Messungen mit Ultraschall

1 Vorbereitung

1.1 Schall und Ultraschall
Lit.: Kohlrausch "Praktische Physik", 2.10.1-2; Demtröder "Experimentalphysik 1", 11.14

1.2 Reflexion und Brechung von Wellen
Lit.: Demtröder 11.11.4

1.3 Längenmessung, B-Bild-Verfahren
Lit.: Demtröder 11.14.7

1.4 Gerätebeschreibung: gampt Ultraschallechoskop GS200
Lit.: Homepage Physikalisches Grundpraktikum Uni Würzburg

1.5 Schallausbreitung in Festkörpern
Lit.: Meyer/Neumann "Physikalische und Technische Akustik", 1.3.1; Demtröder 11.9.5.1-3, 11.9.5.6

1.6 Elastizitätskonstanten
Lit.: Hunklinger "Festkörperphysik", 6.1; Gross/Marx "Festkörperphysik", 4.6; Brown "The Physics of Solids", 5.10

1.7 Debye-Sears-Effekt
Lit.: Kohlrausch, 2.10.3.7, Gerthsen 4.6.1e

1.8 Rayleigh-Wellen
Lit.: Meyer/Neumann, 1.3.3

1.9 **Hausaufgabe**
Lit.: Anhang 3.2

2 Aufgaben

2.0 Inbetriebnahme

Nehmen Sie das *Echoskop GS200* sowie den PC am Arbeitsplatz in Betrieb und öffnen Sie das Programm *GS-EchoView*. Machen Sie sich mit den Funktionalitäten des Echoskops vertraut, insbesondere dem A-Scan des Ultraschall-Signals, den Einstellungen für Transmissions- und Reflexionsmessungen, den konstanten Verstärkungsreglern für Input und Output und der zeitabhängigen Verstärkung *time-gain control* (TGC). Bei jeder Messung sind die Ultraschallsonden mit Ultraschallgel an das Präparat anzukoppeln (warum?).

Bei einigen der folgenden Versuchsteile kann es sinnvoll sein, Screenshots des Signals zu machen. Dafür ist es empfehlenswert, *nicht* die Print-Funktion des Programms zu verwenden. Drücken Sie stattdessen "DRUCK" auf der Tastatur, öffnen Sie Paint und fügen Sie das Bild über Strg+V ein. Speichern nicht vergessen!

2.1 Messung der Schallgeschwindigkeit

Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit von Polyacryl mit Hilfe der drei Zylinder am Arbeitsplatz. Verwenden Sie dafür den A-Scan des Echoskops mit der Cursorfunktion. Wo muss der Cursor angelegt werden? Überlegen Sie sich, wie sie möglichst viele Messpunkte erhalten können. Tritt Dispersion auf? Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der Herstellerangabe.

2.2 Absorption

Als nächstes soll die Absorption von Ultraschall untersucht werden. Messen Sie dafür die Amplitude der Ultraschallwellen an den ausliegenden PVC-Zylindern in Reflexion und bestimmen Sie den Absorptionskoeffizienten λ. Führen Sie die Messung für alle drei Frequenzen durch und diskutieren Sie mögliche Ursachen für die Frequenzabhängigkeit von λ.

2.3 Längenmessung und B-Bild

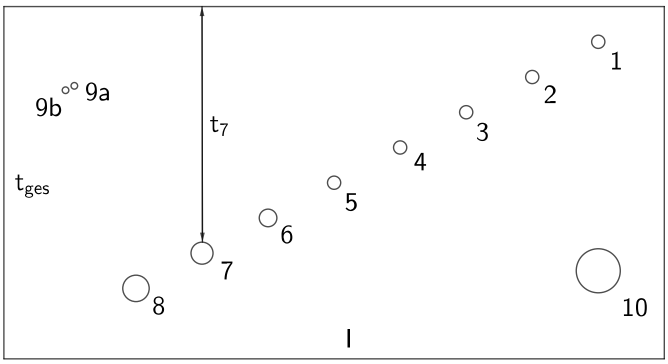

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Testblocks

Am Arbeitsplatz befindet sich ein Polyacryl-Testblock mit einigen Bohrungen. Sein Aufbau ist schematisch in Abb. 1 dargestellt. Vermessen Sie den Block sowohl durch eine Laufzeitmessung mit Ultraschall sowie von Hand mit einem Messschieber. Bestimmen Sie dazu sowohl die Gesamtmaße sowie die Tiefen t_i der Bohrungen, wie in der Skizze dargestellt. Überlegen Sie sich, welche Frequenz hierfür sinnvoll ist. Diskutieren Sie eventuelle Abweichungen zwischen den beiden Messungen.

Nehmen Sie zusätzlich ein B-Bild des Testblocks auf.

2.4 Auflösungsvermögen

Untersuchen Sie das Auflösungsvermögen der Ultraschallwellen für verschiedene Frequenzen. Definieren Sie sich dafür ein sinnvolles Maß für die Pulsbreite und messen Sie diese, indem Sie das reflektierte Signal an einer Bohrung des Testblocks aus Abb. 1 betrachten.

Versuchen Sie daraufhin, mit allen drei Frequenzen den vertikalen Abstand der Löcher 9a und 9b zu bestimmen, also $\Delta t = t_{9b} - t_{9a}$. Unter welchen Annahmen ist hier eine Peak-to-Peak-Messung legitim? Bei welchen Frequenzen ist es möglich, die beiden Löcher zu trennen? Wie hängt dies mit der Pulsbreite zusammen?

2.5 Spektrale Methoden

Das Echoskop kann neben dem A-Scan auch eine Fast Fourier Transform (FFT) und ein Cepstrum des Signals durchführen. Bei der FFT handelt es sich um einen verbesserten Algorithmus zur Berechnung der diskreten Fourier-Transformation. Das Cepstrum $C(t)$ des Signals $g(t)$ ist definiert durch

$$C(t) = \mathcal{F}^{-1}[\log \mathcal{F}[g(t)]], \tag{1}$$

wobei $\mathcal{F}$ eine Fourier-Transformation ist.

Machen Sie sich mit diesen spektralen Methoden vertraut. Betrachten Sie dafür das Reflexionsbild eines Signals an der ausliegenden Polyacrylscheibe. Bestimmen Sie dessen Dicke sowohl durch Laufzeitmessung, als auch über die spektralen Methoden und vergleichen Sie die Ergebnisse mit einer Messung mit einem Messschieber. Beachten Sie dabei, dass die FFT und das Cepstrum nur für den Bereich zwischen den Cursorn des A-Scans durchgeführt werden.

In der FFT erkennen Sie viele äquidistante Peaks, welche von der Dicke der gemessenen Scheibe abhängig sind. Aus dem Abstand $\Delta\nu$ zwischen zwei benachbarten Peaks ergibt sich die Laufzeit eines Reflexionspulses in der Scheibe zu

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{2}$$

Beim Cepstrum sind nur wenige prominente Peaks zu erkennen. Diskutieren Sie anhand dessen die Funktionsweise des Cepstrums und überlegen Sie sich, wie Sie die Dicke des Blocks daraus bestimmen können.

2.6 Schallausbreitung in Festkörpern

2.6.1 Schallgeschwindigkeit in Wasser

Im Folgenden benötigen Sie die Schallgeschwindigkeit in Wasser. Um diese zu bestimmen, füllen Sie die Wanne mit Wasser auf und platzieren Sie ein verschiebbares Hindernis in den Laufweg des Ultraschalls, an dem die Wellen reflektiert werden. Messen Sie die Laufzeit für unterschiedliche Positionen des Hindernisses und bestimmen Sie daraus die Schallgeschwindigkeit in Wasser. Diskutieren Sie mit Ihrem/Ihrer Betreuer*in mögliche äußere Einflusse auf die Schallgeschwindigkeit. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit passenden Literaturwerten.

2.6.2 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

In Festkörpern bilden sich neben longitudinalen auch transversale Wellen aus. Bestimmen Sie für Aluminium und Kupfer jeweils die longitudinale und transversalen Schallgeschwindigkeiten. Verwenden Sie dafür das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_F}{c_W} \tag{3}$$

für die Grenzfläche zwischen Wasser (c_W, Winkel α) und einem Festkörper (c_F, Winkel β) für die folgenden beiden Fälle:

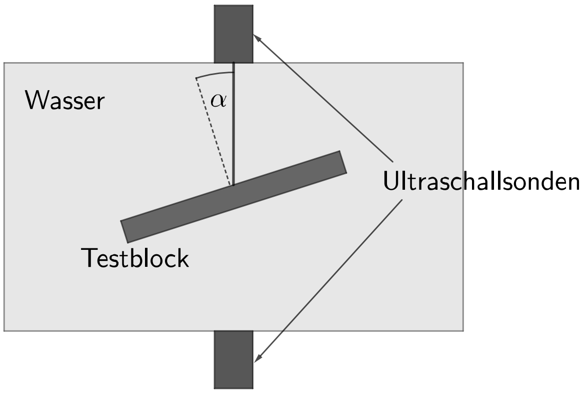

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Festkörpern.

- Totalreflexion: $\beta = 90°$. Totalreflexion tritt sowohl für longitudinale als auch transversale Wellen auf.
- Maximale Transmission: $\beta = 45°$. Bei longitudinalen Wellen ist die Transmission für $\alpha = \beta = 0°$ maximal, sodass sich mit dieser Methode nur für Transversalwellen die Schallgeschwindigkeit bestimmen lässt.

Verwenden Sie den Aufbau aus Abb. 2 zur Bestimmung der jeweiligen Winkel α. Hierzu sind die Scheiben aus Aluminium und Kupfer in die Drehscheibe einzuspannen.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den theoretischen Werten, die Sie in der Hausaufgabe in Anhang 3.2 bestimmt haben. Beachten Sie dabei die Winkelabhängigkeit. Die Dichten der beiden Scheiben sind gegeben durch

$$\rho_{\mathrm{Al}} = 2{,}6795\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \qquad \rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}899\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Sie dürfen diese Werte als fehlerfrei annehmen.

2.7 Rayleigh-Wellen

In diesem Versuchsteil werden Oberflächenwellen, sogenannte Rayleigh-Wellen, untersucht. Verwenden Sie dazu die 1 MHz Sonden, bestreichen Sie diese mit Ultraschallgel und stecken Sie dann die Kammaufsätze auf die Sonden. Außerdem müssen die Kämme für alle Messungen mit Gel an das Metall angekoppelt werden. Für diesen Versuch liegt ein langer Aluminiumblock bereit, der auf einigen Seiten Einkerbungen aufweist.

Messen Sie zuerst die Schallgeschwindigkeit der Rayleigh-Wellen auf einer Seite ohne Einkerbungen.

Untersuchen Sie als nächstes, wie Rayleigh-Wellen von unterschiedlich tiefen Einkerbungen abgedämpft werden. **Dieser Versuchsteil erfordert eine sehr sorgfältige Durchführung.** Um eine reproduzierbare Messung zu erzeugen, müssen die Sonden so ausgerichtet sein, dass das Signal am Empfänger maximal ist. Wie müssen die Sonden dazu orientiert und platziert sein? Achten Sie darauf, dass der Abstand zwischen Sender und Empfänger bei jeder Einkerbung gleich groß ist und jeweils eine gleiche Menge an Ultraschallgel aufgetragen ist (regelmäßig nachfüllen). Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und diskutieren Sie deren Wert im Vergleich zur Wellenlänge der Rayleigh-Wellen.

Verwenden Sie schließlich die unterschiedlich geformten Einkerbungen auf der anderen Seite des Aluminiumblocks, um den Einfluss der Geometrie von Defekten auf die Absorption zu bestimmen. Achten

Sie wieder auf einen reproduzierbaren Messaufbau. Was können Sie aus Ihren Ergebnissen über die örtliche Intensitätsverteilung der Wellenpakete schließen?

2.8 Debye-Sears-Effekt

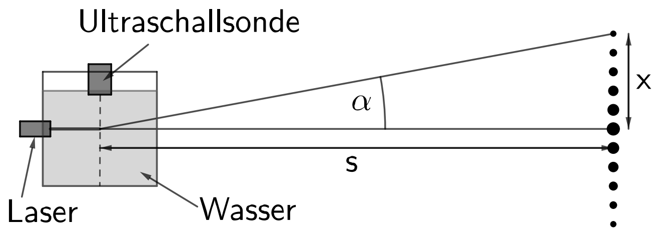

Abbildung 3: Schematischer Aufbau zum Debye-Sears-Effekt

Verwenden Sie den Debye-Sears-Effekt, um über Laser mit bekannter Wellenlänge die Schallgeschwindigkeit in Wasser zu bestimmen. Dafür steht in der Dunkelkammer ein entsprechender Versuchsaufbau bereit, vgl. Abb. 3. Die Ultraschallwellen (Wellenlänge λ_S) erzeugen im Wasser ein Gitter mit Gitterkonstante $g = \lambda_S$, an dem das Laserlicht gebeugt wird. Es gelten die aus der Optik bekannten Beugungsgesetze. Der Schirm wird in großer Entfernung zum Laser platziert, $s \gg x$. Verwenden Sie nun die Maximumsbedingung am Gitter zusammen mit geometrischen Überlegungen, um einen Ausdruck für λ_S zu erhalten. Berechnen Sie daraus die Schallgeschwindigkeit.

Führen Sie diese Messung für alle drei vorhandenen Laser sowie für den Frequenzbereich 1 bis 12 MHz durch und führen Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll zu einem Gesamtergebnis zusammen. Begründen Sie etwaige Annahmen, die Sie dabei machen müssen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit passenden Literaturwerten sowie ggf. mit Ihrem Ergebnis aus Versuchsteil 2.6.1.

3 Anhang

3.1 Ausbreitung von Schallwellen in Festkörpern

In Festkörpern kann sich Ultraschall neben Longitudinal- auch durch Transversalwellen ausbreiten. Die transversalen Wellen haben eine andere Schallgeschwindigkeit als die longitudinalen und können auch winkelabhängig sein. Um dies genauer zu verstehen, müssen wir uns etwas mit Elastizitätstheorie beschäftigen. Diese baut auf auf dem allgemeinen Hooke'schen Gesetz,

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl} e_{kl}. \tag{4}$$

Dabei sind σ_{ij} und e_{ij} die Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors. Die c_{ijkl} sind die Komponenten des Elastizitätstensors. Nur wenige dieser $3^4 = 81$ Komponenten sind unabhängig. Vielmehr besitzt der Elastizitätstensor einige Symmetrien,

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}, \qquad c_{ijkl} = c_{klij}, \tag{5}$$

die es uns erlauben, eine vereinfachte Notation (Voigtsche Notation) zu verwenden:

$$xx \to 1, \quad yy \to 2, \quad zz \to 3, \quad yz \to 4, \quad zx \to 5, \quad xy \to 6 \tag{6}$$

Dadurch reduziert sich c_{ijkl} zu einem Tensor zweiter Stufe, c_{ij}. Wenn wir mit c_{ij} nur kubische Kristalle beschreiben wollen, vereinfacht sich der Elastizitätstensor noch weiter. In diesem Fall gibt es nur drei unabhängige Komponenten: c_{11}, c_{12} und c_{44}.

Mit diesem Vorwissen können wir jetzt die Ausbreitung von Schallwellen in kubischen Festkörpern betrachten. Die allgemeine Wellengleichung für die Auslenkung u_i in die x_i-Richtung lautet

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{jkl} c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{7}$$

In der Voigtschen Notation reduziert sich das folgende System an DGLs:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right), \tag{8}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} \right), \tag{9}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} \right). \tag{10}$$

Diese DGLs bilden die Basis für die folgenden Betrachtungen.

Material	c_{11} [10^{11} N/m^2]	c_{12} [10^{11} N/m^2]	c_{44} [10^{11} N/m^2]
Kupfer	1,684	1,214	0,754
Aluminium	1,068	0,607	0,282

Tabelle 1: Literaturwerte für die elastischen Konstanten von Kupfer und Aluminium.

3.2 Hausaufgabe

Bestimmen Sie ausgehend von (8)-(10) die Schallgeschwindigkeiten im Festkörper. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(a) Machen Sie zuerst den Ansatz einer ebenen Welle,

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{A}\,\exp\Big(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\vec{x})\Big)\,, \tag{11}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ und setzen Sie diesen in (8)-(10) ein.

(b) Betrachten Sie die resultierenden Gleichungen als ein lineares Gleichungssystem für $\vec{A}$. Dieses lässt sich in der Form $M\vec{A} = \vec{0}$ schreiben. Bestimmen Sie die Matrix M.

(c) Legen Sie Ihr Koordinatensystem nun so, dass $\vec{k}$ in der xy-Ebene liegt. Setzen Sie also

$$k_x = k\cos\phi, \qquad k_y = k\sin\phi, \qquad k_z = 0 \tag{12}$$

und setzen Sie diese Vereinfachung in die Matrix M ein. M sollte dann die Struktur

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix} \tag{13}$$

haben. Aus der Mathematik wissen Sie, dass die DGL nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn $\det M = 0$. Andererseits ist die Determinante das Produkt der Eigenwerte, $\det M = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Die Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist also äquivalent zu dem Verschwinden der Eigenwerte. Da die λ_i von ω, k und ϕ abhängen, können Sie aus der Bedingung

$$\lambda_i(\omega, k, \phi) = 0 \tag{14}$$

eine Beziehung zwischen ω und k (Dispersionsrelation) herleiten. Daraus erhalten Sie wiederum wegen $c_S = \omega/k$ die Schallgeschwindigkeiten.

(e) Überzeugen Sie sich davon, dass $M_{33} = \lambda_3$ und bestimmen Sie die zugehörige Schallgeschwindigkeit.

(f) Um die übrigen beiden Eigenwerte zu bestimmen, können Sie sich auf den oberen Block in (13) beschränken, da die Eigenwerte einer blockdiagonalen Matrix gerade die Eigenwerte der Blöcke sind. Bestimmen Sie eine geschlossene Form für die übrigen beiden Schallgeschwindigkeiten. Dafür dürfen Sie Mathematica o.Ä. verwenden.

(g) Stellen Sie in einem Polarplot die Winkelabhängigkeit $c_S(\phi)$ der Schallgeschwindigkeiten in Aluminium und Kufer dar. Welche Ihrer drei Lösungen beschreibt die longitudinale, welche die transversalen Moden? Warum definiert man die Größe

$$a = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \tag{15}$$

als Maß für die Anisotropie? Berechnen Sie a für Aluminium und Kupfer. Wie spiegelt sich die relative Größe von a_{Cu} und a_{Al} in Ihrem polaren Plot wieder?

Diese Hausaufgabe ist im Vorfeld der Versuchsdurchführung zu bearbeiten. Eine Vertrautheit mit der zu Grunde liegenden Mathematik wird die Durchführung und Auswertung von Versuchsteil 2.6 erheblich erleichtern. Falls Sie bei der Bearbeitung Probleme haben, diskutieren Sie diese am Versuchstag mit Ihrem/Ihrer Betreuer*in. Sie sollten allerdings glaubhaft machen können, dass Sie sich an der Aufgabe versucht haben. In jedem Fall sind die Schlussfolgerungen aus Aufgabenteil (f) mit Ihrem/Ihrer Betreuer*in zu diskutieren.