Elastizitätsmodul

1 Vorbereitung

1.1 Allgemeine Grundlagen zu elastischen Eigenschaften fester Körper, Neutrale Faser, Anisotropie von Kristallen, Fließvorgänge
Lit.: EICHLER[1] Kapitel 9

1.2 Berechnung des Elastizitätsmoduls, Flächenträgheitsmoment
Lit.: ANHANG A

1.3 Zusammenhang zwischen dem Aufbau von Knochen und dem Elastizitätsmodul
Lit.: ANHANG B

1.4 Spannungs-Dehnungs-Diagramm
Lit.: ANHANG C

1.5 Tabellen zu Flächenträgheitsmomenten und Werten des Elastizitätsmoduls
Lit.: ANHANG D

1.6 Fehlerrechnung
Die zur Fehlerabschätzung notwendigen Gleichungen sind als **Hausaufgabe** im Protokollheft schriftlich vorzubereiten. Hinweis: Setzen Sie $k := R^4 - r^4$ in den Versuchsteilen 2.1.1, 2.1.2 und 2.1.3 (wenn nötig).

Abbildung 1: Aufbau zu Versuch 23

[1]Eichler, Kronfeldt, Sahm: Das Neue Physikalische Grundpraktikum; ISBN-13 978-3-540-21453-3

2 Aufgaben

2.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls verschiedener Materialien

Bestimmung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit vom Material und von der Geometrie des Probekörpers. Überprüfung der l^3-Abhängigkeit nach Gl. (1).

2.1.1 Vergleich des Elastizitätsmoduls von Stahl, Messing und Kupfer

Man lege den jeweiligen Stab so auf die Schneiden (Abstand l), dass die Stabenden nur sehr wenig überstehen und belaste sie über einen Träger in der Mitte mit Zusatzmassen m_i.

Die Messung ist für die Rundprofile aus Stahl, Messing und Kupfer durchzuführen. Die jeweiligen Durchbiegungen werden mit der Mikrometerschraube gemessen, sodass bei seitlich senkrechtem Blick gerade kein Luftspalt mehr zwischen Mikrometerschraube und Probenkörper sichtbar ist. Man trage die Auslenkungen $S_i = s_i - s_0$ (s_0 ist die Anfangsdurchbiegung bei Belastung des Stabes ausschließlich durch den Träger) in einem $s_i(F_i)$ ($F_i = m_i g$) Diagramm auf, dessen Steigung $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ ist. Die Masse m_i wird ohne Träger gewogen, vgl. Anhang A.

Der gesuchte Elastizitätsmodul E ergibt sich nach Gleichung (1) des Anhangs aus

$$E = \frac{l^3 \Delta F}{48 I_\eta \Delta S}.$$

Das Flächenträgheitsmoment I_η entnehme man aus der Tabelle 2 des Anhangs. Vergleichen Sie den berechneten Wert mit dem Literaturwert aus der Tabelle des Anhangs. Geben Sie die prozentuale Abweichung vom Literaturwert an und bewerten Sie Ihr Ergebnis.

2.1.2 Einfluss der Geometrie auf den Elastizitätsmodul

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit von der Geometrie verwendet man den unter Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Versuchsaufbau. Die Messung ist für ein Rechteck-, ein Rund- sowie ein Rohrprofil aus identischem Material durchzuführen.
Wie wirkt sich die Geometrie der Profile auf den Verlauf der Geraden aus?
Wie ändert sich der Elastizitätsmodul?

Beachten Sie, dass der Abstand l der Schneiden bei den Profilen gleich sein muss.

2.1.3 Nachweis der l^3 - Abhängigkeit

Es wird ein beliebiges Profil mit einer bestimmten Masse m_0 belastet und der Abstand l der Schneiden sukzessive verändert. Bei jeder Messung der Durchbiegung muss auch die Anfangsdurchbiegung s_0 neu bestimmt werden! Wählen Sie ein geeignetes Koordinatenpapier und tragen Sie darauf die Abhängigkeit $s(l)$ ein. Überprüfen Sie anhand der Auswertung Ihres so erstellten Graphen die l^3 - Abhängigkeit.

2.2 Fließvorgänge eines Kupferdrahtes

Aufnehmen eines Spannungs-Dehnungs-Diagramms innerhalb und außerhalb des Gültigkeitsbereichs des Hook'schen Gesetzes.

Man spannt einen Kupferdraht auf beiden Seiten in eine Trägervorrichtung ein. Auf einer Seite wird ein Träger eingehängt und mit der Masse $m = 40,0\,\mathrm{g}$ beschwert um den Draht zu strecken. Nach Bestimmung der Anfangslänge l des eingespannten Drahtes wird durch vorsichtige Belastung mit zunehmender Masse m_i und zugehöriger Drahtlänge l_i ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm erstellt. Das Hooke'sche Gesetz ist bei dem verwendeten Draht im Bereich von $0 - 100\,\mathrm{g}$ gültig (hier sind $20\,\mathrm{g}$ - Stücke aufzulegen), danach beobachtet man zuerst den Übergang in den plastischen Bereich und Fließvorgänge. Sobald der Draht zu fließen beginnt, ist keine korrekte Messung mehr möglich! Im plastischen Bereich (zwischen $100\,\mathrm{g}$ und ca. $150\,\mathrm{g}$) sollte man nur noch Gewichte von $10\,\mathrm{g}$ auflegen.
An welchem Punkt reißt die Probe?
Berechnen Sie anhand des linearen Bereichs den Wert des Elastizitätsmoduls.
Beachten Sie, dass Sie die Gewichte behutsam auflegen, da der Draht sonst durch die zusätzliche beschleunigende Kraft gedehnt wird.

2.3 Fehlerrechnung

Zu den Aufgabenteilen 2.1.1, 2.1.2 und 2.1.3 ist eine Fehlerrechnung anzufertigen.
Für den Elastizitätsmodul ist bei 2.2 eine Fehlerrechnung durchzuführen. Den Fehler der Geradensteigung entnehme man dem Graphen.

A Berechnung des Elastizitätsmoduls, Flächenträgheitsmoment

Mit der Mikrometerschraube werden die Differenzen der Biegepfeile $S_i = s_0 - s_i$ (i = 1, 2, ..., n) gemessen, wobei s_0 den ungebogenen Stab beschreibt, d.h. wenn nur ein leerer Träger H an ihm hängt, und s_i (i = 1, 2, ..., n) die Durchbiegung nach Auflegen von Zusatzmassen m_i (i = 1, 2, ..., n). Man stellt dann die Gerade $F_i = m_i g$ über $S_i = s_0 - s_i$, deren Steigung $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ ist, graphisch dar. Für den Elastizitätsmodul ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$E = \frac{l^3 \Delta F}{48 I_\eta \Delta S}. \tag{1}$$

Das Gewicht des Stabes und das des Trägers brauchen nicht berücksichtigt werden, da die Ruhelage bestimmt wird, wenn bereits der Träger am Stab hängt. Den Elastizitätsmodul kann man nur angeben, wenn das Flächenträgheitsmoment I_η bekannt ist, das als korrigierender geometrischer Faktor dient. Würde man es nicht berücksichtigen, müsste die Durchbiegung für alle Profile eines Materials gleich sein. Denn der Elastizitätsmodul ist eine Materialkonstante. Das Flächenträgheitsmoment entnehmen Sie dem Anhang 3.5.

B Zusammenhang zwischen dem Aufbau von Knochen und dem Elastiztätsmodul

Knochen bestehen zu $60 - 70\%$ aus anorganische Salzen und aus Kollagen. Knochen verhalten sich in unterschiedlichen Belastungsrichtungen unterschiedlich, d.h. es handelt sich nicht um ein isotropes Material. So ist der Elastizitätsmodul längs ungefähr doppelt so groß wie quer, d.h. in Längsrichtung kann ein Knochen viel mehr Belastung ertragen. Der Elastizitätsmodul hat einen Wert von ca. 17900 MPa.
Aus ökonomischen Gründen sind sie nicht voll, sondern mit einem Geflecht feinster Knochenbälkchen gefüllt, in welchen Spannungslinien verlaufen, d.h. die neutralen Fasern.
Brüche können auch durch die Einwirkung einer Zugspannung, Druckspannung, durch Scherung, Torsion, aber auch durch Biegung eines Knochens zustande kommen.

C Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei der Dehnung von Drähten

Um das Verhalten von Drähten unterschiedlichen Profils bei unterschiedlicher Zugkraft vergleichbar zu machen, bezieht man diese Zugkraft F auf den Querschnitt A des Materials und ihre Längenänderung Δl auf die Ausgangslänge l_0. Man verwendet also nun die Größen der Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$ und der Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, um den Zusammenhang dieser zwei Größen in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm darzustellen. Für Metalle erhält man beispielsweise einen derartigen Graphen:

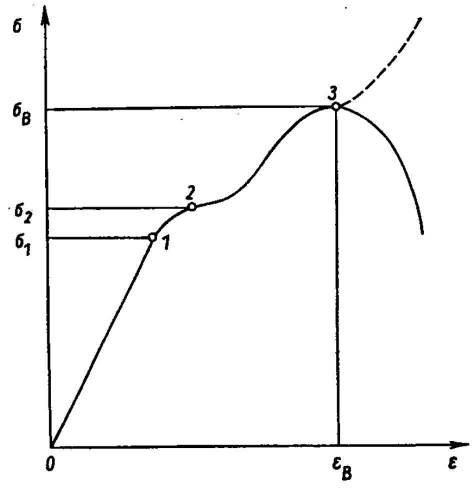

Abbildung 2: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Das Hookesche Gesetz gilt im Bereich $0 < \sigma < \sigma_1$. Den Punkt 1 bezeichnet man als Proportionalitätsgrenze, da nach Überschreiten dieses Punktes das Hooke'sche Gesetz nicht mehr gilt. Der Elastizitätsmodul E ist hier durch die Steigung der Geraden gegeben: $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$. Im linearen Bereich sind die Stoffe elastisch, d.h. sie nehmen nach einer Entlastung ohne Zeitverzögerung wieder ihre ursprüngliche Form an.
Im Intervall von σ_1 bis σ_2 bilden sich Verformungen nur noch zeitverzögert zurück. Es werden elastische Nachwirkungen beobachtet, die man Viskoelastizität nennt. In diesem Bereich sind Spannung und Dehnung nicht mehr proportional zueinander. Man nennt den nicht exakt bestimmbaren Punkt 2 Elastizitätsgrenze. Oberhalb dieses Punktes wird das Material irreversibel verformt, da die Atome im Kristallgitter durch die Dehnung so weit aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben wurden, dass sie in eine neue Gleichgewichtslage übergehen; man spricht von einer plastischen Deformation. Hier beeinflussen Fließvorgänge das Verhalten des Materials. Wird der Punkt 3, der durch σ_B und ε_B beschrieben ist, überschritten, so reißt die Stoffprobe.

D Tabellen: Elastizitätsmodule, Flächenträgheitsmoment

Material	**Elastizitätsmodul**
Messing	$0,9 \cdot 10^5$ MPa bis $1,0 \cdot 10^5$ MPa (je nach Legierung)
Stahl	$2,0 \cdot 10^5$ MPa
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$ MPa
Kupfer/ weiches Kupfer bzw. Elektrolytkupfer	$1,25 \cdot 10^5$ MPa / $1,00 \cdot 10^4$ MPa

Tabelle 1: Elastizitätsmodule für verschiedene Materialien.

Querschnitt A	**Flächenträgheitsmoment** I_η
Rechteck: Höhe h, Breite b	$\frac{bh^3}{12}$
Rund: Radius R	$\frac{\pi R^4}{4}$
Rohr: Innenradius r, Außenradius R	$\frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$

Tabelle 2: Berechnungsformeln für das Flächenträgheitsmoment verschiedener Geometrien

Anmerkung: Herstellung von weichem Kupfer bzw. Elektrolytkupfer
Kupfer besitzt sowohl eine sehr gute thermische und elektrische Leitfähigkeit als auch eine sehr gute plastische Verformbarkeit. Rohkupfer ist verunreinigt mit Eisen, Zink, Arsen und Edelmetallen. Elektrolytkupfer weist einen sehr hohen Kupfergehalt von ca. $99,95\%$ auf. Reinkupfer gewinnt man aus kupferhaltigen Erzen (CuZS, CuFeS2). Die Herstellungsweise von Elektrolytkupfer nennt man elektrochemische Raffination. Kupfer ist einer der ältesten vom Menschen genutzten Werkstoffe. Schon Gutenberg verwendete zum Buchdruck weiches Kupfer für die Druckklötzchen. Heute findet diese Form von Kupfer ihren Einsatz als Draht, zum Wickeln von Spulen und als Trafodraht.