrow -B_1 \quad \phi \rightarrow \pi - \phi$$

durch Drehung um die x_2 -Achse bzw.

$$E_2 \rightarrow -E_2 \quad B_2 \rightarrow -B_2 \quad \phi \rightarrow -\phi$$

durch Drehung um die x_1 -Achse sein (sofern kein asymmetrischer Schnitt an die Polarwinkel gesetzt wird). Aufgrund dieser Symmetrie kann die zu E_1 bzw. B_1 proportionale Oszillation mit dem Polarwinkel nur proportional zu $\cos \phi$ und die zu E_2 bzw. B_2 proportionale Oszillation nur proportional zu $\sin \phi$ sein; andere Anteile heben sich durch Interferenz zwischen den Oszillationen des Wirkungsquerschnitts für aus negativer x_3 -Richtung und denen für aus positiver x_3 -Richtung einlaufende Antiquarks weg. Tatsächlich zeigt die Simulation, daß ohne die Schnitte an den Polarwinkel keine Oszillation proportional zu \vec{E}_\perp zu beobachten ist. Um die Oszillation sichtbar zu machen, ist ein geeigneter Schnitt an die Polarwinkel von W^+ und W^- notwendig, der eine der Einlaufrichtungen der Antiquarks bevorzugt. Da der überwiegende Anteil der Prozesse stark aus dem Schwerpunktsystem in Richtung der Quarks geboostet ist, stellen die Schnitte an die Summe der Polarwinkel

$$0 \leq (\theta_- + \theta_+) \leq \pi \quad (6.3)$$

bzw.

$$\pi \leq (\theta_- + \theta_+) \leq 2\pi \quad (6.4)$$

mit dem Polarwinkel θ_\pm des W^+ bzw. W^- eine geeignete Einschränkung dar. Im Falle des ersten Schnittes sind Prozesse bevorzugt, bei denen die Antiquarks aus positiver x_3 -Richtung einlaufen, und der zweite Schnitt bevorzugt Antiquarks aus negativer x_3 -Richtung. Dies ist konsistent mit der Untersuchung des Prozesses $pp \rightarrow \gamma Z \rightarrow \gamma f \bar{f}$ in [3]; auch in dieser Arbeit sind geeignete Schnitte an die Polarwinkel notwendig, um die Oszillation sichtbar zu machen. Mithilfe dieser Schnitte ist eine deutliche Oszillation in der Azimuthalwinkelverteilung für die Helizitäten $(+-)$, $(-+)$ und $(--)$ zu erkennen, die für $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$ proportional zu $\sin \phi$ ist. Die zu \vec{B}_\perp proportionale Oszillation dagegen verbessert sich durch einen Schnitt an den Polarwinkel *nicht* und ist für $\vec{B} = (1, 0, 0)$ proportional zu $\cos \phi$. Da die Oszillation mit \vec{B}_\perp aus der Mischung der transversalen Anteile der NC-Felder durch den Boost hervorgeht, tritt diese Oszillation ebenfalls nur für die Helizitäten $(+-)$, $(-+)$ und $(--)$ auf.

Abb.F.12 zeigt die durch den transversalen Teil des Vektors \vec{E} verursachte Oszillation der Azimuthalwinkelverteilung (mit dem Schnitt (6.3)) für die Skala $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ und die Helizitätskombinationen $(+-)$ und $(-+)$. Die Oszillation ist deutlich zu erkennen und hat eine Amplitude von ca. 250 (für die Kombination $(+-)$) bzw. 300 Ereignissen (für die Kombination $(-+)$), was etwa in beiden Fällen 15% der mittleren Zahl von Ereignissen pro Kanal entspricht. Die gleichen Histogramme sind in Abb.F.13 für die NC-Skala $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ gezeigt. Auch bei dieser Skala ist der Effekt noch gut zu erkennen, auch wenn die Oszillation nur noch etwa die halbe Amplitude aufweist⁶.

⁶Für das Verhältnis der beiden Werte der Skala gilt $\left(\frac{700 \text{ GeV}}{1 \text{ TeV}}\right)^2 = 0.49$.

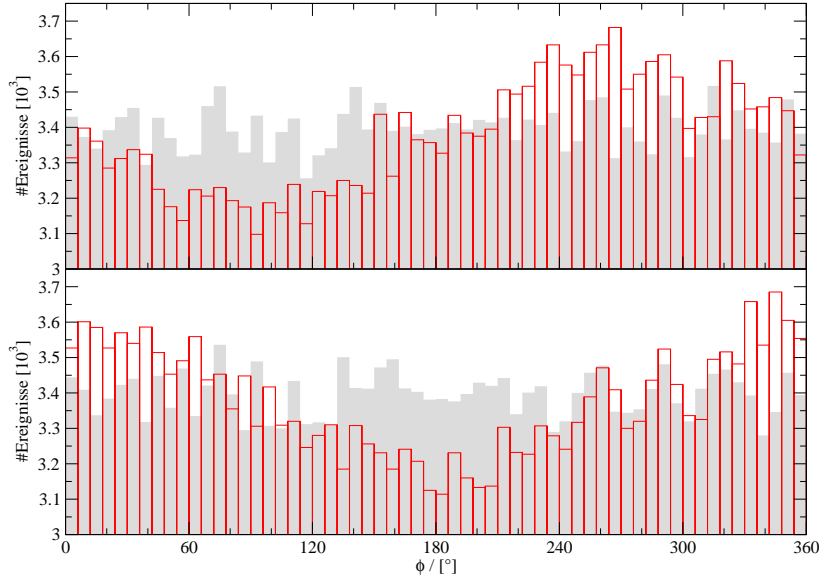


Abbildung 6.3: Die getrennte Messung der zu \vec{E}_\perp und \vec{B}_\perp proportionalen Terme im Wirkungsquerschnitt durch unterschiedliche Schnitte (siehe Text) für die Helizitäten $(+-)$; Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\vec{E} = \vec{B} = (1, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 1$

Die entsprechende von dem transversalen Teil des Vektors \vec{B} verursachte Oszillation für die Helizitäten $(+-)$ und $(-+)$ ist in den Abbildungen Abb.F.14 und Abb.F.15 zu sehen, wobei kein Schnitt an die Polarwinkel vorgenommen wurde. Auch hier ist der Effekt für beide Werte der Skala sehr gut sichtbar; für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ beträgt die Amplitude hier im Falle $(+-)$ mit ca. 350 – 400 Ereignissen etwa 12% der mittleren Zahl von Ereignissen pro Kanal, im Falle $(-+)$ mit ca. 600 Ereignissen etwa 14%.

Für die Kombination von Helizitäten $(--)$ tritt ebenfalls eine Oszillation auf, wobei die Statistik für diese Kombination deutlich schlechter als für die oben diskutierten Polarisation. Abb.F.16 zeigt den von \vec{E}_\perp verursachten Effekt. Die Amplitude der Oszillation beträgt für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ etwa ≈ 150 Ereignisse, was ca. 20% des Mittelwertes entspricht (bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ beträgt die Oszillation somit immerhin noch 10%). Die zu \vec{B}_\perp proportionale Oszillation ist in Abb.F.17 gezeigt und beträgt für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ etwa ≈ 300 Ereignissen oder ebenfalls ca. 20% des Mittelwertes.

Interessanterweise zeigt sich für die Kombination $(++)$ nicht nur keine Oszillation, sondern auch im Standardmodell werden über fünfmal weniger W -Bosonen der Helizitäten $(++)$ als Bosonen der Helizitäten $(--)$ produziert. Der Grund für diese erstaunliche Asymmetrie ist der Boost, der den partonischen Prozess im Laborsystem von dem in Abschnitt 4.4 untersuchten Prozess im Schwerpunktsystem unterscheidet. Betrachtet man z.B. Abb.F.1 rechts und Abb.4.3 rechts, so erkennt man, daß bei dem partonischen Prozess $u\bar{u}$ im Schwerpunktsystem vor allen W -Bosonen der Helizitäten $(-+)$ erzeugt werden (alle anderen Kombinationen sind stark unterdrückt) und die W^+ -Bosonen vorwiegend kollinear zum Impuls des u produziert werden. Also hat der Boost in Richtung des u , welcher den partonischen von hadronischen Prozess unterscheidet die Tendenz, die Helizität des W^- zu verändern und im Extremfall umzuklappen, während die Helizität des W^+ weitgehend unverändert bleibt. Betrachtet man nur die up-Quarks, so wird der große Wirkungsquerschnitt für die Kombination $(-+)$ im partonischen Prozess also durch den Boost also teilweise auf die Kombination $(--)$ abgebildet, während die Kombination $(++)$ durch diesen Effekt kaum zusätzliche Ereignisse erhält. Dieselbe Argumentation kann

	(++)	(+-)	(+0)	(-+)	(--)	(-0)	(0+)	(0-)	(00)
$E_1 = 1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	65.6	417	57.2	721	499	62.8	67.1	56.3	55.1
$E_1 = 1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	55.4	182	69.1	208	140	59.1	46.3	71.3	59.4
$B_1 = 1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	64.3	442	70.5	779	577	57.4	73.4	52.4	60.1
$B_1 = 1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	60.3	172	58.1	220	214	72.6	57.0	63.1	61.5

Tabelle 6.1: χ^2 für die Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM von Standardmodell (Histogramme mit 60 Kanälen)

auf den partonischen Prozess $d\bar{d}$ angewendet werden und führt zu demselben Ergebnis — in diesem Prozess ist die Kombination $(+-)$ stark bevorzugt, und der Boost verändert vor allem die Helizität des W^+ . Dieser Effekt zerstört die in Abschnitt 4.4 beobachteten Symmetrien sowie der Hierarchie der verschiedenen Helizitätskombinationen.

Variiert man die Kopplungskonstante κ_2 , so tritt bis auf eine leichte Veränderung der Amplitude der Oszillationen kein neuer Effekt auf. Wählt man anstelle des Schnitts (6.3) den Schnitt (6.4), so ändert die zu \vec{E}_\perp proportionale Oszillation ihr Vorzeichen. Da die Variation des Wirkungsquerschnitts mit dem Azimuthalwinkel in 1. Ordnung λ nur eine harmonische Oszillation ist, entspricht die Änderung des Vorzeichens einer Phasenverschiebung um π . Histogrammiert man die Azimuthalwinkelverteilung der Ereignisse also einmal mit dem Schnitt (6.4), verschiebt die Histogramme um den Winkel π und addiert sie anschließend zu den Histogrammen für den Schnitt (6.3), so löschen sich die beiden Oszillationen nicht aus, sondern verstärken sich, und die Statistik verdoppelt sich. Die zu \vec{B}_\perp proportionalen Oszillationen hingegen haben für beide Schnitte dasselbe Vorzeichen und löschen sich daher bei der Addition des verschobenen Histogramms aus. Da ohne Schnitte an die Polarwinkel sich die zu \vec{E}_\perp proportionalen Oszillationen wegheben, ermöglicht es dieser Trick, die transversalen Komponenten der beiden NC-Vektoren im Laborsystem getrennt auszumessen (die Phasenverschiebung der Oszillation enthält die nötige Information über die Lage der Vektoren in der zur Strahlachse senkrechten Ebene). Abb.6.3 zeigt die Anwendung dieses Tricks für die Kombination von Helizitäten $(+-)$ — der Vergleich mit den Histogrammen Abb.F.12 und Abb.F.14 zeigt, daß sich auf diese Weise tatsächlich beide Anteile zuverlässig trennen lassen.

Da im Standardmodell der Wirkungsquerschnitt vom Azimuthalwinkel unabhängig ist, sollten die Ereignisse pro Kanal im Azimuthalwinkelhistogramm um einen Mittelwert \bar{n} mit einem statistischen Fehler

$$\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$$

verteilt sein. Also ist

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - \bar{n})^2}{\Delta n^2} = \sum_i \frac{(n_i - \bar{n})^2}{\bar{n}} \quad (6.5)$$

(die Summe läuft über alle b Kanäle des Histogramms) ein geeignetes Maß für die Abweichung der gemessenen Daten von der vom Standardmodell vorhergesagten Verteilung. Sind die Daten statistisch gemäß dem Standardmodellwirkungsquerschnitt verteilt, so entspricht die Standardabweichung in etwa dem statistischen Fehler

$$\sqrt{\frac{1}{b} \sum (n_i - \bar{n})^2} \approx \sqrt{\bar{n}}$$

und es gilt im Mittel

$$\chi^2 \approx b$$

Tab.6.1 zeigt die so berechneten Werte von χ^2 (6.5) zu den sich für verschiedene Helizitäten und unterschiedliche Werte der NC-Vektoren sowie der Skala Λ_{NC} ergebenden Azimutalwinkelverteilungen (mit 60 Kanälen). Für den Fall eines nichtverschwindenden \vec{B} -Feldes wurden keine Schnitte an die Polarwinkel gesetzt; im Falle eines nichtverschwindenden \vec{E} -Feldes wurden wie oben diskutiert die Diagramme für unterschiedliche Schnitte addiert. Offensichtlich weicht das für die oben untersuchten Kombinationen von Helizitäten berechnete χ^2 stark von dem im Standardmodell zu erwartenden Wert $\chi^2 \approx 60$ ab, während die restlichen Kombinatione alle in der Nähe des zu erwartenden χ^2 liegen. Für eine feste Anzahl von Freiheitsgraden ist die Verteilung von χ^2 bekannt und kann z.B. mit Mathematica berechnet werden; bei 60 Freiheitsgraden ergibt sich im Standardmodell nur für ca. 5% aller Experimente ein $\chi^2 > 80$, und ein Wert von $\chi^2 = 100$ sollte sogar nur von weniger als 0.1% aller Experimente überschritten werden. Also läßt sich auch bei einer NC-Skala von $\Lambda_{\text{NC}} = 1\text{TeV}$ der von einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit verursachte Effekt nahezu sicher von statistischen Schwankungen der Verteilungen unterscheiden.

6.4 Paarproduktion mit semileptonischem Zerfall

Aufgrund der geringen Lebensdauer der W -Bosonen können diese nur über ihre Zerfallsprodukte detektiert werden, und eine direkte Untersuchung der im letzten Abschnitt simulierten Paarproduktion ist nicht möglich. Wie in Kaptiel 5 diskutiert, ermöglicht die Winkelverteilung der fermionischen Zerfallsprodukte zudem die Rekonstruktion der Verteilungen für die Produktion polarisierter W -Bosonen.

Um die praktische Anwendung des in Abschnitt 5.2 diskutierten Algorithmus zur Rekonstruktion der Helizitäten zu testen, wurde für den Prozess $pp \rightarrow (e\bar{\nu}_e)(u\bar{d})$ mit WHIZARD ein Monte-Carlo-Generator erzeugt und der Algorithmus zur Rekonstruktion der Helizität in FORTRAN implementiert. Wie in Abschnitt 5.3 diskutiert, wurde lediglich die Eichinvarianzklasse von Hintergrunddiagrammen, zu der die Paarproduktionsdiagramme gehören, berücksichtigt; die restlichen zu dem Prozess beitragenden Diagramme wurden per Hand aus dem von O'Mega generierten Matrixelement entfernt. Wie bereits im Falle der Paarproduktion wurden die zu diesen Diagrammen gehörenden Korrekturen in 1. Ordnung λ per Hand in FORTRAN implementiert, und das quadrierte Matrixelement durch die Entwicklung des Betragsquadrats bis zur 1. Ordnung in λ ersetzt. Bei der Berechnung des quadrierten Matrixelementes ist ein zusätzlicher Farbfaktor 3 zu berücksichtigen, da $u\bar{d}$ -Paare aller drei Farben erzeugt werden können.

Bei den bei der Paarproduktion auftretenden Schwerpunktsenergien $\gg 160\text{ GeV}$ können nicht nur Elektronen, sondern auch Muonen und Tauonen in guter Näherung als masselos angenommen werden, und unter dieser Annahme ist der Wirkungsquerschnitt für den Zerfall des W^+ in ein $\mu\bar{\nu}_\mu$ -Paar bzw. ein $\tau\bar{\nu}_\tau$ -Paar identisch zu dem berechneten Fall des Zerfalls in ein $e\bar{\nu}_e$ -Paar. Somit kann über die Leptonfamilien summiert werden, was mit einer einfachen Verdreifachung der Luminosität berücksichtigt wurde. Auch die Masse von charm- und strange-Quarks kann bei den auftretenden Schwerpunktsenergien vernachlässigt werden, so daß die Summe über die Produktion von $u\bar{d}$ - und $c\bar{s}$ -Paare einen weiteren Faktor 2 für die Luminosität liefert⁷.

Besondere Aufmerksamkeit verlangt der bei der Rekonstruktion auftretende statistische Fehler. Unterteilt man den Phasenraum der W -Bosonen in Kanäle k_l^\pm und das Intervall $[-1; 1]$ in Kanäle x_i , so wird die Anzahl $N(k_l^\pm)$ der in einem fiktiven Paarproduktionsexperiment in den Kanal k_l^\pm mit Helizitäten (rs) gestreuten W -Bosonen wie in Abschnitt 5.2 diskutiert berechnet

$$N(k_l^\pm) = \sum_{ij} N(k_l^\pm, x_i, x_j) Q_r(x_i) Q_s(x_j)$$

⁷Für den Fall der Produktion eines $c\bar{s}$ -Paares existiert außerdem die zweite im Abschnitt 5.3 diskutierte Eichäquivalenzklasse von Hintergrunddiagrammen nicht.

Dabei bezeichnen x_i und x_j den Kosinus des Polarwinkels des aus dem Zerfall des W^+ bzw. W^- entstandenen Antiteilchens im Schwerpunktsystem des intermediären Bosons, und die $Q_{r/s}$ sind die in Abschnitt 5.1 berechneten Projektorfunktionen. Sind genug Ereignisse vorhanden, so beträgt die Standardabweichung der tatsächlichen Verteilung

$$\Delta N(k_l^\pm, x_i, x_j) = \sqrt{N(k_l^\pm, x_i, x_j)}$$

und die Standardabweichung der Ereigniszahl pro Kanal in der rekonstruierten Verteilung ist somit das geometrische Mittel

$$\Delta N(k_l^\pm) = \sqrt{\sum_{ij} \Delta N(k_l^\pm, x_i, x_j)^2 Q_r(x_i)^2 Q_s(x_j)^2} = \sqrt{\sum_{ij} N(k_l^\pm, x_i, x_j) Q_r(x_i)^2 Q_s(x_j)^2} \quad (6.6)$$

Betrachtet man Abb.5.2, so sieht man, daß in einem Großteil des Intervalls $[-1; 1]$ die Abschätzung

$$Q_r(x)^2 > Q_r(x)$$

gilt, und durch explizite Rechnung erhält man die Ungleichungen

$$\int_{-1}^1 dx P_r(x) Q_s^2(x) > \int_{-1}^1 dx P_r(x) Q_s(x)$$

für alle Kombinationen von r und s . Somit ist zu erwarten, daß für den Fehler (6.6) gilt

$$\Delta N(k_l^\pm) > \sqrt{N(k_l^\pm)}$$

Abb.6.4 zeigt die normierte Polarwinkelverteilung für die Produktion von W -Bosonen der Helizitäten $(+-)$ mit Fehlerbalken einmal im Falle der direkten Paarproduktion und einmal nach der Rekonstruktion aus der Winkelverteilung der Zerfallsprodukte. Bei der direkten Produktion sind die Fehler gemäß \sqrt{N} verteilt; bei der rekonstruierten Verteilung wurden sie nach (6.6) berechnet, und die bei einer \sqrt{N} -Verteilung zu erwartenden Fehler blau markiert. Der Plot bestätigt die oben diskutierte Überlegung: obwohl die normierte Amplitude der Oszillation in beiden Fällen gleich groß ist, sind die durch die Rekonstruktion entstehenden Fehler wesentlich größer, als bei einer \sqrt{N} -Verteilung zu erwarten wäre. Also verschlechtert die Rekonstruktion der Helizitäten das Signal im Vergleich zu der (fiktiven) direkten Paarproduktion deutlich, so daß die Gesamtzahl der gesammelten Ereignisse möglichst groß sein muß, um die von einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit verursachte Oszillation von dem statistischen Rauschen trennen zu können.

Für alle durchgeführten Simulationen wurde eine integrierte Luminosität von $\int L = 400 \text{ fb}^{-1}$ angenommen, was einer Gesamtzahl von etwa $3.7 \cdot 10^6$ detektierbaren Ereignissen entspricht. Außerdem wurden zusätzlich zu dem Schnitt an die Schwerpunktsenergie (6.2) zwei Schnitte an die invarianten Massen der intermediären W -Bosonen

$$70 \text{ GeV} < m_+ < 90 \text{ GeV} \quad 70 \text{ GeV} < m_- < 90 \text{ GeV} \quad (6.7)$$

gesetzt, um den Einfluß von Hintergrunddiagrammen zu reduzieren. Da im Experiment der Bereich der Polarwinkel, unter denen der Detektor Teilchen noch erfassen kann, eingeschränkt ist, wurden außerdem entsprechende Schnitte an die Polarwinkel aller detektierbaren Fermionen (also nicht an den Polarwinkel des Neutrinos) gesetzt⁸

$$5^\circ \leq \theta_f \leq 175^\circ \quad (6.8)$$

⁸Aufgrund dieser Schnitte erstreckt sich der Integrationsbereich bei der Rekonstruktion der Helizitäten nicht mehr über das Intervall $[-1; 1]$, sondern nur noch über das Intervall $[-\cos 5^\circ; \cos 5^\circ]$. Dies verfälscht zwar prinzipiell die Impulsrekonstruktion, aber da $\cos 5^\circ \approx 0.996$ ist, kann dieser Effekt vernachlässigt werden.

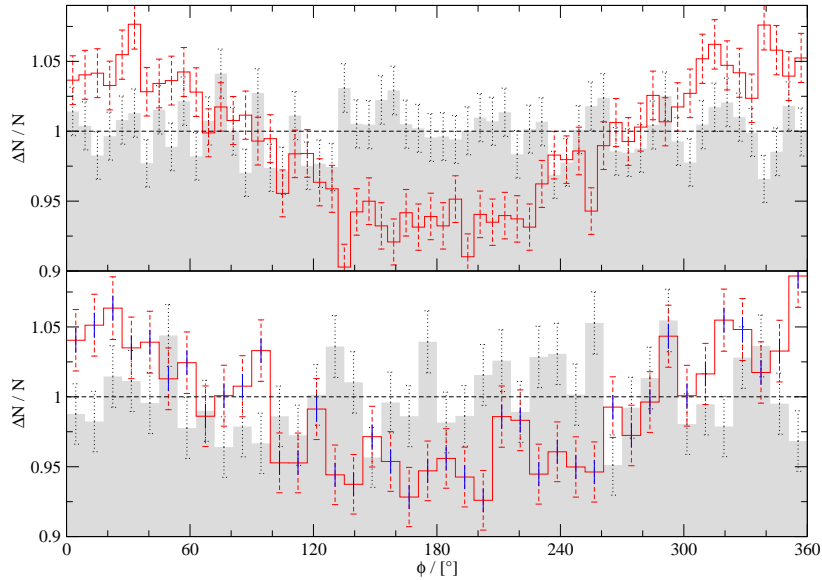


Abbildung 6.4: Relative Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung bei der Produktion von W -Bosonen mit den Helizitäten $(+-)$ im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau); oben: direkte W -Paarproduktion (60 Kanäle), unten Rekonstruktion (40 Kanäle). Die blauen Teile der Fehlerbalken im unteren Histogramm entsprechen \sqrt{N} -verteilten Fehlern. Schnitte: siehe Text, Luminosität $\int L = 400\text{fb}^{-1}$; Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700\text{GeV}$, $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

Die Anzahl der Kanäle pro Histogramm wurde von 60 Kanälen im letzten Kaptiel auf 40 Kanäle reduziert, um durch Mittelung über einen größeren Winkelbereich die statistische Schwankungen besser zu kompensieren. Bei allen Histogrammen, die den Einfluß der Parameter \vec{E} messen, wurden wie am Ende des letzten Abschnitts diskutiert die für die Schnitte (6.3) und (6.4) erhaltenen Histogramme um π phasenverschoben addiert, um die Statistik und somit die Qualität des Signals zu verbessern sowie den zu \vec{B} proportionalen Anteil herauszufiltern (vorausgesetzt, das Feld wurde in der Simulation als von Null verschieden angenommen). Für die auf \vec{B} sensitiven Histogramme wurde kein Schnitt an $(\theta_+ + \theta_-)$ vorgenommen, wodurch eventuelle zu \vec{E} proportionale Oszillationen automatisch herausgefiltert werden.

Wie am Ende von Abschnitt 5.2 diskutiert, ist es im Experiment nicht möglich, anhand der durch die Hadronisierung eines Quarks produzierten Jets auf dessen Ladung zu schließen. Daher können im Experiment \bar{d} und u nicht unterschieden werden, so daß nur die Summe über die transversalen Helizitäten sowie die longitudinale Polarisation des W^+ observabel sind. Das Ergebnis dieser Summe ist für den zu E_1 proportionalen Anteil des Wirkungsquerschnitts bei einer Skala von $\Lambda_{\text{NC}} = 700\text{ GeV}$ in Abb.F.18 gezeigt⁹. Die Oszillation, die bei der direkten Paarproduktion Abb.F.12 sowohl für $(+-)$ als auch $(-+)$ deutlich zu erkennen ist, wird im Falle $(\pm+)$ deutlich verrauschter und verschwindet für die Kombination $(\pm-)$ weitgehend im Rauschen. Für $(\pm+)$ beträgt die Amplitude etwa ca. 2000 Ereignisse, was etwa 12% der mittleren Zahl von Ereignissen pro Kanal entspricht; für $(\pm-)$ beträgt sie ca. 1000 Ereignisse, was etwa 7% entspricht (eine Abschwächung der Oszillation für diese Kombination im Vergleich zur direkten Paarproduktion war zu erwarten, da der Wirkungsquerschnitt für $(--)$ gegenphasig zu $(+-)$

⁹Im Folgenden wird die Summe über die Kombinationen $(-+)$ und $(++)$ als $(\pm+)$ sowie die Summe über $(+-)$ und $(--)$ als $(\pm-)$ bezeichnet.

	($\pm-$)	($\pm+$)	(± 0)	($0+$)	($0-$)	(00)	I	II
$E_1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	66.1	80.2	25.0	33.4	55.2	24.4	129	46.0
$B_1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	62.6	88.5	47.6	78.0	36.9	60.1	117	41.3
$E_1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	34.8	30.6	19.6	32.4	49.6	28.2	48.3	65.5
$B_1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	44.9	50.9	45.4	74.5	53.1	68.9	49.1	53.8

Tabelle 6.2: χ^2 für die Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM vom der Verteilung im Standardmodell. „I“ steht für die Summe über das Histogramm zu der Kombination ($\pm+$) und das um π phasenverschobene Histogramm für ($\pm-$), „II“ für die vollständige Polarisationssumme.

oszilliert).

Dasselbe Phänomen zeigt sich in Abb.F.19 für den zu B_1 proportionalen Teil des Wirkungsquerschnitts; auch hier ist die Oszillation deutlich verrauschter als im Falle der direkten Produktion. Für die Kombination ($\pm+$) beträgt die Amplitude der Oszillation mit ca. 1500 Ereignisse etwa 9% des Mittels pro Kanal, für ($\pm-$) sind es mit ca. 1250 Ereignissen ca. 8%.

Da die Verteilungen für die beide Kombinationen um π phasenverschoben sind, kann man die Signalqualität noch etwas verbessern, wenn man sie wieder um π phasenverschoben addiert. Das Resultat ist für die oben diskutierten Histogramme in Abb.F.20 dargestellt. Offensichtlich ist vor allem die zu E_1 proportionale Oszillation nach der Summation besser zu erkennen, und die statistischen Fluktuationen sind im Verhältnis zur Amplitude der Oszillation etwas reduziert.

Der Vorteil der Untersuchung einzelner Helizitätskombinationen im Gegensatz zu der Polarisationssumme besteht darin, daß die destruktive Interferenz der von verschiedenen Polarisationskombinationen verursachten Oszillationen vermieden wird — durch die Phasenverschiebung gegenphasig oszillierender Histogramme um π wird dieser Effekt „repariert“, und daher ist die Amplitude der Oszillation der so gebildeten Summe von Histogrammen größer als bei einer einfachen Polarisationssumme. Da statistische Fehler, die bei der Polarisationssumme gemäß \sqrt{N} verteilt sind, bei der Rekonstruktion der Helizitäten deutlich verstärkt werden, ist der Preis für diese Vergrößerung der Amplitude der Oszillation jedoch eine deutlich stärkere Fluktuation der Verteilung, so daß unter Umständen der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt trotz der niedrigeren Amplitude der Oszillation eine geeignetere Observable sein könnte. Um dies zu testen, zeigt Abb.F.21 die Abweichung der über die Polarisationen summierten Azimuthalwinkelverteilung von der Standardmodellvorhersage. Die zu \vec{E} proportionale Korrektur der Oszillation ist zwar zur erkennen, erscheint aber deutlich verrauschter und beträgt nur 1% der mittleren Zahl von Ereignissen pro Kanal. Der zu \vec{B} proportionale Effekt ist nicht sichtbar.

Ein quantitatives Maß für die Stärke der Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM liefert wie bei der direkten Produktion im letzten Kapitel die Berechnung von χ^2 . Da jedoch die Fehler nicht mehr wie \sqrt{N} verteilt sind, muß nun in (6.5) für den Fehler ΔN die Standardabweichung der entsprechenden Standardmodelldaten eingesetzt werden (die Berechnung des Fehlers mithilfe von (6.6) liefert zwar die korrekte Größenordnung des Fehlers, liegt aber meist etwas neben der numerischen Standardabweichung). Da die Gesamtzahl der von WHIZARD erzeugten Ereignisse von Lauf zu Lauf um etwa 1% schwankt, ist diese Vorgehensweise etwas weniger präzise als die Verwendung von \sqrt{N} als Fehler im letzten Kapitel. Eine Ausnahme ist die über die Polarisationen summierte Azimuthalwinkelverteilung, bei der die Fehler wieder wie \sqrt{N} verteilt sind und daher dieselbe Methode zur Berechnung von χ^2 wie im letzten Kapitel verwendet werden kann.

Die ersten zwei Zeilen von Tab.6.2 zeigen die so für die Histogramme Abb.F.18 – Abb.F.21 (und die restlichen beobachtbaren Helizitätskombinationen zu denselben Parameterwerten) berechneten Werte von χ^2 . Da die in diesem Kapitel untersuchten Histogramme 40 Kanäle besitzen, sollten im Standardmodell verschiedene Meßreihen um einen Wert von $\chi^2 = 40$ verteilt sein. Wie sich mithilfe der χ^2 -Verteilung berechnen läßt, ist nur für 14% der Experimente ein $\chi^2 > 50$ zu erwarten, und weniger als

1% aller Experimente sollten ein $\chi^2 > 70$ ergeben. Während die Kombination $(\pm+)$ ein deutlich erhöhtes $\chi^2 > 80$ aufweist, ergibt die Kombination $(\pm-)$ $\chi^2 > 60$, was immer noch größer ist als die sich für die restlichen Kombinationen von Helizitäten¹⁰ ergebende Werte für χ^2 . Die Summe aus dem Histogramm $(\pm-)$ und dem um π phasenverschobenen Histogramm $(\pm+)$ ist dagegen mit $\chi^2 > 100$ nahezu eindeutig vom Standardmodell zu unterscheiden. Die über alle Polarisationen summierte Verteilung ergibt dagegen nur $\chi^2 \approx 40$, womit sie anhand von χ^2 nicht von der im Standardmodell zu erwartenden Verteilung zu unterscheiden ist.

Die Histogramme Abb.F.22 – Abb.F.23 zeigen die oben diskutierten Azimuthalwinkelverteilungen¹¹ für die Skala $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$. Wie zu erwarten, ist die bei der direkten Paarproduktion deutlich erkennbare Oszillation fast vollständig im Rauschen verschwunden und ist insbesondere für die Kombination $(\pm+)$ nicht mehr erkennbar. Die Summe der Azimuthalwinkelverteilungen (nach der Phasenverschiebung der Verteilung für $(\pm+)$) zeigt für die phasenverschobene Summe der auf \vec{E} sensitiven Schnitte (6.3) und (6.4) noch eine leichte Oszillation, während die auf \vec{B} sensitive Verteilung ohne Schnitte an $(\theta_+ + \theta_-)$ kaum noch eine erkennbare Abweichung von der Standardmodellverteilung zeigt. Die über alle Polarisationen summierte Verteilung ist nicht mehr von der im Standardmodell zu erwartenden Verteilung zu unterscheiden.

Die letzten beiden Zeilen von Tab.6.2 zeigen die zu den für $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ berechneten Histogrammen ermittelten Werte von χ^2 . Diese sind jedoch alle kleiner als 70, so daß für diesen Wert der Skala die Azimuthalwinkelverteilungen im nmNCSM anhand von χ^2 nicht mehr von der Standardmodellverteilung zu unterscheiden sind.

6.5 Die Rekonstruktion des Neutrinoimpulses

Um die Rekonstruktion der Helizitäten der intermediären W -Bosonen durchführen zu können, ist die Kenntnis der Impulse der bei dem Zerfall erzeugten Fermionen notwendig. Im Falle des Zerfalls in ein Lepton-Neutrino-Paar stellt dies ein grundsätzliches Problem dar, da das Neutrino nicht detektiert werden kann. Also ist es nötig, eine Möglichkeit zur Rekonstruktion des Neutrinoimpulses zu finden.

Bestünde der Anfangszustand des Experiments aus zwei Teilchen mit eindeutig definierten Impulsen, so könnte die Impulserhaltung zur Berechnung des Neutrinoimpulses genutzt werden (z.B. bei Experimenten an einem zukünftigen e^+e^- -Linearkollider). Bei Kollisionen von Hadronen tragen die kollidierenden Partonen jedoch nur einen Teil des hadronischen Gesamtimpulses; der Restimpuls wird von den nicht an der Reaktion teilnehmenden Resten der Protonen getragen, die in Strahlrichtung weiterfliegen und daher nicht detektiert werden können. Somit steht keine Information über den Gesamtimpuls des partonischen Anfangszustandes zur Verfügung, der zur Berechnung des Neutrinoimpulses verwendet werden könnte.

Nimmt man jedoch an, daß die transversalen Komponenten des partonischen Gesamtimpulses verschwinden, so lassen sich zumindest die transversalen Komponenten des Neutrinoimpulses aus der Impulserhaltung berechnen — die Impulse von Neutrino bzw. Lepton werden im Folgenden als p bzw. q bezeichnet, und k_+ steht für den (aus den Impulsen der von den Quarks produzierten Jets bestimmbaren) Impuls des W^+

$$\vec{p}_\perp = -\vec{q}_\perp - \vec{k}_{+,\perp}$$

¹⁰Tab.6.2 zeigt für die Kombination $(0+)$ ohne Schnitte an die Summe der Polarwinkel ebenfalls ein deutlich erhöhtes $\chi^2 > 70$. Dieses skaliert jedoch nicht mit Λ_{NC} und ist die Konsequenz einer statistischen Abweichung der Standardmodellaten, so daß diese Abweichung im Folgenden ignoriert wird.

¹¹Die Untersuchung der oben ausgewerteten Daten zeigt, daß für $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$ ohne Schnitt an $(\theta_+ + \theta_-)$ bzw. für $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$ und die phasenverschobene Summe der Verteilungen für die Schnitte (6.3), (6.4) keine Abweichung von Standardmodell auftritt. Daher wurden die Daten für $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ mit den NC-Vektoren $\vec{E} = \vec{B} = (1, 0, 0)^T$ erzeugt und die von \vec{E} und \vec{B} verursachten Anteile der Oszillation wie im letzten Abschnitt diskutiert durch Schnitte getrennt.

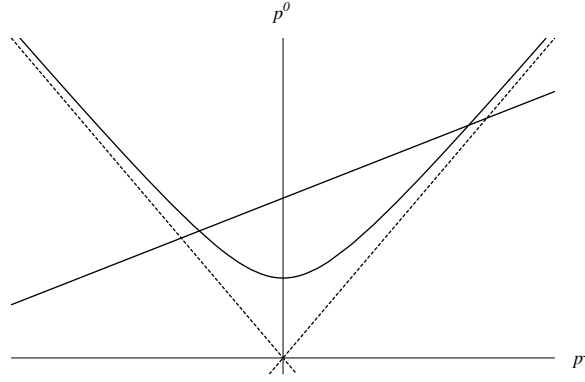


Abbildung 6.5: Die durch die Massenschalenbedingungen des Neutrinos und des intermediären Vektorbosons in der p_0 - p_3 -Ebene definierten Kurven

Damit verbleiben noch zwei unbekannte Impulskomponenten p^0 und p^3 , von denen sich eine durch die Massenschalenbedingung des Neutrinos

$$p^{0^2} - p^{3^2} - |p_{\perp}|^2 = 0 \quad (6.9)$$

eliminieren läßt.

Sind die Auswirkungen der Hintergrunddiagramme (eventuell nach geeigneten Schnitten an die restlichen Impulse) vernachlässigbar, so liegt der Impuls des intermediären W^- bei fast allen Ereignissen nahezu auf der Massenschale, so daß die Massenschalenbedingung des W^- eine zweite Bedingung an p liefert

$$(p + q)^2 = 2(p^0 q^0 - p^3 q^3 - \vec{p}_{\perp} \vec{q}_{\perp}) = m_W^2 \quad (6.10)$$

Die Massenschalenbedingung des Neutrinos (6.9) definiert in der von p^0 und p^3 aufgespannten Halbebene eine Hyperbel, die die p^0 -Achse bei $|p_{\perp}|$ schneidet und deren Asymptoten Ursprungsgeraden mit den Steigungen ± 1 sind. Durch die Massenschalenbedingung des Vektorbosons (6.10) wird eine Gerade in der Ebene festgelegt, wobei der Betrag des Steigung

$$\left| \frac{q^3}{q^0} \right| = \frac{\sqrt{q^{0^2} - |q_{\perp}|^2}}{q^0}$$

immer kleiner oder gleich 1 ist. Diese Konfiguration in der p^0 - p^3 -Ebene ist in Abb.6.5 dargestellt. Die Schnittpunkte der beiden Kurven definieren zwei mögliche Lösungen für den Neutrinoimpuls. Da die Steigung der Geraden fast immer kleiner als die Steigung der Asymptoten der Hyperbel ist, erhält man in fast jedem Fall zwei kinematisch gleichberechtigte Lösungen für den Impuls des Neutrinos.

Aus den Gleichungen (6.9) und (6.10) erhält man analytisch die beiden Lösungen für p^0 und p^3

$$p_{1/2}^0 = \frac{q^{0^2} (m_W^2 + 2\vec{p}_{\perp} \vec{q}_{\perp}) \pm q^3 A}{2q^0 (q^{0^2} - q^{3^2})} \quad p_{1/2}^3 = \frac{2q^3 \vec{p}_{\perp} \vec{q}_{\perp} \pm A}{2 (q^{0^2} - q^{3^2})}$$

mit der Abkürzung

$$A = q^0 \sqrt{(m_W^2 + 2\vec{q}_{\perp} \vec{p}_{\perp})^2 + 4|q_{\perp}|^2 (q^{3^2} - q^{0^2})}$$

Beide Lösungen erfüllen die Impulserhaltung und die Massenschalenbedingungen und sind daher anhand rein kinematischer Überlegungen nicht zu trennen. Wendet man dieses Rekonstruktionsverfahren

auf die für den letzten Abschnitt generierten Daten an, so stellt man fest, daß jede der beiden Lösungen bei etwa der Hälfte der Ereignisse den Impuls annähernd korrekt reproduziert, so daß ein eindeutiges Kriterium nötig ist, um für jedes Ereignis einen der beiden Impulse zu selektieren. Als am wirksamsten (wenn auch bei weitem nicht perfekt) hat es sich erwiesen, den Impuls zu wählen, der den Kosinus des Zwischenwinkels der beiden W -Bosonen minimiert. Auf diese Art und Weise können zumindest etwa 60% der Impulse korrekt rekonstruiert werden. Nach der Rekonstruktion ist ein Schnitt an die Masse des W^- sinnlos, da der Impuls bei der Rekonstruktion auf die Massenschale gesetzt wird. Daher wurden nur noch die Schnitte an die Schwerpunktsenergie (6.2) sowie an m_+ (6.7) und der Akzeptanzschnitt (6.8) bei allen Verteilungen vorgenommen.

Setzt man keine Schnitte an die Polarwinkel sowie an die Schwerpunktsenergie, so hat der fehlende Neutrinoimpuls keine Auswirkung auf die Messung der über die Polarisierungen summierten Azimutalwinkelverteilung, da der transversale Impuls des Neutrinos bekannt ist. Daher bedeutet der bei der Rekonstruktion der Impulse gemachte Fehler in diesem Fall lediglich ein „Umverteilen“ von Ereignissen zwischen den Histogrammen für verschiedene Helizitätskombinationen, welches sich in der Summe aufheben muß. Setzt man jedoch Schnitte an die Polarwinkel, so können Ereignisse mit einem falsch rekonstruiertem Polarwinkel des W^+ die Verteilung auch im Falle einer Polarisationssumme verändern. Insbesondere ist es nicht mehr selbstverständlich, daß der in den letzten zwei Abschnitten zur Trennung der zu \vec{E} bzw. \vec{B} proportionalen Anteile verwendete Trick auch nach der Rekonstruktion des Neutrinoimpulses noch funktioniert, da falsch rekonstruierte Ereignisse die komplementären Verteilungen für die Schnitte (6.3) und (6.4) mischen könnten und die Summe der phasenverschobenen Verteilungen immer noch zu \vec{B} proportionale Anteile haben könnte. Untersucht man jedoch die sich mit dem rekonstruierten Impuls ergebenden Verteilungen, so zeigt sich für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ kein derartiger Effekt; wählt man $\vec{E} = 0$, so tritt in der phasenverschobenen Summe der Verteilungen zu den Schnitten (6.3) und (6.4) keine (erkennbare) Oszillation auf.

Die Histogramme Abb.F.26 – Abb.F.29 zeigen dieselben Verteilungen für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ wie Abb.F.18 – Abb.F.21 und resultieren aus denselben Daten; als einziger Unterschied wurden die von WHIZARD erzeugten Neutrinoimpulse verworfen und durch die rekonstruierten Impulse ersetzt. Offensichtlich führt die Rekonstruktion des Neutrinoimpulses zu einem Anstieg der mittleren Ereigniszahl pro Kanal für die Kombinationen von Helizitäten $(\pm-)$ und $(\pm+)$. Außerdem ist nach der Rekonstruktion die Oszillation der Verteilung für die Kombination $(\pm-)$ besser erkennbar, während die Amplitude der Oszillation für die Kombination $(\pm+)$ im Vergleich zu der exakten Verteilung reduziert ist. Nach der Summation der Verteilung für die Kombination $(\pm-)$ und der um π phasenverschobenen Verteilung für die Polarisierungen $(\pm+)$ ist (bis auf die größere Zahl von Ereignissen pro Kanal) keine wesentliche Veränderung durch die Rekonstruktion des Neutrinoimpulses zu erkennen, was angesichts der Tatsache, daß immerhin über für ca. 40% der Ereignisse die falsche Lösung gewählt wird, bemerkenswert ist. Allerdings entsteht durch die Fehler bei der Rekonstruktion eine Oszillation des Wirkungsquerschnitts für die Kombination (± 0) , die in Abb.6.6 sowohl für den zu \vec{E} als auch den zu \vec{B} proportionalen Anteil gezeigt ist. Diese Oszillation hat die gleiche Phase wie die Oszillation für die Kombination $(\pm+)$, so daß anscheinend durch die Fehler bei der Rekonstruktion des Neutrinoimpulses Ereignisse von der Kombination $(\pm+)$ zu der Kombination (± 0) „verschoben“ werden. Die zu \vec{E} proportionale Oszillation der über alle Polarisierungen summierten Verteilung ist nach der Rekonstruktion des Neutrinoimpulses kaum mehr sichtbar, und eine zu \vec{B} proportionale Oszillation ist wie vor der Rekonstruktion nicht zu erkennen.

Abb.F.30 – Abb.F.33 entsprechen den Histogrammen Abb.F.18 – Abb.F.25 für $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$ und wurden wieder aus denselben Daten mit den rekonstruierten Neutrinoimpulsen erzeugt. Der Vergleich zeigt wiederum, daß die Oszillation für die Kombination $(\pm-)$ durch die Fehler bei der Rekonstruktion etwas verstärkt wird, während für die Kombination $(\pm+)$ im Gegensatz zu der exakten Verteilung keine nichtkommutativen Effekte mehr sichtbar sind. Die über die Polarisierungen summierten Histogramme unterscheiden sich (bis auf die größere Zahl von Ereignissen pro Kanal im Falle der phasenverschobenen

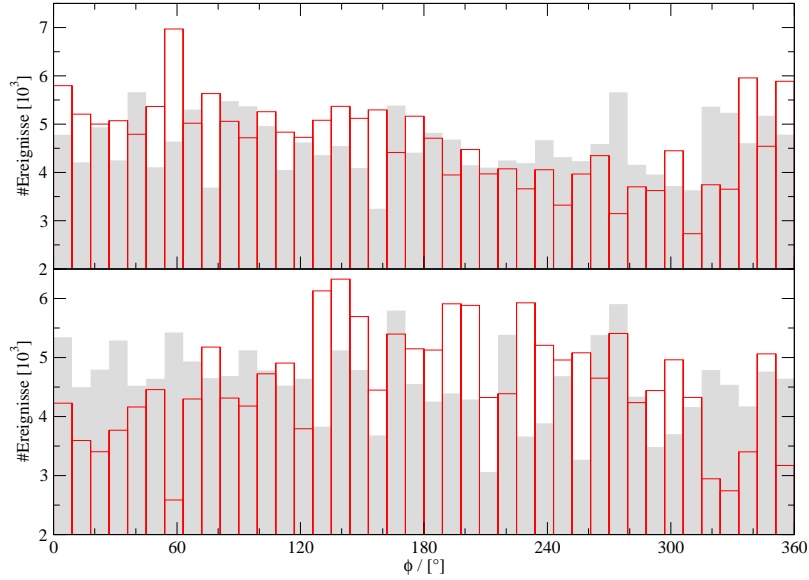


Abbildung 6.6: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) nach der Ersetzung des Neutrinoimpulses durch die Rekonstruktion für die Helizitäten (± 0). Oben wurden die Verteilungen für die Schnitte (6.3) und (6.4) phasenverschoben addiert, unten kein Schnitt an die Polarwinkel gesetzt. Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, oben: $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$; unten: $\text{vec}E = 0$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

Summe) nicht wesentlich von den Verteilungen für die tatsächlichen Werte des Neutrinoimpulses.

Tab.6.3 zeigt für die Histogramme Abb.F.30 – Abb.F.33 sowie die restlichen observablen Kombinationen von Helizitäten die auf die gleiche Art und Weise wie im letzten Abschnitt berechneten Werte von χ^2 . Der Vergleich mit Tab.6.2 zeigt, daß die Signifikanz der Abweichungen insgesamt durch die Fehler bei der Rekonstruktion des Neutrinoimpulses nicht wesentlich reduziert wird. Wie aus der qualitativen Diskussion der Verteilungen zu erwarten ist, vergrößert sich χ^2 für die Summe ($\pm -$) und liegt für $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ mit $\chi^2 > 140$ deutlich außerhalb des für die Mehrzahl der Standardmodellverteilungen zu erwartenden Bereiches, während die Kombination ($\pm +$) mit $\chi^2 \approx 60$ nicht mehr eindeutig vom Standardmodell zu unterscheiden ist. Die phasenverschobene Summe der Verteilungen für ($\pm -$) und ($\pm +$) ist trotz der Fehler bei der Rekonstruktion anhand von χ^2 noch nahezu sicher von den im Standardmodell zu erwartenden Verteilungen zu unterscheiden, während die Verteilung für die vollständige Polarisationssumme wie schon vor der Rekonstruktion keine signifikante Abweichung von der Stan-

	($\pm -$)	($\pm +$)	(± 0)	($0 +$)	($0 -$)	(00)	I	II
$E_1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	164	68.9	87.6	68.6	45.3	43.1	141	34.2
$B_1, \Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$	143.8	54.0	81.0	47.6	39.0	41.8	133	50.0
$E_1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	79.7	29.8	60.6	47.3	50.4	54.4	53.0	50.3
$B_1, \Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$	67.8	35.6	56.9	48.5	47.6	45.3	64.9	54.7

Tabelle 6.3: χ^2 für die Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM von der im Standardmodell. „I“ steht für die phasenverschobene Summe der Histogramme für ($\pm -$) und ($\pm +$), „II“ steht für die Summe über alle Polarisierungen.

Standardmodellverteilung zeigt. Für $\chi^2 = 1$ TeV lässt sich nach der Rekonstruktion des Neutrinoimpulses keine der Verteilungen anhand von χ^2 noch eindeutig von der Standardmodellverteilung unterscheiden (obwohl die Verteilungen für $(\pm-)$ noch ein erhöhtes χ^2 aufweisen, was mit dem qualitativen Eindruck einer noch erkennbaren (geringen) Oszillation für diese Kombinationen übereinstimmt).

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die phänomenologische Untersuchung der Produktion von W -Bosonen im nicht-kommutativen Standardmodell und die Bewertung der Möglichkeit, mithilfe dieses Prozesses das nmNCSM für Werte von Λ_{NC} der Größenordnung 1 TeV am LHC zu untersuchen.

Die Untersuchung des partonischen Wirkungsquerschnitts für die Produktion polarisierter W -Bosonen in Kapitel 4 hat gezeigt, daß die Oszillation des differentiellen Wirkungsquerschnitts mit dem Azimutalwinkel eine wichtige Signatur einer eventuellen Nichtkommutativität der Raumzeit für diesen Prozess ist. Die genaue Form dieser Oszillation ist stark durch die Transformationseigenschaften des in dieser Arbeit diskutierten konstanten Tensors $\theta^{\mu\nu}$ unter Lorentztransformationen sowie der Linearität des bis zur 1. Ordnung und λ entwickelten Wirkungsquerschnitts in $\theta^{\mu\nu}$ bzw. \vec{E} und \vec{B} eingeschränkt; die einzig mögliche funktionale Form ist in dieser Näherung eine harmonische Oszillation mit dem Azimutalwinkel, deren Phase sich bei Rotation der transversalen Komponenten der NC-Felder um den Rotationswinkel verschiebt. Die azimuthale Oszillation ist proportional zu den transversalen Komponenten der NC-Felder und von den longitudinalen Komponenten unabhängig.

Die Oszillation des Wirkungsquerschnitts unterscheidet sich für verschiedene Kombinationen von Helizitäten der W -Bosonen sowohl in der Amplitude als auch in der Phase, so daß der Effekt in der Polarisationssumme durch destruktive Interferenz deutlich reduziert ist. Will man auf die Auswirkungen der nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells möglichst sensitiv sein, so ist also die Polarisation der produzierten Eichbosonen eine wesentliche Observable.

Berücksichtigt man die Breite des Z -Bosons bzw. betrachtet die Produktion polarisierter W -Bosonen, so tritt auch eine leichte Veränderung des differentiellen Wirkungsquerschnitts durch die transversalen Komponenten der NC-Vektoren auf; dieser Effekt ist aber so klein, daß er kaum experimentelle Bedeutung besitzt und daher in dieser Arbeit nicht näher diskutiert wurde.

Weiter zeigte die Diskussion des partonischen Wirkungsquerschnitts, daß der neue Parameter κ_2 (siehe Abschnitt 3.2) keinen wesentlichen Einfluß auf die Oszillation des Wirkungsquerschnitts mit dem Azimutalwinkel hat. Der Grund dafür ist die Dominanz der t - bzw. u -Kanal-Diagramme in den wesentlichen Bereichen des Phasenraums, während der Parameter κ_2 nur in s -Kanal-Diagrammen auftritt. Bei der Untersuchung des polarisierten Wirkungsquerschnitts in Kapitel 4 wurde eine weitere starke Einschränkung an die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von \vec{E} und \vec{B} gefunden, die eine Konsequenz der CP-Invarianz des nmNCSM (bei geeigneter Transformation von $\theta^{\mu\nu}$) ist. Diese Invarianz erzwingt, daß die zu \vec{B} proportionalen Anteile der Korrektur des Wirkungsquerschnitts sich in der Polarisationssumme wegheben, so daß der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt von \vec{B} unabhängig ist. Die gleiche Argumentation läßt sich auf alle Prozesse mit (nach einer eventuellen Polarisationssumme) CP-invarianten Anfangs- und Endzuständen anwenden und erklärt somit auch die z.B. in [2, 4] gefundene Unabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von \vec{B} sowie die Tatsache, daß der in [18] gefundene

differentielle Wirkungsquerschnitt für die Paarproduktion unpolarisierter Gluonen invariant unter der Ersetzung $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ ist. Bei der Untersuchung der Produktion polarisierter W -Bosonen zeigte sich zwar eine Abhängigkeit von \vec{B} , die aber wesentlich kleiner als die zu \vec{E} proportionale Korrektur ist.

Da sich die Polarisierungen der W -Bosonen also als wichtige Observablen herausgestellt haben, wurde in Kapitel 5 die Rekonstruktion des polarisierten Wirkungsquerschnitts für die Paarproduktion aus der bei dem Zerfall der W -Bosonen in Fermionpaare auftretenden Winkelverteilung der Zerfallsprodukte diskutiert. Es zeigt sich, daß die aus der nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells stammenden Korrekturen zu diesem Verfahren in 1. Ordnung in $\theta^{\mu\nu}$ verschwinden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wurde speziell der Zerfall in ein Quark- und ein Leptonpaar diskutiert, da bei dem Zerfall in zwei Fermionpaare *zwei* nicht detektierbare Neutrinos auftreten, und bei einem in Quarks zerfallenden W -Bosons andererseits im Experiment nicht zwischen unterschiedlichen transversalen Polarisierungen unterschieden werden kann. Für diesen Fall wurden die zusätzlich zu den Paarproduktionsdiagrammen auftretenden Hintergrunddiagramme diskutiert. In Anlehnung an [33] wurde gezeigt, daß diese sich in zwei Eichinvarianzklassen unterteilen, von welchen nur diejenige in den Monte-Carlo-Simulationen berücksichtigt wurde, in der die Paarproduktionsdiagramme enthalten sind.

In Kapitel 6 schließlich wurde mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen die W -Paarproduktion mit anschließendem semileptonischen Zerfall untersucht. Aufgrund der Tatsache, daß der Boost vom Laborsystem in das Ruhesystem der wechselwirkenden Partonen die Vektoren \vec{E} und \vec{B} mischt, ist der Einfluß von \vec{B} auf den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem am LHC wesentlich größer als bei der Diskussion des partonischen Wirkungsquerschnitts im Schwerpunktsystem. Es zeigte sich, daß ohne Schnitte an die Polarwinkel der W -Bosonen keine zu \vec{E} proportionale Oszillation der Azimutalwinkelverteilung, dafür jedoch eine ausgeprägte zu \vec{B} proportionale Oszillation zu erkennen ist. Mithilfe geeigneter Schnitte (6.3) und (6.4) ist es möglich, auch eine deutliche zu \vec{E} proportionale Oszillation sichtbar zu machen. Durch Phasenverschiebung einer der beiden komplementären Verteilungen um π und anschließende Summation kann die Statistik für die Beobachtung des zu \vec{E} proportionalen Effekts verdoppelt werden, während die zu \vec{B} proportionale Oszillation sich bei der Summe aufhebt und somit herausgefiltert wird. Mit diesem Trick lassen sich also durch Untersuchung des in dieser Arbeit diskutierten Prozesses \vec{E} und \vec{B} getrennt voneinander ausmessen.

Zusätzlich zu der direkten Produktion polarisierter Eichbosonen wurde auch die Rekonstruktion des polarisierten Wirkungsquerschnitts aus dem Prozess $W^+W^- \rightarrow (e\bar{\nu}_e)(u\bar{d})$ mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation untersucht. Es zeigte sich, daß durch die Rekonstruktion der statistische Fehler der Verteilungen deutlich verstärkt wird, so daß der Preis für die bessere Sensitivität auf Auswirkungen der nmNCSM-Erweiterungen durch Detektion der Polarisierungen eine schlechtere Signalqualität ist. Trotzdem erwies sich die Untersuchung des polarisierten Wirkungsquerschnitts als wesentlich effektiver als die der naiven Polarisierungssumme. Um die absolute Amplitude der azimuthalen Oszillation weiter zu erhöhen, bietet es sich an, die gegenphasig oszillierenden Verteilungen für verschiedene Kombinationen von Helizitäten phasenverschoben zu addieren — dies entspricht einer Korrektur der bei der naiven Polarisierungssumme auftretenden Auslöschungen der Oszillation zwischen den Beiträgen für verschiedene Helizitäten. Da mit dem oben beschriebenen Trick der Einfluß von \vec{E} und \vec{B} in 1. Ordnung $\theta^{\mu\nu}$ getrennt untersucht werden kann, funktioniert diese Summe auch ohne Kenntnis der NC-Vektoren.

Am Ende des letzten Kapitels wurde eine kinematische Methode zur Rekonstruktion des im Experiment nicht detektierbaren Neutrinoimpulses vorgestellt, die das W^- auf die Massenschale setzt (diese Näherung ist für den betrachteten Prozess gerechtfertigt). Leider erhält man auf diese Weise zwei mögliche Lösungen für den Neutrinoimpuls, von denen keine aus kinematischen Gründen bevorzugt ist. In dieser Arbeit wurde ein Auswahlkriterium gefunden, welches es erlaubt, zumindest für 60% der Ereignisse die „korrekte“ Lösung auszuwählen. Überraschenderweise zeigt sich, daß der mit 40% falsch rekonstruierten Ereignissen beträchtliche Fehler die Nachweisbarkeit der azimuthalen Oszillation nicht wesentlich reduziert. Als quantitatives Unterscheidungsmerkmal zwischen den im nmNCSM und den

im Standardmodell zu erwartenden Verteilungen wurde das χ^2 für die Abweichung von der Standardmodellverteilung berechnet.

Die Auswertung der generierten Daten zeigt, daß bei einem Wert der NC-Skala von $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$ die azimuthale Oszillation am LHC eindeutig nachweisbar sein sollte. Setzt man die Skala auf $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, so halbiert sich die nichtkommutative Korrektur zum Wirkungsquerschnitt, und die Auswirkungen der nichtkommutativen Erweiterung des Standardmodells sind zumindest anhand der berechneten Werte von χ^2 nicht mehr eindeutig von der Standardmodellverteilung zu unterscheiden (obwohl eine leichte Oszillation der Verteilung noch erkennbar scheint, so daß möglicherweise die Konstruktion geeigneter Observablen dennoch eine signifikante Unterscheidung zwischen Standardmodell und nmNCSM erlaubt).

In dieser Arbeit wurde die Effizienz des Detektors nicht berücksichtigt, was im Experiment zu einer Reduktion der Gesamtzahl der Ereignisse im Vergleich zur Simulation führt. Andererseits wurde lediglich der Prozess $pp \rightarrow W^+W^- \rightarrow (e\bar{\nu}_e)(u\bar{d})$ untersucht; der Prozesses $pp \rightarrow W^+W^- \rightarrow (d\bar{u})(\nu_e\bar{e})$ führt zu derselben Anzahl von Ereignissen, so daß die aus beiden Prozessen gewonnenen Daten zur Verbesserung der Statistik verwendet werden können. Außerdem nicht untersucht wurde die Tatsache, daß der Tensor $\theta^{\mu\nu}$ fast sicher nicht konstant ist, sondern sich mindestens aufgrund der Erdrotation sowie der Rotation der Erde um die Sonne mit der Zeit verändert. Ist das Bezugssystem, in dem $\theta^{\mu\nu}$ konstant ist bekannt (sofern ein solches existiert), dann läßt sich der Einfluß der Rotation aus der Verteilung der Ereignisse herausrechnen. Um aber zunächst einen Hinweis auf die Lage der NC-Vektoren im Raum zu erhalten, müssen zeitliche Schnitte an die Ereignisse gesetzt werden, welche die Zahl der Ereignisse weiter reduzieren.

Ignoriert man diese Komplikation jedoch, so sollten die am LHC gesammelten Daten genügen, um eine Nichtkommutativität der Raumzeit (zumindest in der Form der in [5] vorgeschlagenen Erweiterung des Standardmodells) auf einer Skala $\leq 1 \text{ TeV}$ auszuschließen. Sollte tatsächlich eine azimuthale Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der in dieser Arbeit diskutierten Form gefunden werden, so könnten Experimente an dem geplanten Linear Collider dazu verwendet werden, die Parameter des nmNCSM deutlich genauer auszumessen, da hier die Faltung mit den Partonverteilungen sowie die Rekonstruktion des Neutrinoimpulses entfällt (da am LC der Impuls des Anfangszustandes festgelegt ist, kann der fehlende Impuls aus der Impulserhaltung berechnet werden). Zur Auswertung der so gesammelten Daten wäre allerdings eine genauere Analyse des Prozesses in 2. Ordnung $\theta^{\mu\nu}$ wünschenswert.

Anhang A

Konventionen und Notation

In dieser Arbeit wird durchgehend der Metrische Tensor

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = (g_{\mu\nu})$$

verwendet. Lorentzindizes werden mit griechischen Kleinbuchstaben bezeichnet, Gruppengeneratoren und Vektorkomponenten mit römischen Kleinbuchstaben. Es gilt die einstein'sche Summenkonvention, d.h. in jedem Term eines Ausdrucks wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Nur bei Lorentzindizes wird zwischen oberer und unterer Position unterschieden. Das Skalarprodukt zweier Vervektoren a^μ und b^μ wird auch geschrieben als

$$a^\mu b_\mu = (ab)$$

Die Begriffe „kommutativ“ und „nichtkommutativ“ beziehen sich (sofern nicht explizit anders vermerkt) ausschließlich auf die zugrundeliegende Struktur der Raumzeit und *nicht* auf die Struktur der Eichgruppe. Die Algebra der formalen Potenzreihen der nichtkommutativen Koordinaten \hat{x}^μ wird mit \mathcal{A} bezeichnet. Die Elemente der von \mathcal{A} sowie der Algebra der Funktionen der Raumzeit bezüglich des deformierten Produkts \star werden durch einen „Hut“ von den herkömmlichen Funktionen der Raumzeit unterschieden, also z.B. $\hat{\phi}(x)$.

Das Vorzeichen des Eichfeldes in den Definition der kovarianten Ableitung ist stets als

$$D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$$

gewählt. Sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt, bezeichnen Eichparameter ohne Index entweder ein Element der Lie-Algebra $\tau(x)$ oder ein Element der einhüllenden Algebra $\hat{\tau}(x)$.

Für die Kontraktionen des Tensors $\theta^{\mu\nu}$ mit Vierervektoren wird abkürzend geschrieben

$$\begin{aligned}\theta^{\mu\nu} a_\mu b_\nu &= a\theta b \\ \theta^{\mu\nu} a_\mu &= a\theta^\nu = -\theta^{\nu\mu} a_\mu\end{aligned}\tag{A.1}$$

Als abkürzende Schreibweise wird der total antisymmetrische Tensor

$$\theta^{\mu\nu\rho} = \theta^{\mu\nu}\gamma^\rho + \theta^{\rho\mu}\gamma^\nu + \theta^{\nu\rho}\gamma^\mu\tag{A.2}$$

definiert.

Pfeile über partiellen Ableitungen kennzeichnen die Richtung, in welche die Ableitung wirkt, also

$$\begin{aligned}\phi_1(x) \overrightarrow{\partial}^\mu \phi_2(x) &= \phi_1(x) (\partial^\mu \phi_2(x)) = \phi_1(x) \partial^\mu \phi_2(x) \\ \phi_1(x) \overleftarrow{\partial}^\mu \phi_2(x) &= (\partial^\mu \phi_1(x)) \phi_2(x) = \partial^\mu \phi_1(x) \phi_2(x)\end{aligned}\tag{A.3}$$

Die Paulimatrizen werden durch σ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ bezeichnet, und σ_0 bezeichnet die 2×2 -Einheitsmatrix

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Das total antisymmetrische Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\text{A.5})$$

Damit ist die Matrix γ^5 definiert als

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \quad (\text{A.6})$$

Die Projektoren auf den rechts- bzw. linkshändigen Teil des Fermionfeldes werden mit

$$\Pi^\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$$

bezeichnet. Für die Kontraktion eines Lorentzvektors mit den Gamma-Matrizen wird die Schreibweise

$$a^\mu \gamma_\mu = \not{a}$$

verwendet.

Feynmandiagramme werden von links nach rechts gelesen; alle Feynmanregeln sind mit einlaufenden Impulsen definiert.

Anhang B

Nützliche Relationen

Im Folgenden werden einige oft verwendete Relationen angegeben.

Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln

Für die Exponentiale von nicht vertauschenden Objekten A und B gelten folgende Relationen:

$$\exp(A) \exp(B) = \exp \left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} ([A, [A, B]] + [[A, B], B]) + \dots \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\exp(A) B \exp(-A) = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{K}_n^{A,B} \quad (\text{B.2})$$

$$\exp(A) \partial^\mu \exp(-A) = - \left(\partial^\mu A + \frac{1}{2!} [A, \partial^\mu A] + \frac{1}{3!} [A, [A, \partial^\mu A]] + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)!} \mathcal{K}_n^{A, \partial^\mu A} \quad (\text{B.3})$$

mit der Definition

$$\mathcal{K}_n^{A,B} = \underbrace{[A, [A, [\dots [A, B]] \dots]]}_{n \text{ Kommutatoren}}$$

Die Punkte in (B.1) stehen dabei für Schachtelkommutatoren höherer Ordnung. (B.2) und (B.3) lassen sich leicht nachrechnen, indem man A durch κA ersetzt, in eine Taylorreihe in κ entwickelt und anschließend $\kappa = 1$ setzt. Eine Ableitung von (B.1) findet sich z.B. in [39].

Identitäten für Kommutatoren

Durch explizite Rechnung zeigt man leicht

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \quad (\text{Jacobi - Identität}) \quad (\text{B.4})$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (\text{Derivativität}) \quad (\text{B.5})$$

Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$

Mit den Paulimatrizen (A.4) werden als Generatoren der fundamentalen Darstellung der $SU(2)$ die Matrizen

$$T_i = \frac{\sigma_i}{2}$$

gewählt. Mit den Kommutator- und Antikommutatorrelationen der Paulimatrizen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\sigma_0$$

gilt für die Generatoren

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} \quad \{T_i, T_j\} = \frac{1}{2}\sigma_0 \quad (\text{B.6})$$

Mit der zyklischen Eigenschaft der Spur folgt für die Generatoren die Normierung:

$$\text{Tr } T_i T_j = \frac{1}{2} \text{Tr } \{T_i, T_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

Dirac-Algebra und Spuridentitäten

Für die Dirac-Matrizen γ^μ gelten die Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}_{4\times 4} \quad (\gamma^\mu)^2 = \mathbb{I}_{4\times 4} \quad \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} = \gamma^\mu \quad (\text{B.7})$$

Damit läßt sich leicht zeigen, daß für einen beliebigen Vierervektor a^μ gilt

$$\not{a}\not{a} = a^\mu a_\mu \mathbb{I}_{4\times 4} \quad (\text{B.8})$$

Für einen zu einer Lösung der Diracgleichung positiver Energie gehörenden Diracspinor $u(p)$ bzw. einen zu einer Lösung negativer Energie gehörenden Spinor $v(q)$ der Masse m gelten die Gleichungen

$$(\not{p} + m)u(p) = 0 \quad \bar{v}(q)(\not{q} - m) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Für die Matrix γ^5 (A.6) gilt

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \gamma^{5^2} = \mathbb{I}_{2\times 2} \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$$

Mit der zyklischen Eigenschaft der Spur folgt damit

$$\text{Tr } \gamma^\mu = \text{Tr } \gamma^\mu \gamma^{5^2} = \text{Tr } \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 = -\text{Tr } \gamma^\mu$$

und daraus

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0$$

Auf die gleiche Art und Weise läßt sich sofort zeigen, daß die Spur über eine ungerade Anzahl von Gammamatrizen verschwindet. Für die Spur über zwei Gammamatrizen folgt mit (B.7)

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = -\text{Tr } \gamma^\nu \gamma^\mu + 8g^{\mu\nu} = -\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu + 8g^{\mu\nu}$$

und daraus

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$$

Mithilfe desselben Tricks (durchkommutieren der ersten Gammamatrix an das Ende der Spur und Verwendung deren zyklischer Eigenschaft) läßt sich für die Spur über $2n$ Gammamatrizen mit vollständiger Induktion leicht zeigen

$$\text{Tr } \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}} = \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} \text{Tr } \gamma^{\mu_2} \dots \hat{\gamma}^{\mu_i} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \quad (\text{B.10})$$

wobei die mit einem Hut versehenen Gammamatrizen gleich $\mathbb{I}_{4 \times 4}$ gesetzt sind. Insbesondere bedeutet dies, daß die Spur über ein Produkt von Gammamatrizen immer reel ist und daß Spuren über $2n$ Gammamatrizen immer eine Summe von Produkten von n metrischen Tensoren mit den Indizes μ_1, \dots, μ_{2n} sind. Für den Sonderfall der Spur über vier Gammamatrizen folgt aus Gleichung (B.10)

$$\mathbf{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho = 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \quad (\text{B.11})$$

Mithilfe der so abgeleiteten Identitäten für die Spur über Produkte von Gammamatrizen läßt sich mit (A.6) im Prinzip die Spur über das Produkt von γ^5 und beliebig viele Gammamatrizen berechnen. Insbesondere ist eine solche Spur immer rein imaginär, und die Spur über das Produkt von γ^5 und $2n + 1$ Gammamatrizen ist immer Null. Da eine Spur über γ^5 und $2n$ Gammamatrizen immer nur eine Summe von Produkten eines Levi-Civita-Tensors (A.5) und metrischen Tensoren sein kann, auf die sich die Indizes verteilen, muß die Spur über ein Produkt aus γ^5 und weniger als 4 Gammamatrizen verschwinden. Außerdem muß gelten

$$\mathbf{Tr} \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\rho \propto i \epsilon^{\alpha\beta\sigma\rho}$$

und durch Vergleich mit einer speziellen Wahl von Indizes $\alpha\beta\sigma\rho$ findet man leicht (mit der Vorzeichenwahl (A.5))

$$\mathbf{Tr} \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\rho = 4i \epsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} \quad (\text{B.12})$$

Anhang C

Verwendete Parameter

Für alle numerischen Resultate dieser Arbeit wurden (soweit nicht anders vermerkt) die von der Particle Data Group 2006 publizierten [40] Konstanten verwendet. Als durch Messung festgelegte Größen wurden die Massen von W und Z sowie die Fermikopplung gewählt

$$\begin{aligned}m_W &= 80.403 \text{ GeV} \\ \Gamma_W &= 2.141 \text{ GeV} \\ m_Z &= 91.1876 \text{ GeV} \\ \Gamma_Z &= 2.4952 \text{ GeV} \\ G_F &= 1.16637 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Kopplungskonstanten und der Weinbergwinkel durch Rechnung

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &= 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} = 0.222549 \\ e &= 2\sqrt{\sqrt{2}G_F m_W \cos \theta_W} = 0.308099 \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{132.382} \\ g &= \frac{e}{\sin \theta_W} = 0.653096 \\ g' &= \frac{e}{\cos \theta_W} = 0.349425\end{aligned}$$

Eine andere mögliche Wahl wäre z.B die Verwendung der Eichbosonmassen sowie der Feinstrukturkonstante als durch Messung festgelegte Parameter (mit dem besser geeigneten Wert der Feinstrukturkonstanten bei der W -Masse $\alpha_{m_W} \approx 128^{-1}$), doch das oben gewählte Schema wird auch von WHIZARD verwendet und bietet sich daher für die Analyse an. Auch wird in dieser Arbeit nicht der absolute Wert des Wirkungsquerschnitts, sondern die Abweichung desselben von der Standardmodellvorhersage diskutiert, so daß eine andere Wahl der Parameter keinen nennenswerten Einfluß auf die Ergebnisse dieser Arbeit hätte.

Anhang D

Code

D.1 FORTRAN

D.1.1 Implementation der nmNCSM-Vertizes

In diesem Abschnitt wird die Implementation der in dieser Arbeit verwendeten Feynmanregeln des nmNCSM auf der Basis der FORTRAN-Bibliotheken von O'Mega vorgestellt. Die Regeln sind in einem Modul `fmrules.f90` definiert. Nach dem Einbinden der benötigten O'Mega-Module werden zunächst die auftretenden nmNCSM-Parameter definiert:

```
module ncrules
  use omega_kinds
  use omega_vectors
  use omega_parameters
  use omega_spinors
  use omega_couplings
  use omega_spinor_couplings
  implicit none

  type(tensor2odd) :: theta=tensor2odd((/ (1.,0.), (2.,0.), (3.,0.) /), &
    (/ (4.,0.), (5.,0.), (6.,0.) /))
  real(kind=omega_prec) :: lambda = 1000., kappa2 = 0
  complex(kind = omega_prec) :: g_aww, g_zww
```

contains

(die Initialisierungswerte sind willkürlich und müssen vor der Verwendung des Moduls überschrieben werden). Zur Definition von $\theta^{\mu\nu}$ wird der bereits in O'Mega definierte, durch \vec{E} und \vec{B} parametrisierte Typ eines antisymmetrischen Tensors verwendet. Um die Bibliothek zu initialisieren, muß eine Routine aufgerufen werden, welche die Vorfaktoren der *ZWW*- und *AWW*-Vertizes berechnet:

```
subroutine nc_init()
  g_aww = 16.*qlép*(gcc**2.)
  g_zww = -16.*(qlép**2.)*(gcc**2.)/sqrt(8.*(gcc**2.)-qlép**2.)
end subroutine nc_init
```

Für jeden der drei Vertizes $A\bar{f}f$, $Z\bar{f}f$ und $W\bar{f}f$ wird eine Funktion definiert, die den entsprechenden nmNCSM-Vertex berechnet. Da in O'Mega bereits Funktionen zur Berechnung der Spinorprodukte

$$\bar{v}\gamma^\mu u \quad \bar{v}\gamma^\mu u \quad \bar{v}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u$$

definiert sind, können diese für die Berechnung der entsprechenden Produkte an den nmNCSM-Vertizes verwendet werden. Die Vertexfunktionen nehmen die Spinoren und Impulse der Fermionen entgegen (man beachte, daß die Impulse entgegen der Konvention von O'Mega einlaufend gewählt sind), und geben einen Vierervektor zurück, der mit dem Polarisationsvektore kontrahiert werden muß. Zusätzlich ist bei der Implementation zu beachten, daß in O'Mega das Vorzeichen bei der Definition der kovarianten Ableitung anders als in dieser Arbeit gewählt ist, so daß die in Abschnitt 3.4 angegebenen Feynmanregeln für jede Eichbosonlinie mit einem Faktor -1 multipliziert werden müssen. Weiterhin sind alle in O'Mega definierten Vertizes und Propagatoren mit einem Faktor $-i$ multipliziert. Als Kopplungen werden den Vertexfunktionen dieselben Parameter wie den entsprechenden O'Mega-Vertizes übergeben, die den Typ der am Vertex koppelnden Fermionen festlegen:

```
function ncv_A_ff(charge , f , p , fbar , q) result(res)
  complex(kind=omega_prec) , intent(in) :: charge
  type(momentum) , intent(in) :: p, q
  type(spinor) , intent(in) :: f
  type(conjspinor) , intent(in) :: fbar
  type(vector) :: res , sctr
  sctr = v_ff(charge , fbar , f)
  res = 0.5/(lambda**2.)*( (p*(theta*q))*sctr + (theta*p)*(sctr*q) + &
    (q*theta)*(sctr*p) )
end function ncv_A_ff
```

```
function ncv_Z_ff(gv , ga , f , p , fbar , q) result(res)
  complex(kind=omega_prec) , intent(in) :: gv , ga
  type(momentum) , intent(in) :: p , q
  type(spinor) , intent(in) :: f
  type(conjspinor) , intent(in) :: fbar
  type(vector) :: res , sctr
  sctr = va_ff(gv , ga , fbar , f)
  res = 0.5/(lambda**2.)*( (p*(theta*q))*sctr + (theta*p)*(sctr*q) + &
    (q*theta)*(sctr*p) )
end function ncv_Z_ff
```

```
function ncv_W_ff(g , fbar , q , f , p) result(res)
  complex(kind=omega_prec) , intent(in) :: g
  type(momentum) , intent(in) :: p , q
  type(spinor) , intent(in) :: f
  type(conjspinor) , intent(in) :: fbar
  type(vector) :: res , sctr
  sctr = vl_ff(g , fbar , f)
  res = 0.5/(lambda**2) * ( (p*(theta*q))*sctr + (p*sctr)*(q*theta) + &
    (q*sctr)*(theta*p) )
end function ncv_W_ff
```

Zur Implementation der benötigten Matrixelemente sind außerdem Funktionen für den $W\bar{f}f$ -Vertex notwendig, die Polarisationsvektor und Impuls des Eichbosons sowie den Spinor bzw. konjugierten

Spinor und den Impuls des einlaufenden Fermions bzw. Antifermions entgegennehmen; die Rückgabe ist ein (konjugierter) Spinor, der mit dem verbleibenden (konjugierten) Spinor am Vertex multipliziert werden muß. Auch hierfür können die bereits in O'Mega vorhandenen Vertexfunktionen „wiederverwertet“ werden:

```

function ncv_f_Wf(g, e, k, f, p) result(res)
  complex(kind=omega_prec), intent(in) :: g
  type(vector), intent(in) :: e
  type(momentum), intent(in) :: k, p
  type(spinor), intent(in) :: f
  type(spinor) :: res
  type(momentum) :: q
  q = (-1.)*(p + k)
  res = 0.5/(lambda**2.) * ( (p*(theta*q))*f_vlf(g, e, f) + &
    (q*(theta*e))*f_vlf(g, vector(p%t, p%ax), f) + &
    (e*(theta*p))*f_vlf(g, vector(q%t, q%ax), f) )
end function ncv_f_Wf

```

```

function ncv_fbar_fbarW(g, fbar, q, e, k) result(res)
  complex(kind=omega_prec), intent(in) :: g
  type(momentum), intent(in) :: q, k
  type(vector), intent(in) :: e
  type(conjspinor), intent(in) :: fbar
  type(conjspinor) :: res
  type(momentum) :: p
  p = (-1.)*(q + k)
  res = 0.5/(lambda**2.) * ( (p*(theta*q))*f_fvl(gcc, fbar, e) + &
    (q*(theta*e))*f_fvl(gcc, fbar, vector(p%t, p%ax)) + &
    (e*(theta*p))*f_fvl(gcc, fbar, vector(q%t, q%ax)) )
end function ncv_fbar_fbarW

```

Nach den Korrekturen der Vertizes der Form $A\bar{f}f$ werden die Kontaktvertizes (3.38) und (3.39) implementiert. Zur Berechnung des Produktes

$$\bar{v}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u$$

wird wieder die linkshändige Vertexfunktion von O'Mega zweckentfremdet. Die Vertexfunktionen nehmen denselben Parameter entgegen wie der entsprechenden Standardmodellvertex, bei dem nur ein Eichboson auftritt, und geben den Wert des Vertex als komplexe Zahl zurück:

```

function ncv_ddbarWW(g, d, dbar, q, ep, k, em) result(res)
  complex(kind=omega_prec), intent(in) :: g
  type(vector), intent(in) :: ep, em
  type(momentum), intent(in) :: q, k
  type(spinor), intent(in) :: d
  type(conjspinor), intent(in) :: dbar
  complex(kind=omega_prec) :: res
  type(vector) :: sctr
  type(momentum) :: s
  s = q + k
  sctr = vl_ff(g**2., dbar, d)
  res = ( (em*(theta*ep))*(sctr*s) + (s*(theta*em))*(sctr*ep) ) + &

```

```

      (ep*(theta*s))*(sctr*em) ) / (lambda**2.)
end function ncv_ddbarWW

function ncv_uubarWW(g, u, p, ubar, ep, k, em) result(res)
  complex(kind=omega_prec), intent(in) :: g
  type(vector), intent(in) :: ep, em
  type(momentum), intent(in) :: p, k
  type(spinor), intent(in) :: u
  type(conjspinor), intent(in) :: ubar
  complex(kind=omega_prec) :: res
  type(vector) :: sctr
  type(momentum) :: s
  s = p + k
  sctr = vl_ff(g**2., ubar, u)
  res = ( (em*(theta*ep))*(sctr*s) + (s*(theta*em))*(sctr*ep) +&
    (ep*(theta*s))*(sctr*em) ) / (lambda**2.)
end function ncv_uubarWW

```

Zur Implementation der drei Eichbosonen koppelnden nmNCSM-Vertexes wird zunachs eine Hilfsfunktion zur Berechnung einer der drei in $\theta((k_1, \alpha), (k_2, \beta), (k_3, \gamma))$ (3.26) Permutationen definiert:

```

function theta3_part(k1, ea, k2, eb, k3, ec) result(res)
  type(momentum), intent(in) :: k1, k2, k3
  type(vector), intent(in) :: ea, eb, ec
  complex(kind=omega_prec) :: res
  res = (ea*(theta*eb))*((k2*k3)*(k1*ec)-(k1*k3)*(k2*ec)) +&
    (k1*(theta*k2))*((k3*eb)*(ea*ec)-(k3*ea)*(eb*ec)) -&
    (k1*(theta*ea))*((k2*ec)*(k3*eb)-(k2*k3)*(eb*ec)) +&
    (k1*(theta*eb))*((k2*ec)*(k3*ea)-(k2*k3)*(ea*ec)) +&
    (k1*(theta*ec))*((k3*eb)*(k2*ea)-(k3*k2)*(ea*eb))
end function theta3_part

```

Mit dieser Hilfsfunktion wird schließlich eine Funktion zur Berechnung der Vertexes (3.43) und (3.42) implementiert. Beim Aufruf wird einer der Parameter g_{aww} und g_{zww} übergeben, mit dem der Typ des Vertex festgelegt wird; die Rückgabe ist wieder der Wert des Vertex als komplexe Zahl:

```

function ncv_xWW(g, k1, ea, k2, eb, k3, ec) result(res)
  complex(kind=omega_prec), intent(in) :: g
  type(momentum), intent(in) :: k1, k2, k3
  type(vector), intent(in) :: ea, eb, ec
  complex(kind=omega_prec) :: res
  res = g*kappa2*(theta3_part(k1, ea, k2, eb, k3, ec) +&
    theta3_part(k2, eb, k3, ec, k1, ea) +&
    theta3_part(k3, ec, k1, ea, k2, eb))/(lambda**2.)
end function ncv_xWW

```

```
end module ncrules
```

D.1.2 Matricelemente

Im Folgenden ist als Beispiel für die Umsetzung der Matricelemente in FORTRAN-Code die Implementation des Matricelements für den Prozess $dd \rightarrow W^+W^-$ wiedergegeben. Die nichtkommutative

Korrektur dieses Matrixelements wurde von Hand zusammen mit den anderen benötigten Matrixelementen als Bestandteil einer Bibliothek implementiert. Bei der Implementation ist zu beachten, daß O'Mega die Fermionpropagatoren mit einem zusätzlichen Vorzeichen definiert. Die Funktion nimmt die Impulse sowie die Spinoren bzw. Polarisationsvektoren der Fermionen und Eichbosonen entgegen und gibt den Wert des Matrixelementes in 1. Ordnung λ zurück:

```

function nc_ddww(p, d, q, dbar, kp, ep, km, em) result(amp)
  type(momentum), intent(in) :: p, q, kp, km
  type(spinor), intent(in) :: d
  type(conjspinor), intent(in) :: dbar
  type(vector), intent(in) :: ep, em
  complex(kind=omega_prec) :: amp
  amp = (0., 0.)
!s-Kanal A; NC-Vertex d-dbar-A
  amp = pr_feynman(-p-q, ncv_A_ff(qdwn, d, p, dbar, q))&
    * g-gg(iqw, ep, kp, em, km) * (-1., 0.)
!s-Kanal Z; NC-Vertex d-dbar-Z
  amp = amp - pr_unitarity(-p-q, mass(23), wd_tl(-p-q, width(23)), &
    ncv_Z_ff(gncdwn(1), gncdwn(2), d, p, dbar, q)) * g-gg(igzww, ep, kp, em, km)
!t-Kanal; NC-Vertex d-u-W-
  amp = amp - f_fvl(gcc, dbar, ep) *&
    pr_psi(-p+km, mass(2), wd_tl(-p+km, width(2)), ncv_f_Wf(gcc, em, -km, d, p))
!t-Kanal; NC-Vertex dbar-u-W+
  amp = amp - ncv_fbar_fbarW(gcc, dbar, q, ep, -kp) *&
    pr_psi(-p+km, mass(2), wd_tl(-p+km, width(2)), f_vlf(gcc, em, d))
!Kontaktvertex
  amp = amp + ncv_ddbarWW(gcc, d, dbar, q, em, -km, ep)
!s-Kanal A; NC-Vertex A-W+W-
  amp = amp - ncv_xWW(g_aws, p+q, pr_feynman(-p-q, v_ff(qdwn, dbar, d)),&
    -km, em, -kp, ep)
!s-Kanal Z; NC-Vertex Z-W+W-
  amp = amp - ncv_xWW(g_zww, p+q, pr_unitarity(-p-q, mass(23),&
    wd_tl(-p-q, width(23)),&
    va_ff(gncdwn(1), gncdwn(2), dbar, d)), -km, em, -kp, ep)
end function nc_ddww

```

Mithilfe dieser Funktion wurde die von O'Mega automatisch erzeugte Routine zur Berechnung der Standardmodellamplitude so modifiziert, daß im Wirkungsquerschnitt die nichtkommutative Korrektur bis einschließlich der 1. Ordnung in λ berücksichtigt wird. Das Beispiel stammt aus dem zur Berechnung der in Abschnitt 6.3 verwendeten Daten eingesetzten Monte-Carlo-Generator; daher findet sich am Ende der nötigen Code, um negative Werte des Wirkungsquerschnitts abzuschneiden (siehe Abschnitt 6.2). Da WHIZARD ein Matrixelement als Rückgabe erwartet, wird vor der Rückgaben die Wurzel aus dem Wirkungsquerschnitt gezogen. Die von O'Mega generierten Matrixelemente erwarten als Argumente zwei Arrays, von denen das erste die Viererimpulse und das zweite die Polarisierungen enthält.

```

function d1bd1wpwm(k, s) result(amp)
  real(kind=omega_prec), dimension(0:,:) , intent(in) :: k
  integer, dimension(:), intent(in) :: s
  complex(kind=omega_prec) :: amp
  type(momentum) :: p1, p2, p3, p4
  type(spinor) :: d1_2

```

```

type(conjspinor) :: d1b_1
type(vector) :: wp_4, wm_3
type(conjspinor) :: u1b_13
type(vector) :: a_12, z_12
type(momentum) :: p12, p13
p1 = - k(:,1) ! incoming dbar
p2 = - k(:,2) ! incoming d
p3 = k(:,3) ! outgoing W+
p4 = k(:,4) ! outgoing W-
d1b_1 = vbar (mass(1), - p1, s(1))
d1_2 = u (mass(1), - p2, s(2))
wm_3 = conjg (eps (mass(24), p3, s(3)))
wp_4 = conjg (eps (mass(24), p4, s(4)))
p12 = p1 + p2
a_12 = pr_feynman(p12, + v_ff(qdwn,d1b_1,d1_2))
z_12 = pr_unity(p12,mass(23),wd_tl(p12,width(23)), &
+ va_ff(gncdwn(1),gncdwn(2),d1b_1,d1_2))
p13 = p1 + p3
u1b_13 = pr_psibar(p13,mass(2),wd_tl(p13,width(2)), &
+ f_fvl(gcc,d1b_1,wm_3))
amp = 0
amp = amp + u1b_13*( + f_vlf(gcc,wp_4,d1_2))
amp = amp + a_12*( + g_gg(iqw,wm_3,p3,wp_4,p4))
amp = amp + z_12*( + g_gg(igzww,wm_3,p3,wp_4,p4))
amp = (0., -1.) *amp ! 2 vertices, 1 propagators
amp = amp*conjg(amp) + 2.*real(conjg(amp)*nc_ddww(-p2, d1_2, -p1, d1b_1, &
p3, wm_3, p4, wp_4))
if (real(amp) < 0.) then
amp = sqrt(offset)
else
amp = sqrt(amp * 1.0_omega_prec / 3.0_omega_prec)
end if
end function d1bd1wpwm

```


Anhang E

Quadriertes Matrixelement für der Prozess $d\bar{d} \longrightarrow W^+W^-$

Im Folgenden wird der analytische Ausdruck für das Betragsquadrat der Feynmanamplitude für den Prozess $d\bar{d} \longrightarrow W^+W^-$ im nmNCSM angegeben. Über die Quarkspins wurde gemittelt und über die Polarisationen der W -Bosonen summiert; die Impulse wurden im Massenmittelpunktsystem parametrisiert, die Quarkmassen und die Z -Breite vernachlässigt. Die Rechnung wurde mit den Programmen FORM und Mathematica durchgeführt (siehe Abschnitt 4.3)

Die quadrierte Amplitude läßt sich wie folgt darstellen:

$$|\mathcal{M}|^2 = M_{s,A}^{s,A} + M_{s,Z}^{s,A} + M_t^{s,A} + M_{s,Z}^{s,Z} + M_t^{s,Z} + M_t^t + \frac{1}{\Lambda_{\text{NC}}^2} (E_1 \sin \phi - E_2 \cos \phi) \sin \theta |k| \left(\hat{M}_{s,Z}^{s,A} + \hat{M}_t^{s,A} + \hat{M}_k^{s,A} + \hat{M}_{s,Z}^{s,Z} + \hat{M}_t^{s,Z} + \hat{M}_k^{s,Z} + \hat{M}_t^t + \hat{M}_k^t \right)$$

Die Indizes der Faktoren M bezeichnen die Diagramme, aus denen sich der entsprechende Beitrag zusammensetzt, also z.B. $M_{s,A}^{s,A}$ für das Betragsquadrat des Diagramms mit einem Photon im s -Kanal. Analog bezeichnen die Indizes der \hat{M} die beitragenden Diagramme im nichtkommutativen Teil. Für die einzelnen Bestandteile des Standardmodelleanteils ergibt sich nach sorgfältiger Vereinfachung mit Mathematica:

$$M_{s,A}^{s,A} = -\frac{e^4 |k|^2 \left(-12m_W^4 - 28sm_W^2 - s^2 + (12m_W^4 - 4sm_W^2 + s^2) \cos(2\theta) \right)}{27m_W^4 s}$$

$$M_{s,Z}^{s,A} = \frac{|k|^2 e^4 \left(-12m_W^4 - 28sm_W^2 - s^2 + (12m_W^4 - 4sm_W^2 + s^2) \cos(2\theta) \right) (2 \cos(2\theta_W) + 1) \csc^2(\theta_W)}{54m_W^4 (m_Z^2 - s)}$$

$$M_t^{s,A} = \frac{e^4 \csc^2(\theta_W)}{288m_W^4 t} \left(-336m_W^6 + 36sm_W^4 + 240tm_W^4 - 8s^2m_W^2 + s^3 - 58st^2 - 60s^2t - 58stu + 2(48m_W^6 - 28sm_W^4 + 8s^2m_W^2 - s^3) \cos(2\theta) + 2|k|\sqrt{s} (8m_W^4 - 6sm_W^2 + s^2) \cos(3\theta) \right)$$

$$M_{s,Z}^{s,Z} = -\frac{|k|^2 e^4 s \csc^4(\theta_W)}{216m_W^4 (m_Z^2 - s)^2} \left(-12m_W^4 - 28sm_W^2 - s^2 + (12m_W^4 - 4sm_W^2 + s^2) \cos(2\theta) \right) (2 \cos(2\theta_W) + \cos(4\theta_W) + 6)$$

$$M_t^{s,Z} = \frac{e^4 (\cos(2\theta_W) + 2) \csc^4(\theta_W) s}{576 m_W^4 (m_Z^2 - s) t} \left(336 m_W^6 - 36 s m_W^4 - 240 t m_W^4 + 8 s^2 m_W^2 - s^3 + 58 s t^2 + 60 s^2 t + 58 s t u + 2 (-48 m_W^6 + 28 s m_W^4 - 8 s^2 m_W^2 + s^3) \cos(2\theta) - 2 |k| \sqrt{s} (8 m_W^4 - 6 s m_W^2 + s^2) \cos(3\theta) \right)$$

$$\hat{M}_t^t = - \frac{e^4 (4 m_W^8 - 8 t m_W^6 + t(4s + 5t) m_W^4 - 4 s t^2 m_W^2 - t^3 u) \csc^4(\theta_W)}{12 m_W^4 t^2}$$

Für die Terme des nichtkommutativen Anteils ergibt sich:

$$\hat{M}_{s,Z}^{s,A} = \frac{2 e^6 \kappa \sqrt{s} (3s - 2m_W^2) \cos(2\theta_W) \csc^4(\theta_W) \sec^2(\theta_W)}{9 (s - m_Z^2)}$$

$$\hat{M}_t^{s,A} = \frac{e^4 \sqrt{s} \csc^2(\theta_W) (4e^2 \kappa m_W^2 (s - u) \csc^2(\theta_W) + (2m_W^2 + s) t)}{18 m_W^2 t}$$

$$\hat{M}_k^{s,A} = - \frac{2 |k|^2 e^4 \sqrt{s} \csc^2(\theta_W)}{9 m_W^2}$$

$$\hat{M}_{s,Z}^{s,Z} = - \frac{e^6 \kappa s^{3/2} (3s - 2m_W^2) (2 \cos(2\theta_W) + 1) \csc^4(\theta_W) \sec^2(\theta_W)}{9 (m_Z^2 - s)^2}$$

$$\hat{M}_t^{s,Z} = - \frac{e^4 s^{3/2} (\cos(2\theta_W) + 2) \csc^4(\theta_W) \sec^2(\theta_W) (8e^2 \kappa (u - s) m_W^2 + t (2m_W^2 + s) (1 + \cos(2\theta_W)))}{72 m_W^2 (m_Z^2 - s) t}$$

$$\hat{M}_k^{s,Z} = \frac{|k|^2 e^4 s^{3/2} (\cos(2\theta_W) + 2) \csc^4(\theta_W)}{9 m_W^2 (m_Z^2 - s)}$$

$$\hat{M}_t^t = \frac{e^4 s^{3/2} (s + u) \csc^4(\theta_W)}{12 m_W^2 t}$$

$$\hat{M}_k^t = - \frac{e^4 \sqrt{s} (-4 s m_W^2 + s^2 + t^2 - u^2) \csc^4(\theta_W)}{24 m_W^2 t}$$

Anhang F

Abbildungen

F.1 zu Abschnitt 4.3

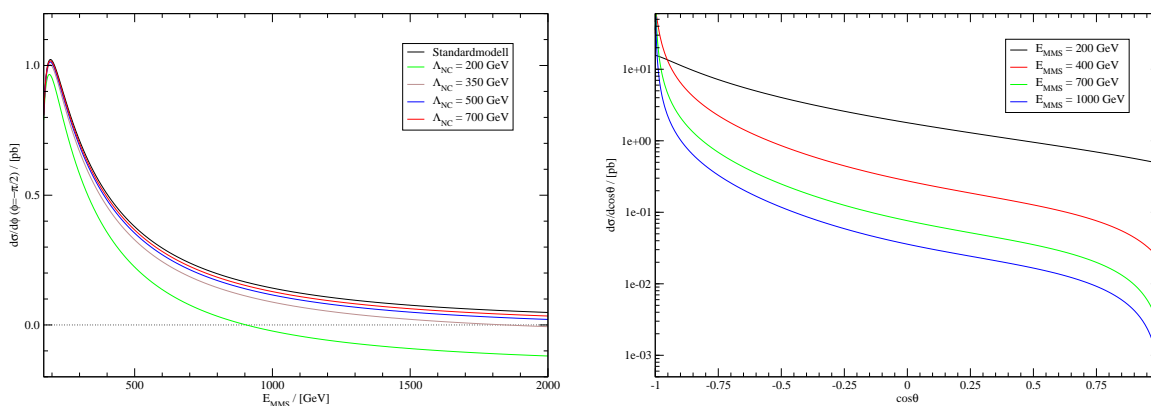


Abbildung F.1: links: Maximale Abweichung des über $\cos\theta$ integrierten Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ im nmNCSM für verschiedene Werte von Λ_{NC} ; Prozess: $u\bar{u}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$ rechts: differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ im SM für verschiedene Werte von $E_{\text{MMS}} = \sqrt{s}$; Prozess: $u\bar{u}$

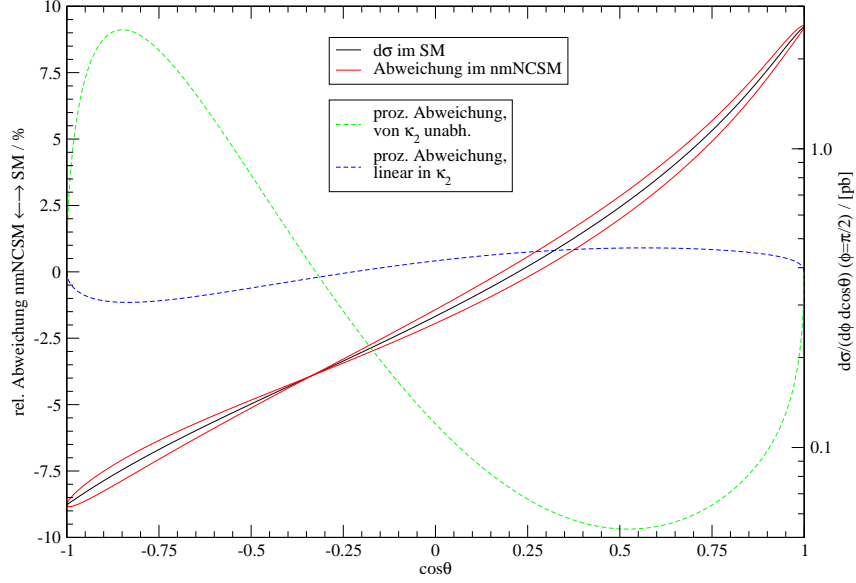


Abbildung F.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi}$ und maximale Abweichung im nmNCSM in Abhängigkeit von $\cos\theta$; Prozess: $d\bar{d}$, $\sqrt{s} = 200$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 200$ GeV, $\vec{E} = (\pm 1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

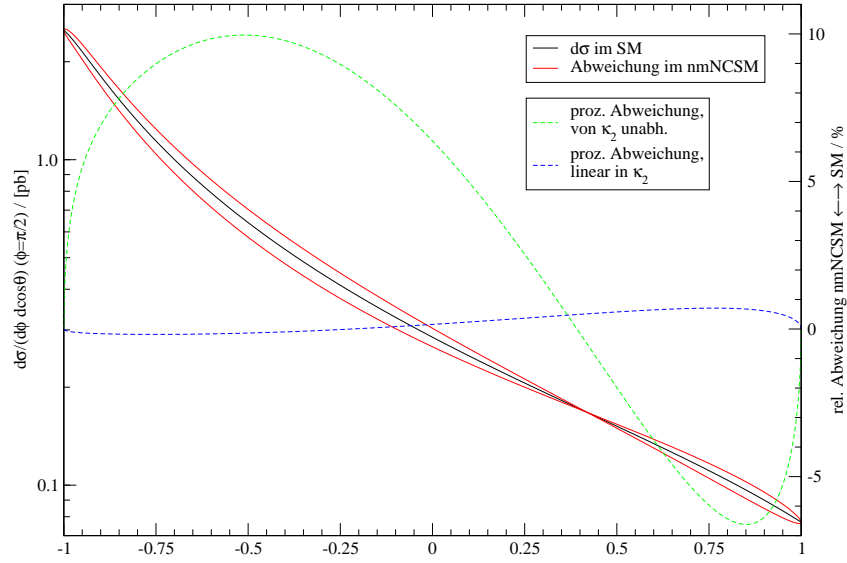


Abbildung F.3: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi}$ und maximale Abweichung im nmNCSM in Abhängigkeit von $\cos\theta$; Prozess: $u\bar{u}$, $\sqrt{s} = 200$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 200$ GeV, $\vec{E} = (\pm 1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

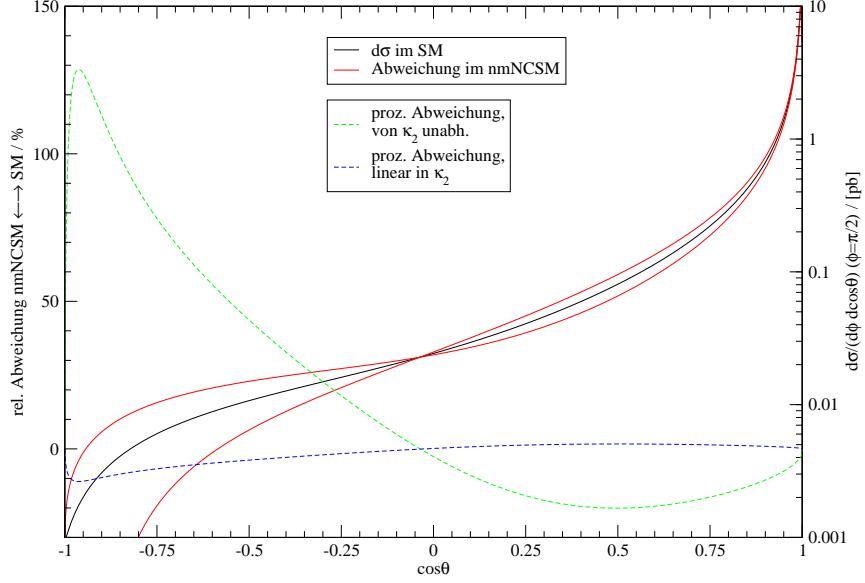


Abbildung F.4: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi}$ und maximale Abweichung im nmNCSM in Abhängigkeit von $\cos\theta$; Prozess: $d\bar{d}$, $\sqrt{s} = 500$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 500$ GeV, $\vec{E} = (\pm 1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

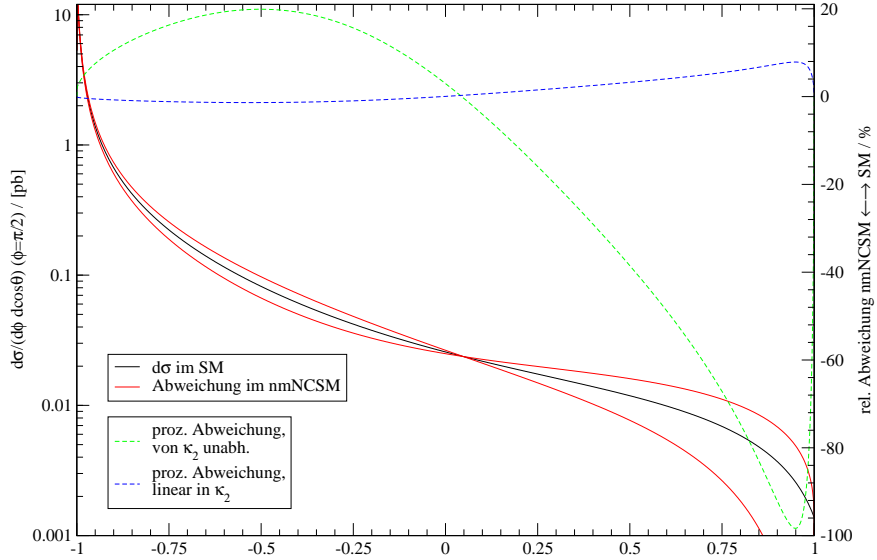


Abbildung F.5: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi}$ und maximale Abweichung im nmNCSM in Abhängigkeit von $\cos\theta$; Prozess: $u\bar{u}$, $\sqrt{s} = 500$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 500$ GeV, $\vec{E} = (\pm 1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

F.2 zu Abschnitt 4.4

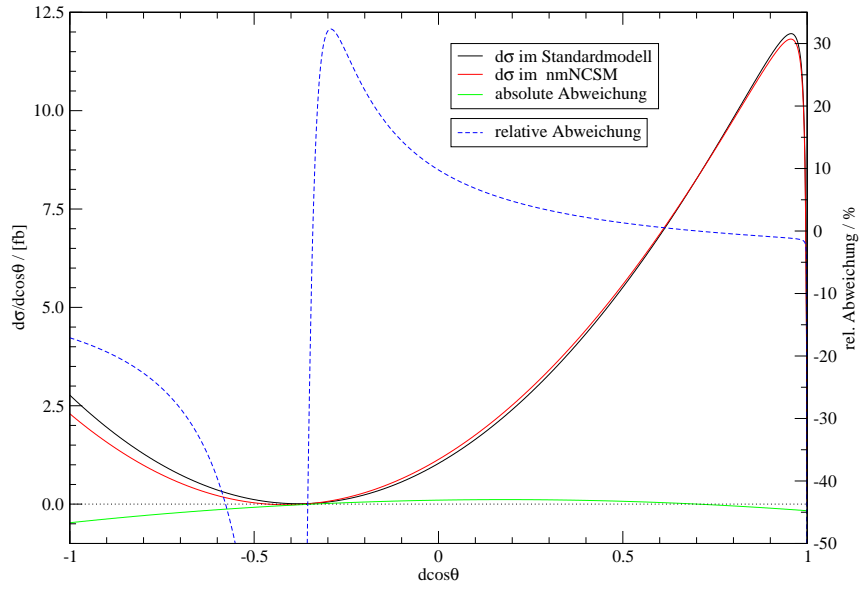


Abbildung F.6: Verschiebung des differentiellen, polarisierten Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma_{-0}}{d\cos\theta}$ im nmNCSM durch B_3 sowie relative und absolute Abweichung; Prozess: $dd\bar{}$, $\sqrt{s} = 500$ GeV, $\Lambda_{\text{NC}} = 250$ GeV, $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (0, 0, 1)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

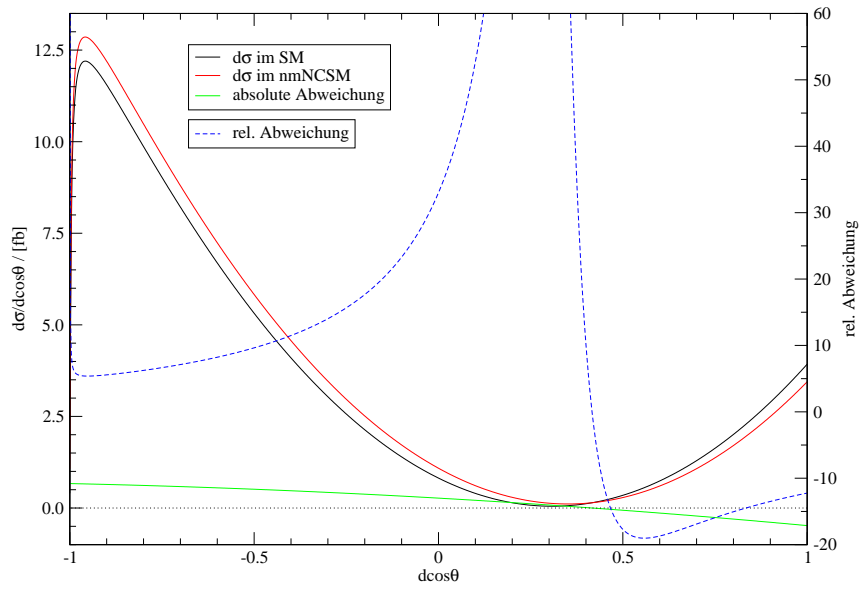


Abbildung F.7: wie Abb.F.6 für $u\bar{u}$ und die Helizitäten (0-)

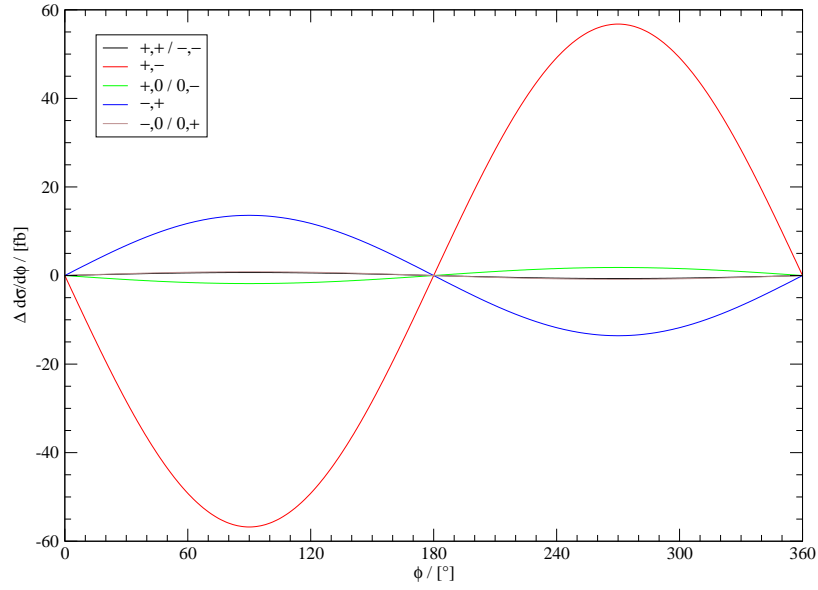


Abbildung F.8: Oszillation des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ um den kommutativen Wert für verschiedene Helizitäten; Prozess: $d\bar{d}$, $\sqrt{s} = \Lambda_{\text{NC}} = 350 \text{ GeV}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

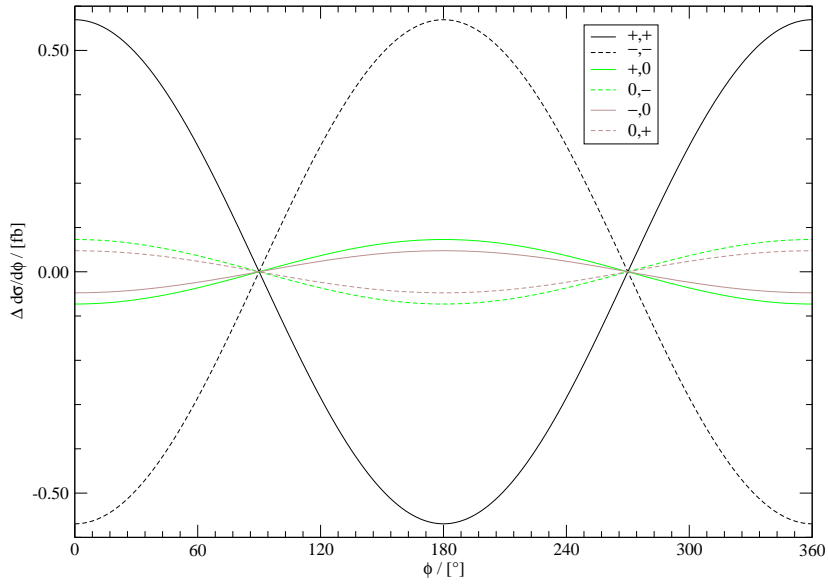


Abbildung F.9: wie Abb.F.8 mit $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$ und $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

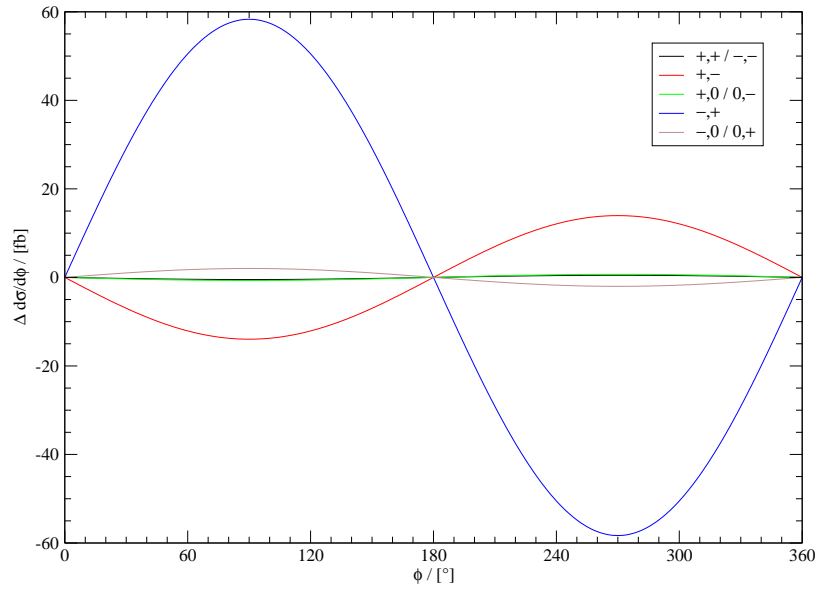


Abbildung F.10: Oszillation des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\phi}$ um den kommutativen Wert für verschiedene Helizitäten; Prozess: $u\bar{u}$, $\sqrt{s} = \Lambda_{\text{NC}} = 350 \text{ GeV}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, $\kappa_2 = 0.5$

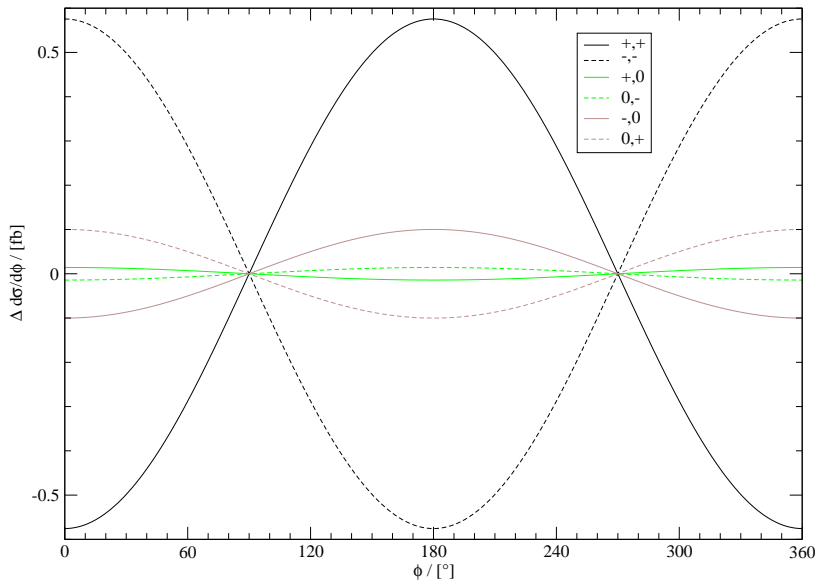


Abbildung F.11: wie Abb.F.10 mit $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$ und $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

F.3 zu Abschnitt 6.3

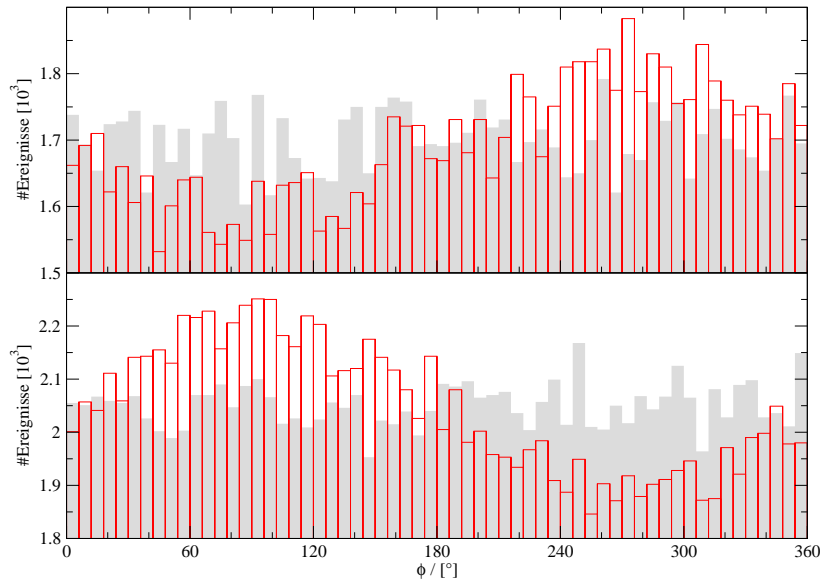


Abbildung F.12: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) von Standardmodell (grau) bei der W -Paarproduktion am LHC; oben $(+-)$, unten $(-+)$; Schnitte: $0^\circ \leq (\theta_+ + \theta_-) \leq 180^\circ$, $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1 \text{ TeV}$; Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$

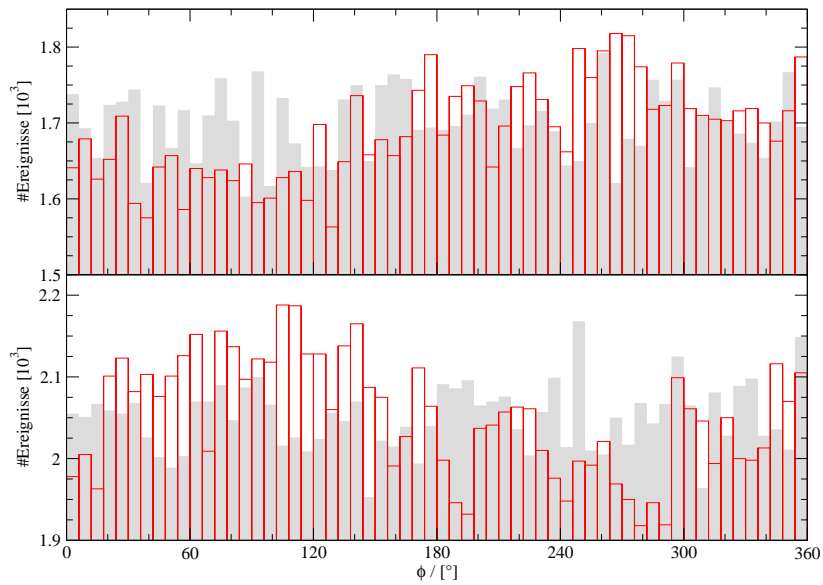


Abbildung F.13: wie Abb.F.12 bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$

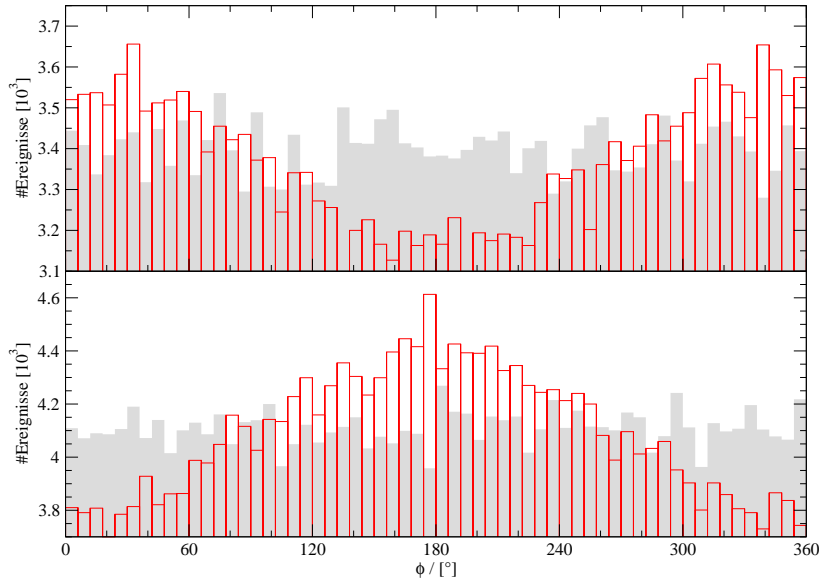


Abbildung F.14: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der W -Paarproduktion am LHC; oben (+-), unten (-+); Schnitte: $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1 \text{ TeV}$; Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

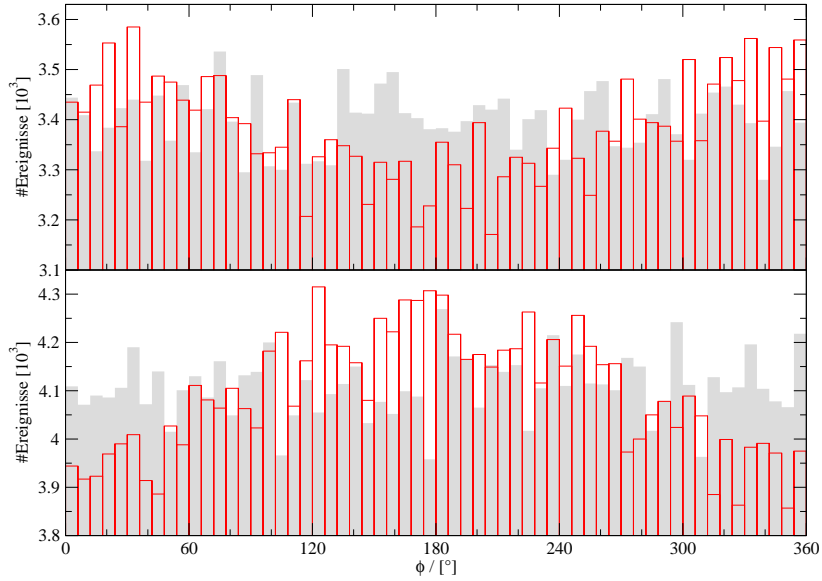


Abbildung F.15: wie Abb.F.14 bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$

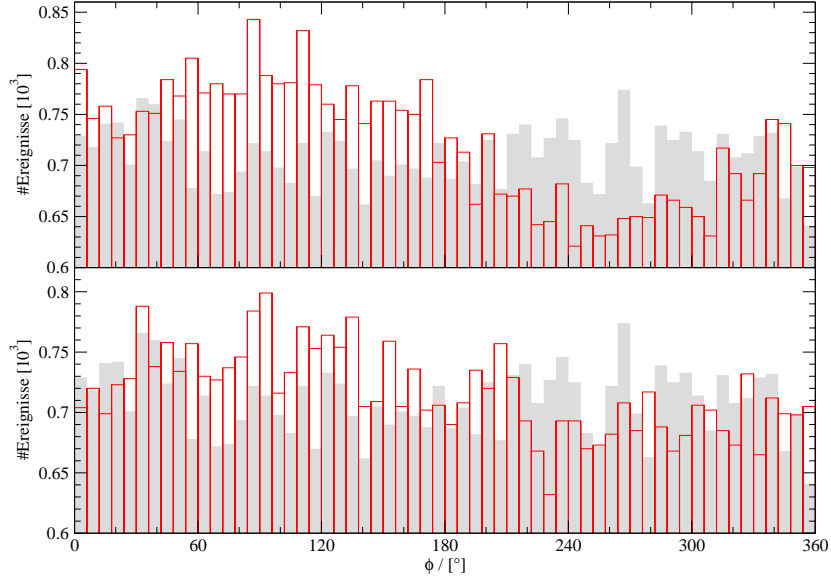


Abbildung F.16: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der W -Paarproduktion am LHC, oben bei $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, unten bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$; Schnitte: $0^\circ \leq (\theta_+ + \theta_-) \leq 180^\circ$, $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1 \text{ TeV}$; Parameter: $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$; Polarisation: $(--)$

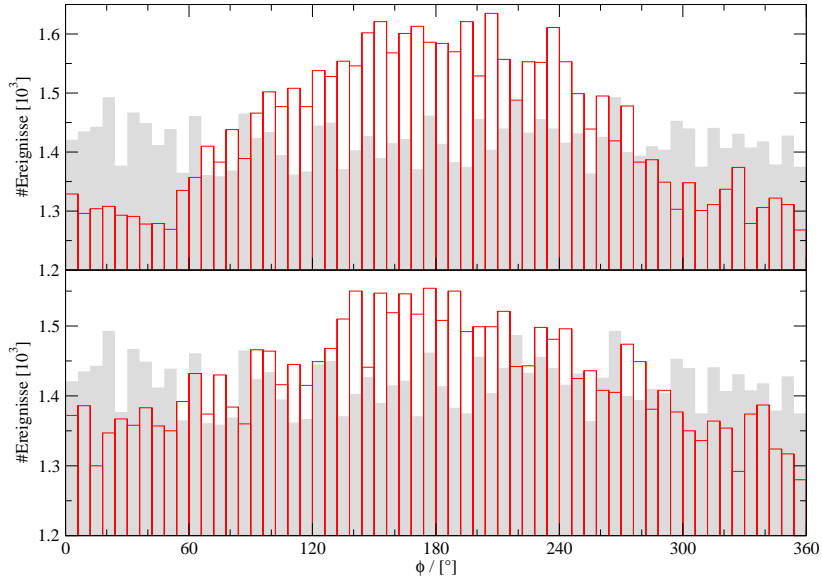


Abbildung F.17: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der W -Paarproduktion am LHC, oben bei $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, unten bei $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$; Schnitte: $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 1 \text{ TeV}$; Parameter: $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$; Polarisation: $(--)$

F.4 zu Abschnitt 6.4

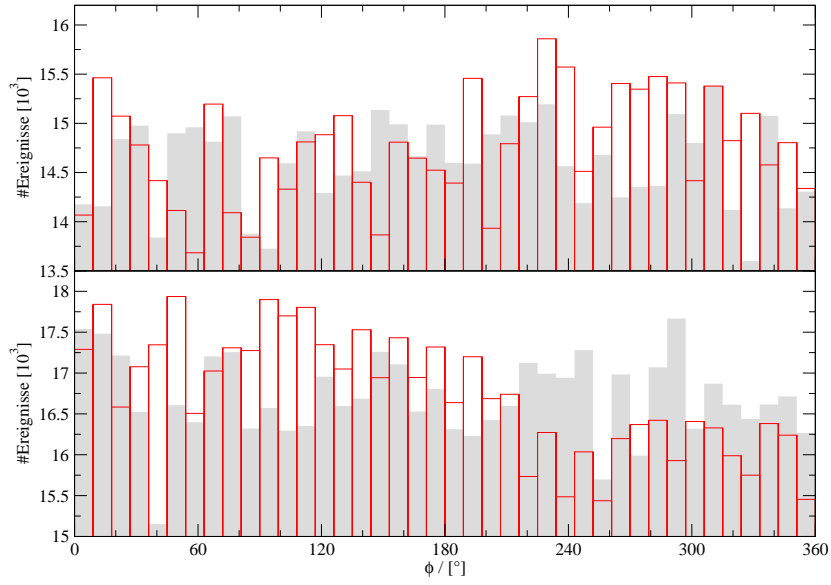


Abbildung F.18: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der rekonstruierten W -Paarproduktion am LHC; oben für $(\pm-)$, unten für $(\pm+)$. Schnitte: siehe Text, die Schnitte (6.3) und (6.4) wurden phasenverschoben addiert; $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$

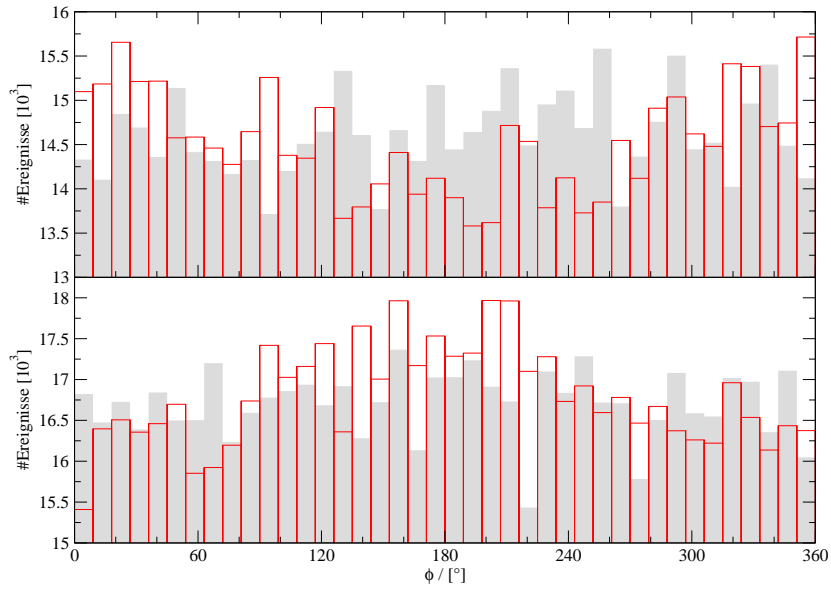


Abbildung F.19: wie Abb.F.18, keine Schnitte an $(\theta_+ + \theta_-)$ Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

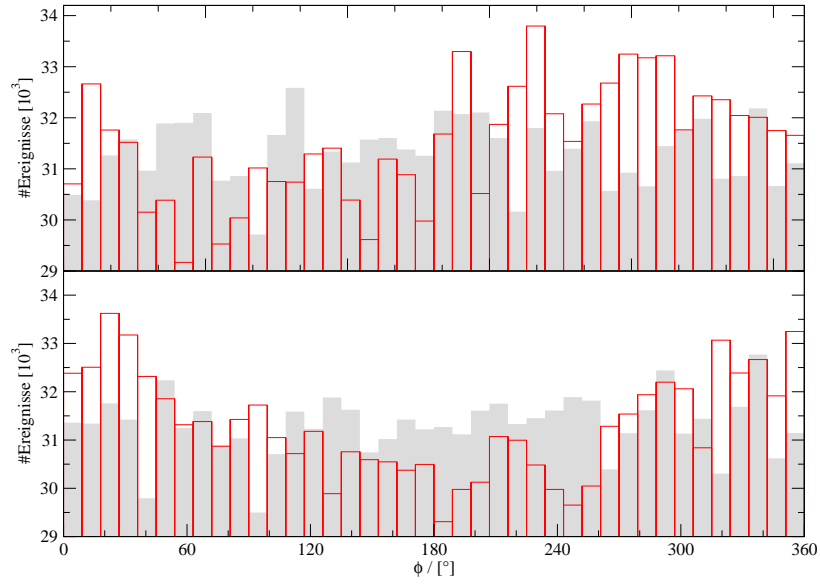


Abbildung F.20: Abweichung der Azimutalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der rekonstruierten W -Paarproduktion am LHC. Das obere Histogramm zeigt den Fall $\vec{E} = (1, 0, 0)$, $\vec{B} = 0$, wobei die Schnitte (6.3) und (6.4) phasenverschoben addiert wurden, das untere den Fall $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$. In beiden Fällen wurden $(\pm-)$ und $(\pm+)$ phasenverschoben addiert. Schitte: siehe Text, $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\kappa_2 = 0.5$

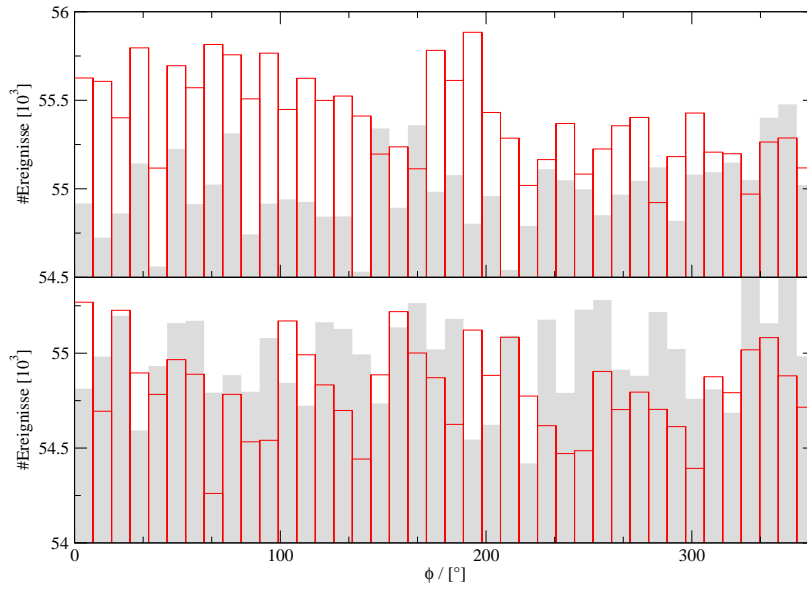


Abbildung F.21: wie Abb.F.20, jedoch über alle Polarisationen ohne Phasenverschiebung summiert.

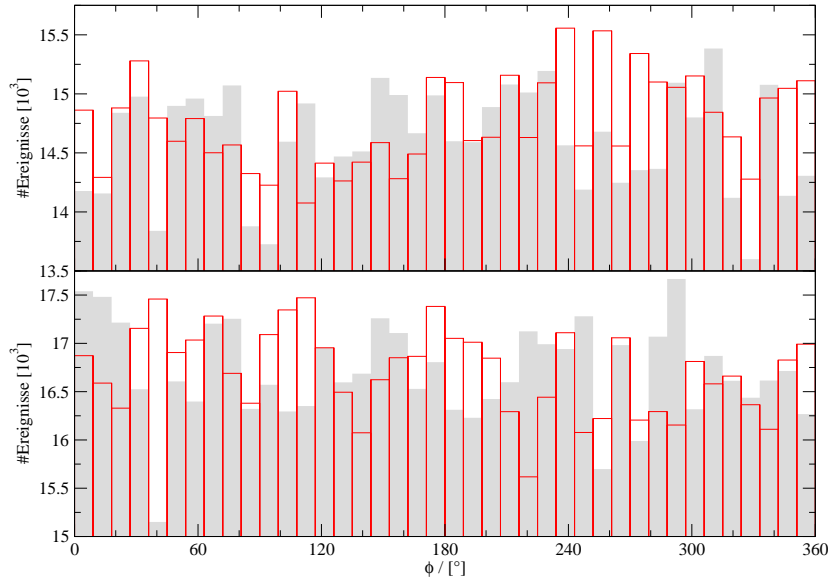


Abbildung F.22: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der rekonstruierten W -Paarproduktion am LHC; oben für $(\pm-)$, unten für $(\pm+)$. Schnitte: siehe Text, die Schnitte (6.3) und (6.4) wurden phasenverschoben addiert; $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\kappa_2 = 0.5$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

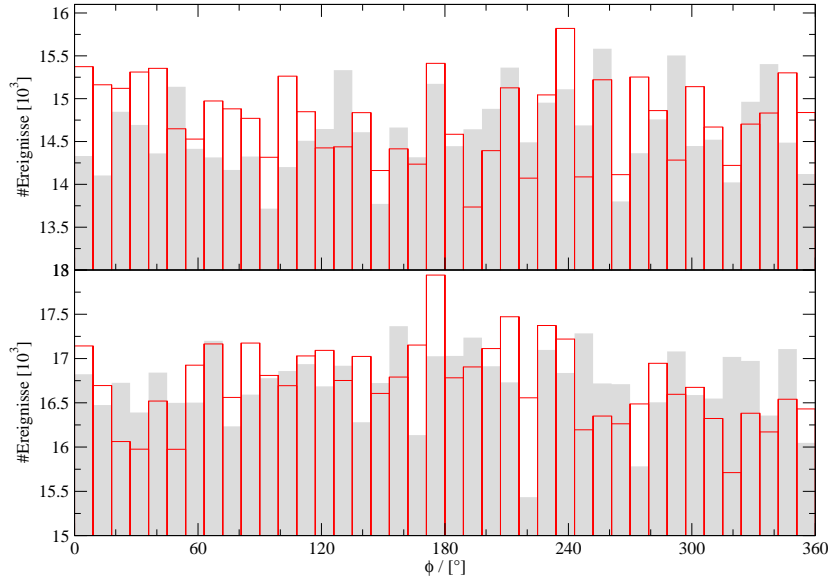


Abbildung F.23: wie Abb.F.22; keine Schnitte an $(\theta_+ + \theta_-)$

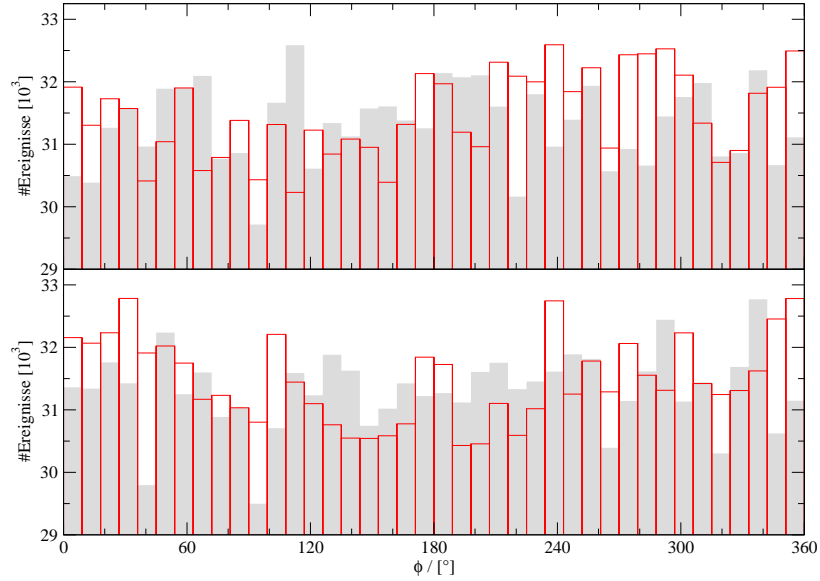


Abbildung F.24: Abweichung der Azimuthalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei der rekonstruierten W -Paarproduktion am LHC. Oben wurden die Schnitte (6.3) und (6.4) phasenverschoben addiert; im unteren Fall wurden keine Schnitte an $(\theta_+ + \theta_-)$ gesetzt. $(\pm-)$ und $(\pm+)$ wurden phasenverschoben addiert. Weitere Schnitte: siehe Text, $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)$, $\kappa_2 = 0.5$

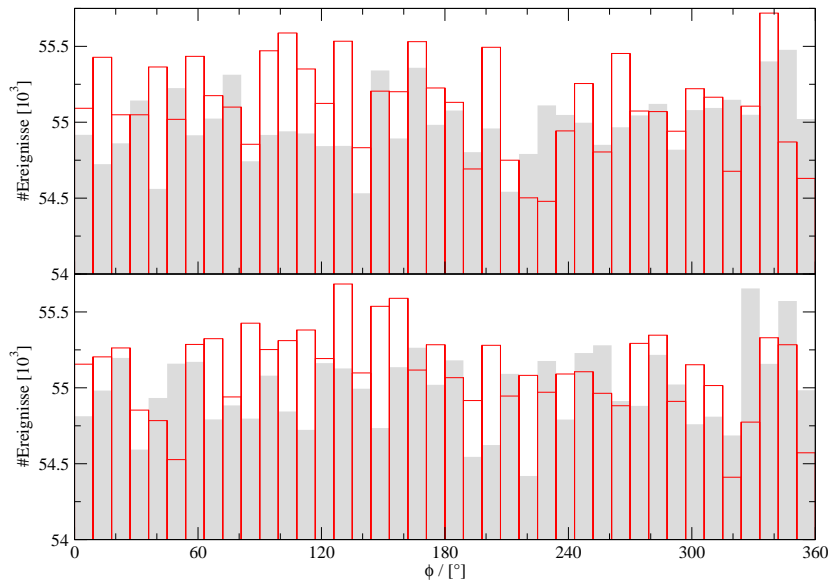


Abbildung F.25: wie Abb.F.24, jedoch über alle Polarisationen ohne Phasenverschiebung summiert.

F.5 zu Abschnitt 6.5

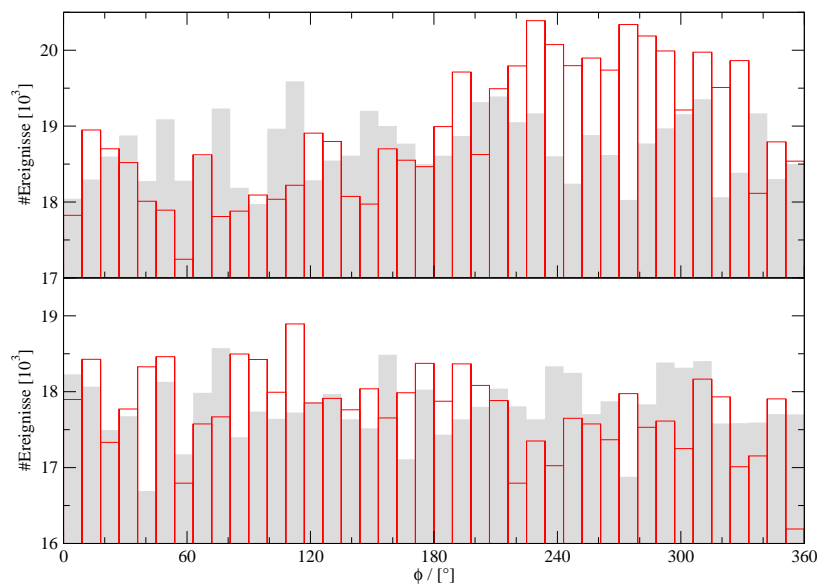


Abbildung F.26: Abweichung der Azimutalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei Paarproduktion mit Zerfall und rekonstruiertem Neutrinoimpuls. Oben ($\pm-$), unten ($\pm+$); auf \vec{E} sensitive Schnitte (siehe Text), Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700 \text{ GeV}$, $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (0, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

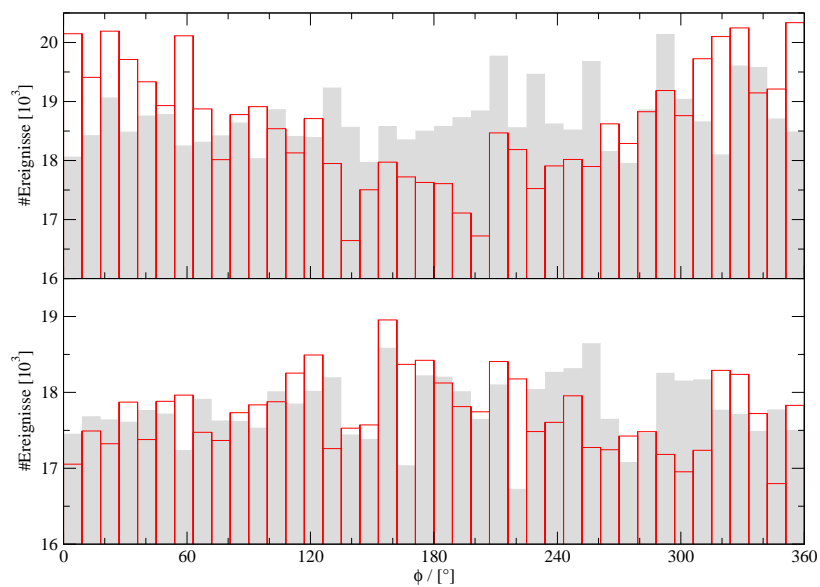


Abbildung F.27: wie Abb.F.26, aber auf \vec{B} sensitive Schnitte (siehe Text) und $\vec{E} = (0, 0, 0)^T$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$

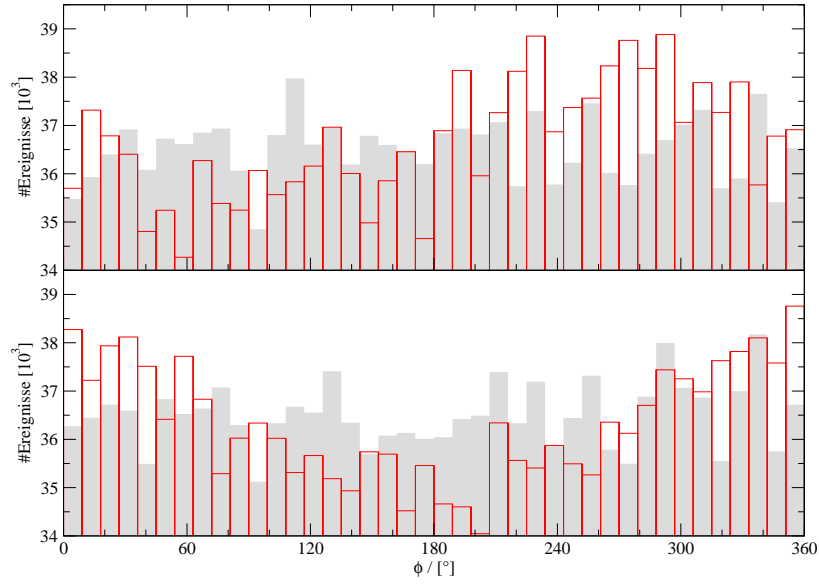


Abbildung F.28: Abweichung der Azimutalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei Paarproduktion mit Zerfall und rekonstruiertem Neutrinoimpuls. Oben auf \vec{E} sensitive Schnitte mit $\vec{E} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{B} = 0$, unten auf \vec{B} sensitive Schnitte mit $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (1, 0, 0)^T$ (siehe Text); Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 700\text{GeV}$, $\vec{E} = \vec{B} = (1, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$. Die Kombinationen $(\pm-)$ und $(\pm+)$ wurden phasenverschoben addiert.

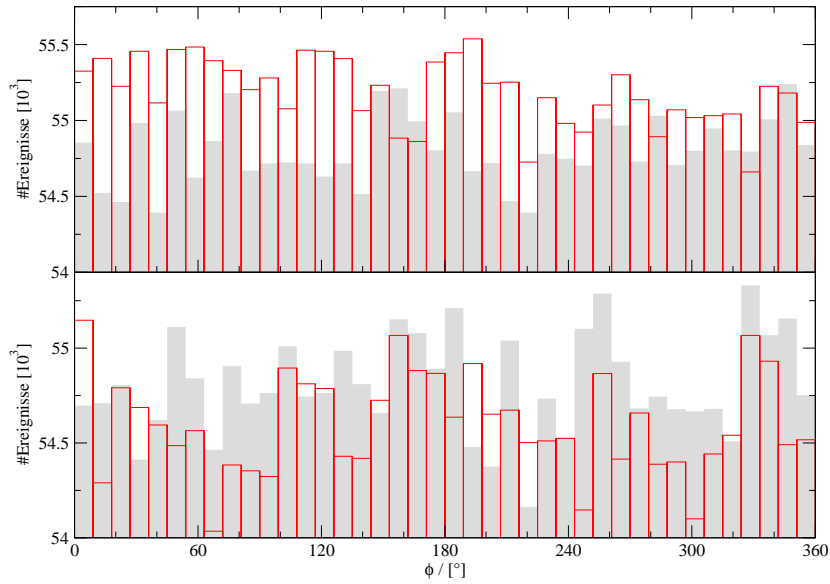


Abbildung F.29: wie Abb.F.28, jedoch über alle Polarisationen ohne Phasenverschiebung summiert

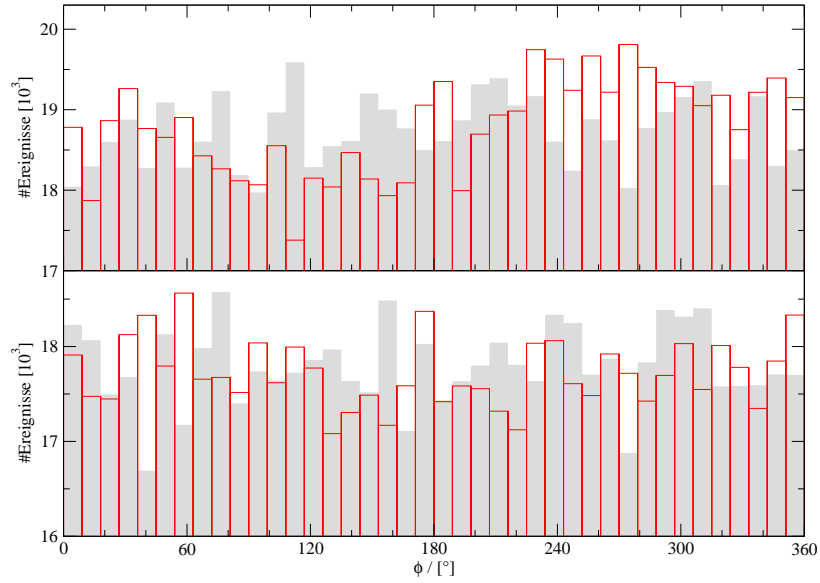


Abbildung F.30: Abweichung der Azimutalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei Paarproduktion mit Zerfall und rekonstruiertem Neutrinoimpuls. Oben ($\pm-$), unten ($\pm+$); auf \vec{E} sensitive Schnitte (siehe Text); Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\vec{E} = \vec{B} = (1, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

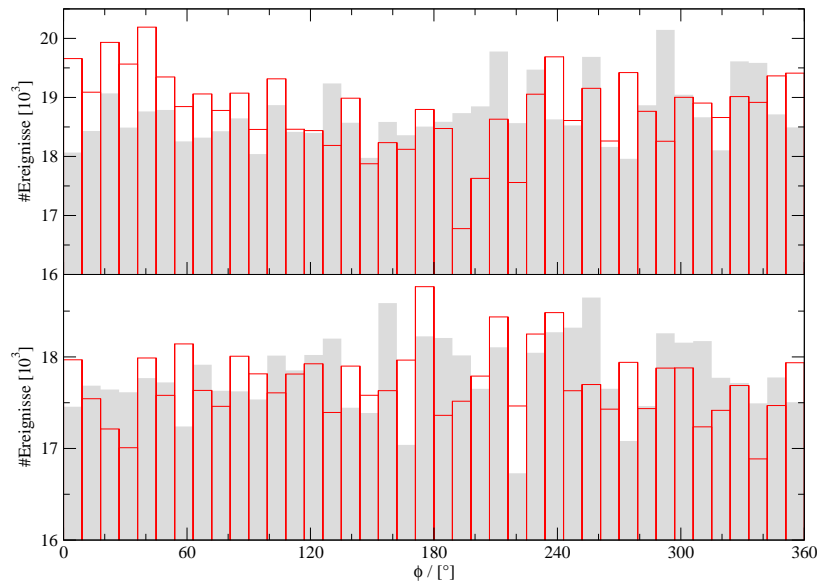


Abbildung F.31: wie Abb.F.30, jedoch auf \vec{B} sensitive Schnitte

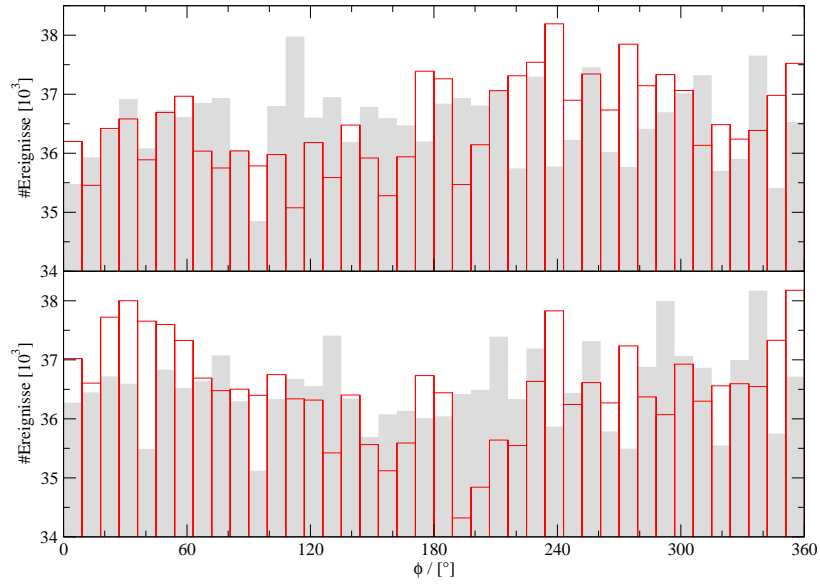


Abbildung F.32: Abweichung der Azimutalwinkelverteilung im nmNCSM (rot) vom Standardmodell (grau) bei Paarproduktion mit Zerfall und rekonstruiertem Neutrinoimpuls; phasenverschobene Summe von $(\pm-)$ und $(\pm+)$. Oben auf \vec{E} sensitive Schnitte, unten auf \vec{B} sensitive Schnitte (siehe Text). Parameter: $\Lambda_{\text{NC}} = 1 \text{ TeV}$, $\vec{E} = \vec{B} = (1, 0, 0)^T$, $\kappa_2 = 0.5$

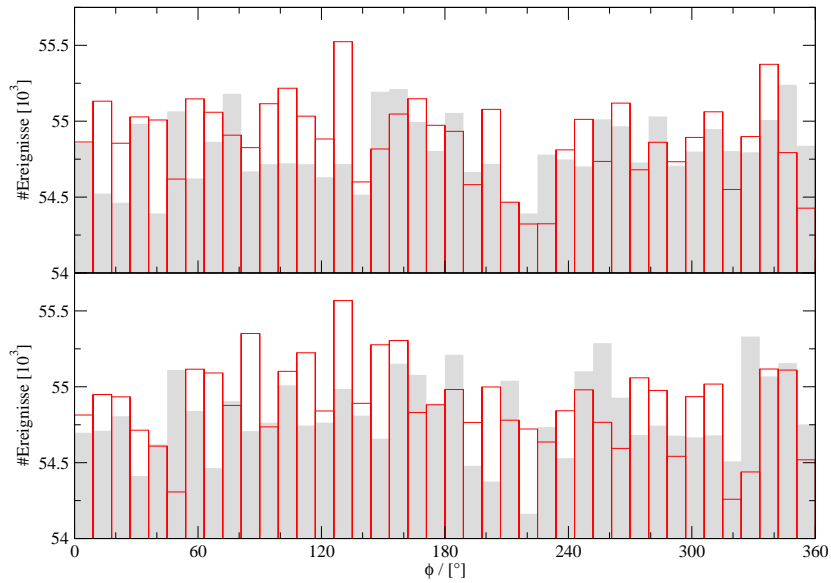


Abbildung F.33: wie Abb.F.32, jedoch über alle Polarisationen ohne Phasenverschiebung summiert

Anhang G

Eingesetzte Software

Die folgende Liste soll einen (unvollständigen) Überblick über die in dieser Arbeit eingesetzte Software geben. Neben dem Zweck der Dokumentation dieser Arbeit ist diese Liste vor allem auch als Anerkennung der überwiegend unbezahlten Leistung zahlloser Autoren freier Software zu verstehen. Die von diesen veröffentlichte Software bildet vom Betriebssystem angefangen bis zum Textsatz mit \LaTeX eine Basis, ohne die diese Arbeit in der vorliegenden Form nicht realisierbar gewesen wäre.

Die folgenden Programme werden unter OpenSource-Lizenzen vertrieben und sind im Internet frei verfügbar:

O'Mega: Ein in der Sprache O'Camel implementierter Generator für Matrixelemente mit einem Satz von FORTRAN-Bibliotheken, der die Basis der Implementation der nmNCSM-Feynmanregeln in dieser Arbeit bildet.

Homepage: <http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/~ohl>

WHIZARD: Ein Softwarepaket mit dem nötigen Code und der Infrastruktur, um für fast beliebige Prozesse mit Vielteilchenendzuständen Monte-Carlo-Generatoren zu erzeugen, welches die Grundlage für die in dieser Arbeit verwendeten Generatoren bildet.

Homepage: <http://www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/whizard/>

g95: Ein freier Compiler auf der Basis von gcc für FORTRAN 95. Die Geschwindigkeit des erzeugten Codes kann zwar noch nicht mit dem Intel Fortran Compiler konkurrieren, aber die mit der Option `-Wall` produzierten Warnungen erwiesen sich als wertvolle Hilfe bei der Fehlersuche.

Homepage: <http://www.g95.org>

gnuplot: Ein freies und mächtiges Plotprogramm, welches ein wertvolles Werkzeug zur Analyse der erzeugten Daten während der Arbeit war.

Homepage: <http://www.gnuplot.info/>

Grace: Ein weiteres freies Plotprogramm, mit welchem nahezu alle in dieser Arbeit abgedruckten Plots und Grafiken erzeugt wurden.

Homepage: <http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>

FeynMF: Ein Makropaket für \LaTeX und METAFONT bzw. METAPOST zum Erzeugen qualitativ hochwertiger Feynmangraphen, mit dem alle in dieser Arbeit auftretenden Feynmangraphen erstellt wurden.

Homepage: <http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/~ohl>

CERNLIB: Diese Bibliothek enthält eine Fülle für die Anwendung in der Hochenergiephysik konzipierter Module. In dieser Arbeit wurde das Modul PDFLIB zur Bereitstellung der Partonverteilungsfunktionen verwendet.

Homepage: <http://cernlib.web.cern.ch/cernlib/>

Folgende Programme sind zwar kostenlos im Internet erhältlich, unterliegen aber ClosedSource-Lizenzen:

Intel Fortran Compiler (ifc): Der gesamte für diese Arbeit geschriebene FORTRAN-Code wurde mit dem ifc übersetzt. Der ifc steht auf der Homepage von Intel für nicht kommerzielle Projekte kostenlos gegen eine Registrierung zur Verfügung.

Homepage: <http://www.intel.com>

FORM: Ein Programm zur symbolischen Manipulation großer Ausdrücke. FORM wurde für die analytische Berechnung des Matrixelements für die unpolarisierte W -Paarproduktion verwendet. Der Autor vertreibt das Programm kostenlos unter einer ClosedSource-Lizenz.

Homepage: <http://www.nikhef.nl/~form>

Die folgenden Programme werden kommerziell vertrieben:

Mathematica: Ein mächtiges Computeralgebrasystem, mit welchem die analytischen, mit FORM berechneten Ausdrücke für das Matrixelement und den Wirkungsquerschnitt vereinfacht und ausgewertet wurden. Das Programm wird kommerziell von Wolfram Research vertrieben.

Homepage: <http://www.wolfram.com>

Maple: Ein weiteres ausgereiftes Computeralgebrasystem, welches für die Überprüfung der Ward-Identität mithilfe der analytischen FORM-Rechnung verwendet wurde. Das Programm wird kommerziell von Waterloo Software vertrieben.

Homepage: <http://www.maplesoft.com>

In dieser Aufzählung nicht aufgeführt sind der Kernel sowie die zahllosen Tools und Programmpakete, die zusammen das freie UNIX-System Linux formen und somit die unverzichtbare Basis für alle am Rechner durchgeführten Arbeiten bildeten.

Literaturverzeichnis

- [1] H. S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [2] T. Ohl and J. Reuter. Testing the noncommutative standard model at a future photon collider. *Phys. Rev.*, D70:076007, 2004, hep-ph/0406098.
- [3] A. Alboteanu, T. Ohl, and R. Ruckl. Probing the noncommutative standard model at hadron colliders. 2006, hep-ph/0608155.
- [4] M. Kaminski. Produktion polarisierter Vektorbosonen im nichtkommutativen Standardmodell. Diplomarbeit, Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2005.
- [5] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess, and M. Wohlgenannt. The standard model on noncommutative space-time. *Eur. Phys. J.*, C23:363–376, 2002, hep-ph/0111115.
- [6] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol.2: Modern Applications*. Cambridge University Press, 2005.
- [7] M. E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory (Frontiers in Physics S.)*. HarperCollins Publishers, 1995.
- [8] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Gauge theory on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C16:161–167, 2000, hep-th/0001203.
- [9] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 73:977–1029, 2001, hep-th/0106048.
- [10] H. Weyl. Quantum mechanics and group theory. *Z. Phys.*, 46:1, 1927.
- [11] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Noncommutative gauge field theories: A no-go theorem. *Phys. Lett.*, B526:132–136, 2002, hep-th/0107037.
- [12] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Noncommutative standard model: Model building. *Eur. Phys. J.*, C29:413–432, 2003, hep-th/0107055.
- [13] N. Seiberg and E. Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999, hep-th/9908142.
- [14] T. Asakawa and I. Kishimoto. Comments on gauge equivalence in noncommutative geometry. *JHEP*, 11:024, 1999, hep-th/9909139.
- [15] A. Bichl et al. Renormalization of the noncommutative photon self-energy to all orders via seiberg-witten map. *JHEP*, 06:013, 2001, hep-th/0104097.

- [16] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C21:383–388, 2001, hep-th/0104153.
- [17] G. Barnich, F. Brandt, and M. Grigoriev. Local brst cohomology and seiberg-witten maps in non-commutative yang-mills theory. *Nucl. Phys.*, B677:503–534, 2004, hep-th/0308092.
- [18] J. Rauh. Die Produktion schwerer Quarks an Hadron-Collidern in nichtkommutativer QCD. Diplomarbeit, Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2006.
- [19] H. Bozkaya et al. Space/time noncommutative field theories and causality. *Eur. Phys. J.*, C29:133–141, 2003, hep-th/0209253.
- [20] Y. Liao and K. Sibold. Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: Basic rules. *Eur. Phys. J.*, C25:469–477, 2002, hep-th/0205269.
- [21] T. Ohl, R. Ruckl, and J. Zeiner. Unitarity of time-like noncommutative gauge theories: The violation of ward identities in time-ordered perturbation theory. *Nucl. Phys.*, B676:229–242, 2004, hep-th/0309021.
- [22] C. Grosse-Knetter. Effective lagrangians with higher derivatives and equations of motion. *Phys. Rev.*, D49:6709–6719, 1994, hep-ph/9306321.
- [23] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Publications, 2006.
- [24] B. Melic, K. Passek-Kumericki, J. Trampetic, P. Schupp, and M. Wohlgenannt. The standard model on non-commutative space-time: Electroweak currents and higgs sector. *Eur. Phys. J.*, C42:483–497, 2005, hep-ph/0502249.
- [25] G. Duplancic, P. Schupp, and J. Trampetic. Comment on triple gauge boson interactions in the non-commutative electroweak sector. *Eur. Phys. J.*, C32:141–144, 2003, hep-ph/0309138.
- [26] P. Aschieri, B. Jurco, P. Schupp, and J. Wess. Non-commutative guts, standard model and c, p, t. *Nucl. Phys.*, B651:45–70, 2003, hep-th/0205214.
- [27] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley and Sons Ltd, 1993.
- [28] S. Pokorski. *Gauge Field Theories (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 2000.
- [29] J. A. M. Vermaseren. New features of form. 2000, math-ph/0010025.
- [30] M. Moretti, T. Ohl, and J. Reuter. O’mega: An optimizing matrix element generator. 2001, hep-ph/0102195.
- [31] W. Kinzel and G. Reents. *Physik per Computer. Programmierung physikalischer Probleme mit Mathematica und C*. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [32] M. M. Sheikh-Jabbari. Discrete symmetries (c,p,t) in noncommutative field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5265–5268, 2000, hep-th/0001167.
- [33] T. Ohl and C. Schwinn. Forests, groves and higgs bosons: Gauge invariance classes in spontaneously broken gauge theories. *Eur. Phys. J.*, C30:567–582, 2003, hep-ph/0305334.
- [34] H. L. Lai et al. Global QCD analysis of parton structure of the nucleon: Cteq5 parton distributions. *Eur. Phys. J.*, C12:375–392, 2000, hep-ph/9903282.

- [35] G. P. Lepage. A new algorithm for adaptive multidimensional integration. *J. Comput. Phys.*, 27:192, 1978.
- [36] T. Ohl. Vegas revisited: Adaptive monte carlo integration beyond factorization. *Comput. Phys. Commun.*, 120:13–19, 1999, hep-ph/9806432.
- [37] T. Ohl. Electroweak gauge bosons at future electron positron colliders. 1999, hep-ph/9911437.
- [38] T. Ohl. O'mega and whizard: Monte carlo event generator generation for future colliders. 2000, hep-ph/0011287.
- [39] J. A. Oteo. The Baker-Campbell-Hausdorff formula and nested commutator identities. *Journal of Mathematical Physics*, 32(2):419–424, Feb. 1991.
- [40] W. M. Yao et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G33:1–1232, 2006.

Danksagung

Auf der letzten Seite angelangt möchte ich mich noch bei allen Menschen bedanken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben und ohne deren Mithilfe diese in der vorliegenden Form nicht möglich gewesen wäre:

- PD Dr. Thorsten Ohl, der diese Arbeit sehr engagiert betreute und immer ein offenes Ohr für meine (manchmal sehr zahlreichen) Fragen hatte, und dem ich somit einen nicht unbeträchtlichen Teil meines im Verlaufe des letzten Jahres erworbenen Wissens über Quantenfeldtheorien zu verdanken habe
- Prof. Dr. Reinhold Rückl, für die Möglichkeit, mich an seinem Lehrstuhl mit diesem Themengebiet zu beschäftigen
- Prof. Dr. Hans Fraas, dessen Vorlesung über Elektrodynamik mein Interesse an der theoretischen Physik weckte
- meinen Eltern und meiner Familie, ohne deren Unterstützung und Rückhalt in jeglicher Hinsicht mein Studium nicht möglich gewesen wäre
- Matthias Kaminski für die anfängliche Starthilfe
- meinen Freunden und Kommilitonen Johannes Rauh, Thomas Schutzmeier, Alexander Knochel und Thomas Reiter für eine Fülle von interessanten Diskussion, die mein Wissen über die Physik vertieft haben
- Thorsten Ohl, Thomas Schutzmeier und Johannes Rauh, die das Korrekturlesen dieser Arbeit auf sich genommen haben
- der Fachschaft Physik für eine erhebliche Menge Kaffee sowie einen angenehmen Rückzugsort
- dem gesamten Lehrstuhl für Theoretische Physik II für das angenehme Arbeitsklima
- meiner Freundin Barbara, die in den letzten Monaten vor allem meinen Rücken gesehen hat, für ihre Geduld und ihren Rückhalt

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 27. Oktober 2006

Christian Speckner