

# Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen auf Kabeln

## 1 Vorbereitung

- Der Begriff der Welle und ihre mathematische Beschreibung, Überlagerung von Wellen, stehende Wellen und ihre mathematische Beschreibung, Wellengleichung und Ausbreitungsgeschwindigkeit  
Lit.: FRAUENFELDER-HUBER Bd.II, § 22.1, § 23, § 24, § 26 (Anfang), Anhang 3.2
- Methoden zur Messung der Lichtgeschwindigkeit (Lit.: GERTHSEN)
- Maxwell-Relation (Lit.: GERTHSEN)
- Wellenausbreitung auf Kabeln, Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenwiderstand  
Signalübertragung auf Koaxialkabeln (Lit.: Anhang)
- Reflexion und Abschlusswiderstand, Dispersion (Lit.: Anhang)
- Gerätebeschreibungen sind unter dem jeweiligen Modul/Versuch auf der Homepage des physikalischen Grundpraktikums zu finden:
  - Funktionengenerator
  - Oszilloskop TDS 2022B (wichtig sind die Seiten 30 bis 46)
  - Generator zur Darstellung stehender Wellen (siehe Anhang)
- Bringen Sie zum Versuch einen USB-Stick mit, um die Oszilloskopdarstellungen abzuspeichern. Achten Sie während des Versuchs auf eine Dokumentation, in der die Zuordnung von Bildnummer und Oszilloskopeinstellungen festgehalten wird.

Abbildung 1 Versuchsaufbau



## 2 Aufgaben

- **Messung des Wellenwiderstandes von Koaxialkabeln**
- **Signalübertragung auf Koaxialkabeln bei verschiedenartiger Anpassung**
- **Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe von stehenden Wellen auf einem Kabel sowie Verzögerungskabel**
- **Messung der Dämpfung eines Kabels mit Hilfe von stehenden Wellen**
- **Messung der Lichtgeschwindigkeit**

### 2.1 Signalübertragung auf Koaxialkabeln bei verschiedenartiger Anpassung

#### 2.1.1 Beobachtung des Signalverlaufs

*Die Form der reflektierten Impulse ist von der Anpassung am Anfang und Ende des Kabels abhängig. Dies soll im Detail untersucht werden.*

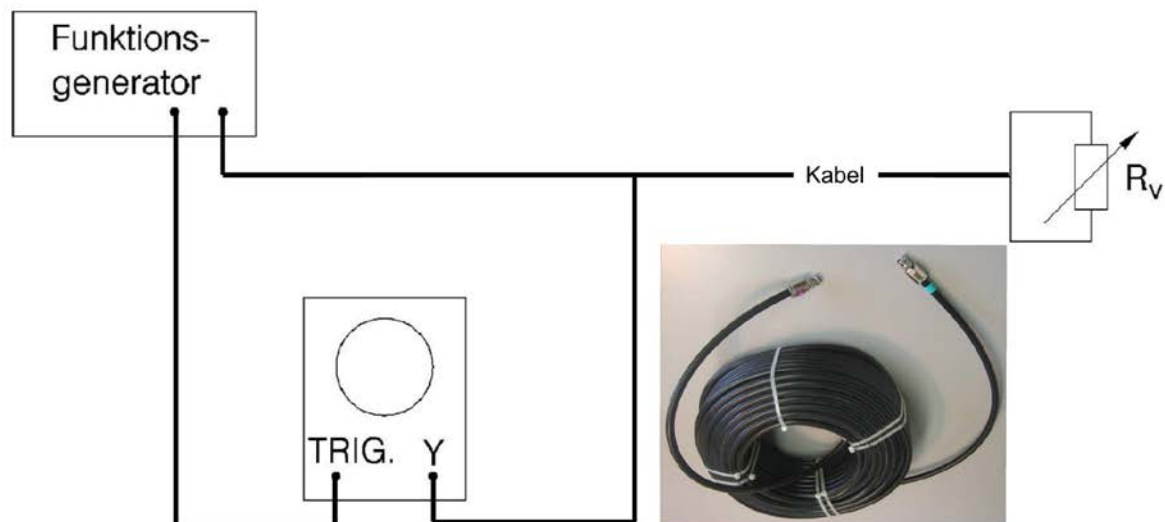


Abbildung 2 Schematischer Versuchsaufbau

#### 2.1.1.1 Messung des Wellenwiderstandes eines Koaxialkabels

Mit Hilfe des Frequenzgenerators (Frequenz ca. 200 kHz) werden kurze Einzelimpulse möglichst kleiner Breite erzeugt. Damit man ein von den Reflexionsbedingungen unabhängiges Bild erhält, wird der Oszillograph extern getriggert. Das Ende des 50 m langen Koaxialkabels (das dünne) wird mit einem veränderbaren Widerstand (Kohleschichtpotentiometer)  $R_V$  (41-12) abgeschlossen. Man beobachte am Oszillograph die Reflexion der Impulse in Abhängigkeit vom Widerstand  $R_V$  und bestimme diejenige Einstellung von  $R_V$ , bei der keine Reflexion auftritt. Dieser eingestellte Widerstandswert wird mit Hilfe eines Digitalvoltmeters (41-7) gemessen (Signal abkoppeln) und der Wellenwiderstand angegeben. Man versuche die Anpassung am Kabelende zusätzlich mit dem Wendepotentiometer (41-13), der Widerstandsdekade, dem Kurzschlussstecker und dem kommerziellen 50  $\Omega$  Abschlusswiderstand. Man speichere oder skizziere die entsprechenden Bilder und beschreibe die auftretenden Effekte.

### 2.1.1.2 Messung am Anfang und am Ende des Kabels

Man gebe das Signal am Anfang (generatorfernes Ende) des Kabels auf CH I, das vom Ende (generatorseitiges Ende) des Kabels auf CH II.  $R_2$  soll hierbei immer ein zum Anfang (generatorfernes Ende) parallelgeschalteter Widerstand sein. Beobachten Sie die Impulsformen bei folgenden Abschlüssen:

#### Am Anfang des Kabels:

- 1)  $R_2 = 0$
- 2)  $R_2 = Z$
- 3)  $R_2 = \infty$

Für  $R_2 = 0$  benutzt man den Kurzschlussstecker (41-15); für  $R_2 = Z$  den Stecker mit Wellenwiderstand (41-14).  $R_2 = \infty$  ergibt sich bei offenem Leitungsende. Der Innenwiderstand des Generators beträgt  $50 \Omega$ . Schalten Sie verschiedene Widerstände parallel zum generatorseitigen Ende des Kabels und beobachten Sie, wie sich die gemessenen Signalverläufe an beiden Enden ändern.

#### Am Ende des Kabels:

Führen Sie für alle Widerstände  $R_2$ , die im vorherigen Abschnitt aufgelistet sind (bzw. mögliche Kombinationen, falls zusätzlich ein Widerstand am generatorseitigen Ende parallelgeschaltet wird) gleichzeitig auch die Messung des Signalverlaufs am generatorseitigen Ende mit durch und stellen Sie diese Messung gemeinsam mit der Messung am Kabelanfang dar. Erklären bzw. interpretieren Sie Ihre Ergebnisse unter Berücksichtigung nachfolgenden Sachverhaltes: Bei Messungen ohne Abschlusswiderstand erhält man am Oszillograph die doppelte Höhe des Signals, da der hohe Eingangswiderstand ( $1 \text{ M}\Omega$ ) praktisch dem offenen Ende entspricht und somit als „fast unendlich“ angesehen werden kann.

### 2.1.1.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Durch Messung der Laufzeit eines reflektierten Signals messe man die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf einem Koaxialkabel und auf einem Verzögerungskabel. Verzögerungskabel sind so konstruiert, dass sie auf kurzen Strecken möglichst lange Laufzeiten haben.

**Hinweis:** Verwenden Sie niedrige Frequenzen zur Messung der Verzögerungskabel.

## 2.1.2 Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe von stehenden Wellen

### 2.1.2.1 Modellversuch zur Darstellung von stehenden Wellen

Stehende Wellen werden erzeugt, wenn sich zwei entgegengesetzt laufende Wellen gleicher Frequenz und Amplitude überlagern. Dies kann im Folgenden durch den Generator (41-16) simuliert werden, der ausschließlich für diesen Modellversuch verwendet wird. Dazu wird dem Oszilloskop das Triggersignal des Generators zugeführt und die Buchsen A und B des Generators werden mit den Eingängen CH I und CH II des Oszillographen verbunden. Verwenden Sie die mathematischen Funktionen des Oszilloskops, um beide Kanäle zu addieren. Man beobachtet das Bild einer stehenden Welle für die Geschwindigkeiten **1**, **2** und **3** und beschreibe kurz die beobachteten Vorgänge. Es ist unbedingt darauf zu achten, dass die Spannungen der beiden Kanäle gleich groß sind. In der Schalterstellung **4** des Generators beobachtet man die nach links und rechts laufenden Wellen. Das addierte Signal zeigt gleichzeitig mehrere *Momentaufnahmen* einer stehenden Welle. Um im Modell die Addition von Wellen mit verschiedenen Amplituden zu simulieren, wie es z.B. bei der Überlagerung eines gedämpften reflektierten Signals mit dem ungedämpften einlaufenden Signals der Fall ist, verstellt man die Amplitude eines Signals am Generator. Das Beobachtete ist zu speichern

und kurz zu beschreiben. Des Weiteren ist zu erklären, wie die Erscheinungen „verschiedener Laufrichtungen“ technisch in diesem Modelversuch bewirkt wird.

### 2.1.2.2 Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Um auf dem Kabel Überlagerung harmonischer Wellen zu erzeugen, wird am Generator das sinusförmige Ausgangssignal eingestellt und das generatorferne Ende nach Bedarf offen gelassen oder mit dem Kurzschlussstecker abgeschlossen. Da am Kabel ohmsche Verluste auftreten, wird die einlaufende Welle gedämpft; ihre Amplitude nimmt somit mit der Länge der Leitung ab. Deshalb verschwindet die Amplitude an der Stelle, die dem Knoten einer stehenden Welle entspricht, nicht vollständig, sondern nimmt nur einen minimalen endlichen Wert an. Der jeweilige ortsfeste Amplitudenwert der Einhüllenden wird am Anfang des Kabels abgegriffen. Durch Verändern der Frequenz lässt sich die „stehende Welle“ so stauchen bzw. strecken, dass am Anfang des Kabels ein Minimum entsteht. Man bestimme die Frequenzen für  $\lambda/4$  und  $3\lambda/4$  (Reflexion am offenen Ende). Vergewissern Sie sich, dass Sie diese erst ab dem hohen dreistelligen kHz-Bereich vorfinden können.

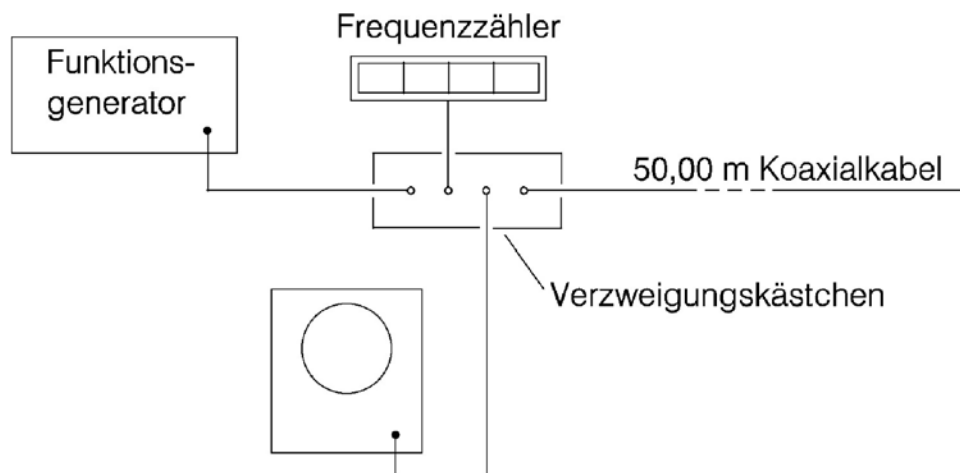


Abbildung 3 Versuchsaufbau zur Ausbreitungsgeschwindigkeit

Um die Frequenz für  $\lambda/2$  zu messen wird das Ende des Koaxkabels mit Hilfe des Kurzschlusssteckers (41-15) kurzgeschlossen. Für jede Einstellung ist eine Messreihe mit 5 Einzelmessungen anzulegen. Aus der Wellenlänge und der gemessenen Frequenz wird jeweils die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der elektromagnetischen Welle auf dem Koaxialkabel berechnet. Lässt sich innerhalb der Messgenauigkeit Dispersion im überstrichenen Frequenzintervall feststellen? Wie groß ist die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  des Kabels?

Aus der Höhe der Amplitude in der Knotenstelle lässt sich die Dämpfung  $D$  des Kabels berechnen. Zur Definition von  $D$  (siehe Anhang).

Mit Hilfe der Überlegungen aus dem Anhang ermittle man aus dem am Oszillographen sichtbaren Bild die Größen  $U(0)$  (Eingangsspannung) und  $U$  der Überlagerung. Man berechne daraus die Dämpfung bei den Resonanzfrequenzen und trage  $D(\omega)$  graphisch (inklusive Fehlerbalken) auf. Zeigt  $D$  eine Frequenzabhängigkeit?

### 3 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Das Lichtgeschwindigkeits-Messgerät sendet über eine Hochleistungs-LED sehr kurze, rote Lichtimpulse von etwa 20 ns Breite aus. Die Lichtpulse werden nach Hin- und Rücklauf über eine bekannte Messstrecke in Spannungspulse umgewandelt und mit dem Oszilloskop beobachtet. Die Lichtquelle wird durch das Fenster  $F_1$  von der Linse  $L$  in das Unendliche abgebildet. Der große Tripelspiegel  $T_1$  faltet den Strahlengang in sich zurück, so dass die LED wieder auf sich selbst abgebildet wird (siehe Abb.4).

Der Strahlteiler  $S$  im Lichtgeschwindigkeits-Messgerät reflektiert das zurückkommende Licht nach unten auf die Photodiode  $D$ . Gleichzeitig reflektiert er die Hälfte des ausgesandten Lichts nach oben, wo es durch das zweite Fenster  $F_2$  austritt. Dieser nach oben gerichtete Strahlengang ist gleichwertig mit dem horizontal austretenden.

Der direkt über  $F_2$  angeordnete kleine Tripelspiegel  $T_2$  erzeugt einen Referenzpuls mit vernachlässigbarer Laufzeitverzögerung und beeinflusst den Messstrahl nicht.

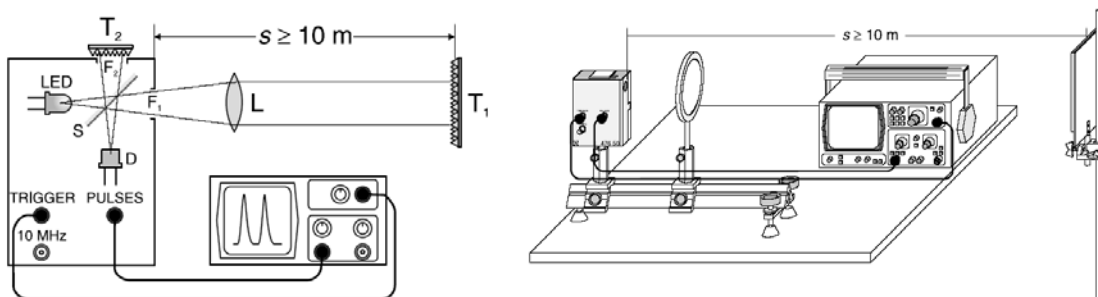


Abb. 4 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Messen Sie die Laufzeit für min. 9 unterschiedliche Lichtwege und bestimmen Sie die Lichtgeschwindigkeit inklusive Fehler. Dabei sollten zur Minimierung des Einflusses des Ansprechverhaltens der Diode die Einsatzflanken der Signale verwendet werden, die als die Positionen bestimmt werden, an denen eine möglichst gute Anpassung der Signalform sich statistisch signifikant vom Untergrund abhebt. Es ist bei der Messung auf potentiell auftretende Verschiebungen des Zeitnullpunkts (in Form der Flanke des Triggersignals) zu achten, um dadurch keine systematischen Fehler zu verursachen bzw. alle bestimmten Zeiten bezüglich des gleichen Nullpunkts ausdrücken zu können.

## 4 Anhang

Um die Vorbereitung zu diesem Versuch zu erleichtern, werden in diesem Anhang die zur Durchführung des Versuchs notwendigen Grundkenntnisse dargestellt. Teilweise sind diese bereits aus der Vorlesung bekannt, oder sie lassen sich in speziellen Lehrbüchern nachlesen. Während dort die Theorie weit über den hier notwendigen Rahmen hinaus abgehandelt wird, enthält der Anhang eine, speziell auf diesen Versuch aufgebaute, Zusammenfassung der wesentlichen Grundlagen.

### 4.1 Zur Wellenausbreitung auf Kabeln

#### 4.1.1 Drahtwellen längs idealer Leiter

An den Anfang einer unendlich langen, aus zwei parallelen Drähten bestehenden Leitung wird zur Zeit  $t = 0$  ein Rechteckimpuls angelegt. Wäre die Geschwindigkeit der Ausbreitung unendlich, so würde zur gleichen Zeit diese Spannung an allen Punkten der Doppelleitung liegen. In Wirklichkeit spielt sich der Vorgang aber so ab, wie es Abb. 5 angibt: Der Impuls breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.

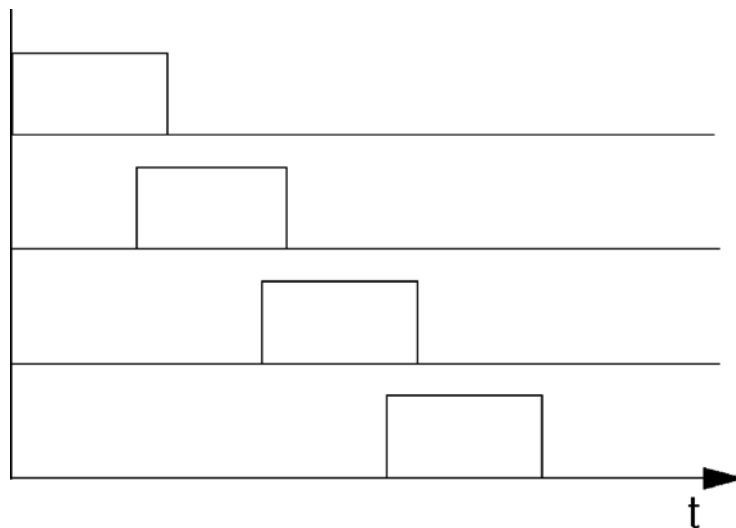


Abbildung 5 Ausbreitung eines Rechteckimpulses auf einer Leitung

##### 4.1.1.1 Die fundamentalen Gleichungen einer homogenen verlustfreien Leitung

Zur Berechnung der charakteristischen Leitungsgrößen einer homogenen Leitung sind folgende Werte von Bedeutung:

$$L^* = \frac{\text{Induktivität}}{\text{Längeneinheit}}$$

$$C^* = \frac{\text{Kapazität}}{\text{Längeneinheit}}$$

Der Ohmsche Widerstand/Längeneinheit  $R^*$  wird zunächst vernachlässigt; es handelt sich also um eine verlustfreie Leitung. Die Verteilung von Spannung  $U(x)$  und Strom  $I(x)$  längs einer Leiterstrecke  $\Delta x$  ist aus Abb. 6 ersichtlich:

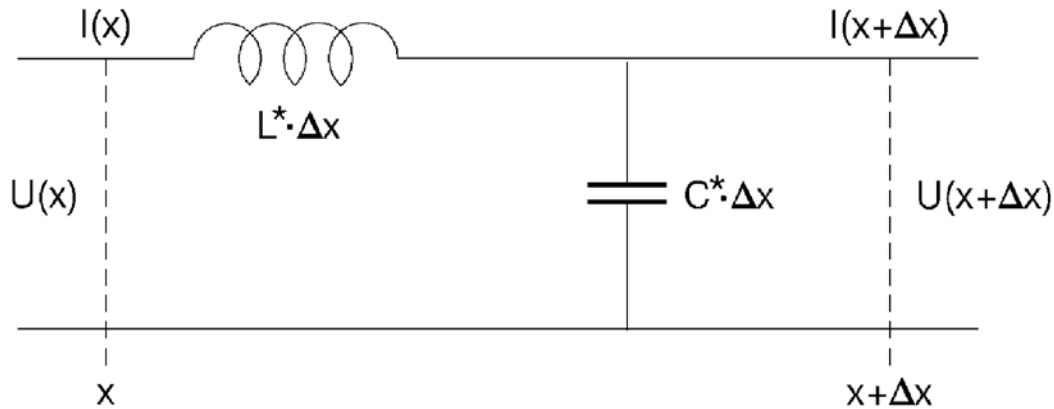


Abbildung 6

Die Änderung der Spannung längs des Leiterstückes  $\Delta x$  ist gleich der induzierten Spannung an der Induktivität  $L^* \Delta x$ . Ändert sich also der Strom mit der Zeit, entsteht ein Spannungsabfall der Größe:

$$\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x) = -L^* \Delta x \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3)$$

Die Änderung des Stromes längs  $\Delta x$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung der Ladung auf der Kapazität  $C^* \Delta x$ :

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = -C^* \Delta x \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4)$$

Für  $\Delta x \rightarrow 0$  ergibt sich damit aus Gl. 3 und Gl. 4

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L^* \frac{\partial I}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C^* \frac{\partial U}{\partial t} \quad (6)$$

Dies sind die fundamentalen Gleichungen einer homogenen verlustfreien Leitung, die zusammengefasst werden können, indem man die eine nach der Zeit und die andere nach dem Ort differenziert und dann entweder  $U$  oder  $I$  eliminiert. Man erhält für Strom- und Spannungsverlauf die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (8)$$

### 4.1.1.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Durch Vergleich mit der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

erhält man für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} \quad (9)$$

**Aufgabe 1:** Welche Zeit braucht der Rechteckimpuls aus Abb. 1 um an das Ende eines 50 langen Kabels mit den Daten  $C^* = 100 \text{ pF/m}$  und  $L^* = 25 \cdot 10^{-8} \text{ H/m}$  zu kommen?

### 4.1.1.3 Wellenwiderstand

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung setzt sich aus einer in positive x-Richtung (einlaufende) und einer in negative x-Richtung (rücklaufende) Welle zusammen:

$$U(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt) = U_+(x, t) + U_-(x, t)$$

Für den Zusammenhang zwischen  $U(x, t)$  und  $I(x, t)$  ergibt sich aus Gl. 4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -L^* \cdot \frac{\partial I}{\partial t} = -L^* \cdot \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \\ &= -L^* \cdot \frac{\partial I}{\partial x} (\mp v) = -L^* \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\mp 1}{\sqrt{L^* C^*}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} \frac{\partial I}{\partial x} \end{aligned}$$

Oder nach partieller Integration:

$$U_{\pm} = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} I_{\pm}$$

In Analogie zum Ohmschen Gesetz bezeichnet man die Größe

$$Z = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}$$

als Wellenwiderstand der Leitung, der jedoch nichts mit einem Ohmschen Widerstand zu tun hat, da keine Energieverluste auftreten. Er gibt vielmehr nur das Verhältnis zwischen Spannung und Strom an allen Stellen des Kabels an.

### 4.1.1.4 Dämpfung

Ist der Ohmsche Widerstand am Kabel nicht vernachlässigbar, so breiten sich gedämpfte Wellen aus. Die Amplitude sinkt exponentiell mit der Länge der Leitung:



$$U(x) = U(0) \cdot e^{-\alpha(\omega) \cdot x}$$

Der Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  ist eine Funktion der Frequenz und nimmt mit wachsender Frequenz zu. An der Stelle  $x = 1/\alpha$  ist die Amplitude also auf den e-ten Teil zurückgegangen. In der Technik wird die Dämpfung durch das Dämpfungsmaß  $D$  beschrieben. (Einheit: Dezibel dB). Die dB-Skala wird definiert durch

$$D = 20 \cdot \log_{10} \frac{U(0)}{U(x)} \text{ dB}$$

Dies ist ein logarithmisches Maß. Eine Abnahme um 20 dB bedeutet also eine Abnahme auf 10 % des ursprünglichen Wertes. Den Zusammenhang zwischen dem Dämpfungskoeffizienten und dem Dämpfungsmaß  $D$  erhält man durch delogarithmieren der Definitionsgleichung:

$$U(x) = U(0) \cdot 10^{-\frac{D^*}{20} x}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{D^*}{20} \cdot \ln 10 \approx \frac{D^*}{8.7}$$

#### 4.1.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand bei Koaxialkabeln

Welchen Einfluss haben nun die elektrischen Eigenschaften und die geometrische Form des Kabels auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale und den Wellenwiderstand? Wir wollen uns dies am Beispiel des Koaxialkabels überlegen: Ein Koaxialkabel Abb. 6 stellt einen Zylinderkondensator dar, dessen Kapazität pro Längeneinheit

$$C^* = 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 \left( \ln \frac{d_a}{d_i} \right)^{-1}$$

beträgt.

Für die Induktivität pro Längeneinheit erhält man:

$$L^* = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i}$$

Damit erhält man aus Gl. 3.1.1.3 die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

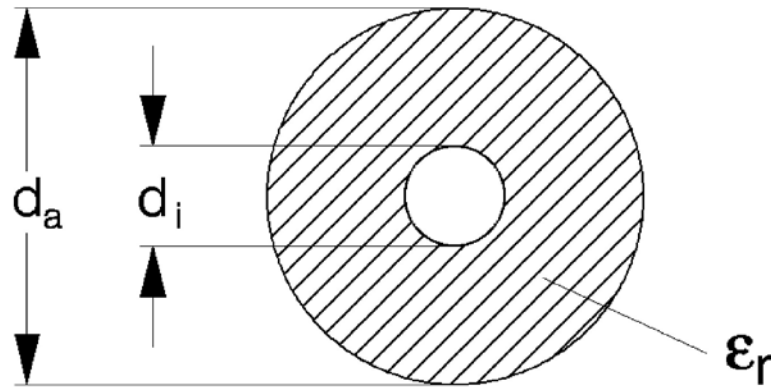


Abbildung 7

Bei handelsüblichen Kabeln gilt  $\mu_r = 1$  und damit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (10)$$

$v$  ist also unabhängig von der Geometrie des Kabels und nur durch die Dielektrizitätskonstante des zur inneren Isolation verwendeten Materials bestimmt.

**Aufgabe 2:** Es ist die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  des oben genannten Kabels (Aufgabe 1) zu berechnen.

Der Wellenwiderstand des Koaxialkabels beträgt nach Gl. 3.1.1.3

$$Z = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d_a}{d_i}$$

Der Faktor  $\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  hat die Dimension eines Widerstandes und den Wert  $120\pi \Omega$ . Für  $\mu_r = 1$  ergibt sich

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{d_a}{d_i} \Omega$$

**Aufgabe 3:** Wie groß ist der Wellenwiderstand eines Koaxialkabels mit  $d_a = 3 d_i$ ? ( $\epsilon_r$  aus Aufgabe 2)

#### 4.1.3 Reflexion und Abschlusswiderstand

Erreicht ein Signal das Ende einer Leitung, so wird es je nach Art des Verbraucherwiderstandes  $R$  reflektiert. Als Maß der Reflexion definiert man den Reflexionskoeffizienten  $\rho$ , der angibt, welcher Anteil der einfallenden Welle reflektiert wird:

$$\rho = \frac{U_-(x_0, t)}{U_+(x_0, t)}$$

Für die Berechnung von  $\rho$  ergibt sich: Über den Verbraucher  $R_V$  fließt die Summe von ein- und auslaufender Stromwelle:

$$I(x_0, t) = I_+(x_0, t) - I_-(x_0, t)$$

Dieser Strom bewirkt einen Spannungsabfall an  $R_V$ :

$$U(x_0, t) = R_V I_+(x_0, t) - R_V I_-(x_0, t)$$

Dieser Spannungsabfall ist gleich der Summe der ein- und auslaufenden Spannungswellen:

$$U_+(x_0, t) + U_-(x_0, t) = R_V I_+(x_0, t) - R_V I_-(x_0, t)$$

Mit Hilfe von Gl. 3.1.1.3 lassen sich  $I_+$  und  $I_-$  eliminieren

$$U_+(x_0, t) + U_-(x_0, t) = \frac{R_V}{Z} U_+(x_0, t) - \frac{R_V}{Z} U_-(x_0, t)$$

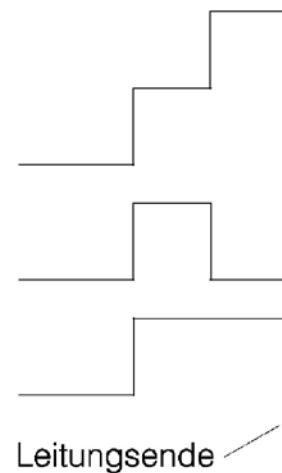
und hieraus  $\rho$  berechnen:

$$\rho = \frac{U_-(x_0, t)}{U_+(x_0, t)} = \frac{R_V - Z}{R_V + Z}$$

Die Größe des Reflexionskoeffizienten hängt also von dem Wellenwiderstand der Leitung und dem Verbraucherwiderstand  $R_V$  ab. Dabei gibt es unter der unendlich großen Zahl der möglichen Werte drei ausgezeichnete Werte:

Die folgende Skizze zeigt die Verteilung des Spannungsverlaufs auf der Leitung, wenn 1/3 des Rechteckimpulses das Kabelende erreicht hat:

1. Bei offenem Ende der Leitung ist das reflektierte Signal gleich dem einfallenden Signal. Beide Signale addieren sich, so dass am Leitungsende die Spannung den Wert  $U_g = 2U_e$  annimmt.
2. Bei Kurzschluss der Leitung ist  $R_V = 0 \Rightarrow \rho = -1$ . Dann ist das reflektierte Signal gleich dem einfallenden Signal, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Die Gesamtspannung am kurzgeschlossenen Ende ist (wie nicht anders zu erwarten) null.
3. Bei reflexionsfreiem Abschluss ist  $R_V = Z \Rightarrow \rho = 0$ . Zur Vermeidung von Reflexionen müssen die Leitungen also mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden; d.h. der Eingangswiderstand des an die Leitung angeschlossenen Gerätes muss gleich dem Wellenwiderstand der Leitung sein.



**Aufgabe 4:** Welches Verhältnis besteht zwischen den Durchmessern des Kabelmantels und des Innenleiters damit der Wellenwiderstand eines Koaxialkabels  $50 \Omega$  beträgt? Als Isolationsmaterial besitze das Kabel Polyäthylen. ( $\epsilon_r = 2.3$ )

#### 4.1.4 Dispersion

Im Abschnitt 3.1.2 wird für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle die Beziehung

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

angegeben. Da  $\epsilon_r$  aber eine Funktion der Frequenz ist, ergibt sich für die Wellen auf dem Koaxialkabel keine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit;  $v$  wird ebenfalls frequenzabhängig. Dies bezeichnet man als *Dispersion*.

## 4.2 Mathematische Beschreibung einer Welle

Die einfachste Form einer Welle, die ebene monochromatische oder harmonische Welle wird bekanntlich durch die Funktion

$$y = a \cdot \sin 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (11)$$

beschrieben. Diese Gleichung bringt die für eine Welle charakteristische Eigenschaft zum Ausdruck, zeitlich und räumlich periodisch zu sein, da sowohl  $x$  als auch  $t$  in das Argument der periodischen Funktion eingehen.

**Aufgabe 5:** Welche Bedeutung hat die Konstante  $c$ . Unter Berücksichtigung der zeitlichen und räumlichen Periodizität ist aus Gl. 11 die Gleichung  $c = \lambda \cdot \nu$  herzuleiten. (evtl. Schwierigkeiten lassen sich mit Hilfe von SCHPOLSKI, Atomphysik § 132 beseitigen!)

### 4.2.1 Schwebungen

Überlagern sich zwei Wellen der Form

$$y_1 = a \sin 2\pi\nu_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (12)$$

$$y_2 = a \sin 2\pi\nu_2 \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (13)$$

also mit gleicher Amplitude  $a$  aber verschiedenen Frequenzen  $\nu_1$ , dann ergibt dies:

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cos \left[ 2\pi \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \right] \sin \left[ 2\pi \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right] \quad (14)$$

**Aufgabe 6:** Gl. 14 ist mit Hilfe der Additionstheoreme der Winkelfunktionen nachzuprüfen.

Für kleine Frequenzunterschiede, also  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 \ll \nu_1, \nu_2$  erhält man aus Gl. 14 eine Schwebung:

$$y = 2a \cos \left[ 2\pi\nu^* \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \sin \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\nu^* := \frac{\Delta\nu}{2}$$

$$\nu := \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

Betrachtet man nun den ersten Faktor und berücksichtigt die räumliche Periodizität der Welle, so erhält man:

$$\cos \left[ 2\pi\nu^* \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] = \cos \left[ 2\pi\nu^* \left( t - \frac{x + \lambda^*}{c} \right) \right]$$

Diese Beziehung ist erfüllt, falls

$$2\pi v^* \frac{\lambda^*}{c} = 2\pi$$

oder  $v^* \lambda^* = c$  gilt.

Das bedeutet also, dass sich die Schwebung mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet, wie die beiden sie erzeugenden Einzelwellen.

#### 4.2.2 Stehende Wellen

Überlagert man zwei Wellen der Form

$$y_1 = a \sin 2\pi v \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

$$y_2 = b \sin 2\pi v \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

dann erhält man für  $a = b$  eine stehende Welle. Für  $a \neq b$  erhält man eine Wellenerscheinung, deren Einhüllende Maxima und Minima aufzeigen.

**Aufgabe 7:** Man berechne  $y_1 + y_2$  für  $a \neq b$  und gebe an, wie die Höhe der Maxima und Minima der Einhüllenden von  $a$  und  $b$  abhängt.

#### 4.2.3 Gruppengeschwindigkeit

Bei den bisherigen Überlegungen gingen wir davon aus, dass sich die Wellen aus Gl. 12 und Gl. 13 mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten; d.h. also, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit als unabhängig von der Wellenlänge angesehen wurde. Im Allgemeinen ist  $c$  jedoch eine Funktion von  $\lambda$ . Dies wird als Dispersion bezeichnet. Gl. 12 und Gl. 13 gehen dann über in

$$y_1 = a \sin \left[ 2\pi \frac{c_1 \cdot t - x}{\lambda_1} \right] \quad (15)$$

$$y_2 = a \sin \left[ 2\pi \frac{c_2 \cdot t - x}{\lambda_2} \right] \quad (16)$$

**Aufgabe 8:** Leiten Sie unter der Berücksichtigung dass  $\Delta c = c_1 - c_2$  und  $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  kleine Größen sein sollen, folgendes Ergebnis her:

$$y = 2a \cos \left[ \pi \cdot \left( \frac{\lambda_1 \Delta c - \Delta \lambda c_1}{\lambda_1^2} t + \frac{\Delta \lambda x}{\lambda_1^2} \right) \right] \sin \left[ 2\pi \cdot \frac{c_1 t - x}{\lambda_1} \right] \quad (17)$$

Zeigen Sie die Äquivalenz von Gl. 14 und Gl. 17 für  $c = c_1 = c_2$ .

Die Geschwindigkeit dieser Gruppen ist aber nicht mehr dieselbe wie die Phasengeschwindigkeit  $c$  der Einzelwellen. Den Betrag erhält man, indem das Argument der cos-Funktion gleich Null gesetzt wird:

$$(\lambda \Delta c - \Delta \lambda c)t + \Delta \lambda x = 0$$

$$c' = \frac{x}{t} = c - \lambda \frac{\Delta c}{\Delta \lambda} \quad \Delta \lambda \rightarrow 0$$

$$c' = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

Die Gleichung zeigt, wie die Gruppengeschwindigkeit  $c'$  aus der Phasengeschwindigkeit berechnet wird. Insbesondere erkennt man, dass die Gruppengeschwindigkeit in dispersionsfreien Medien ( $c = \text{const.}$ ) gleich der Phasengeschwindigkeit ist.

### 4.3 Generator für den Modelversuch zu stehenden Wellen



Abb. 9 Netzgerät zur Erzeugung stehender Wellen