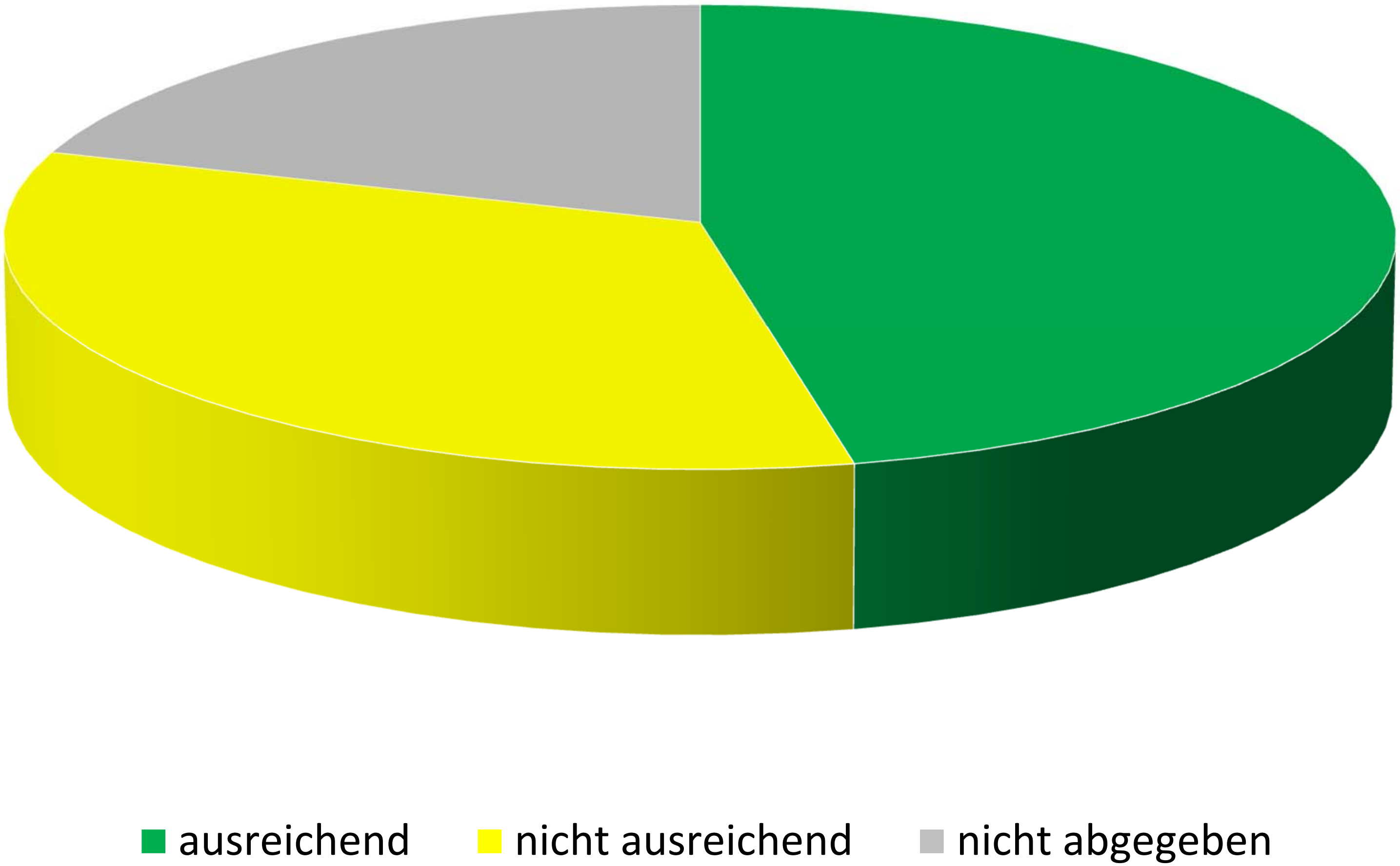
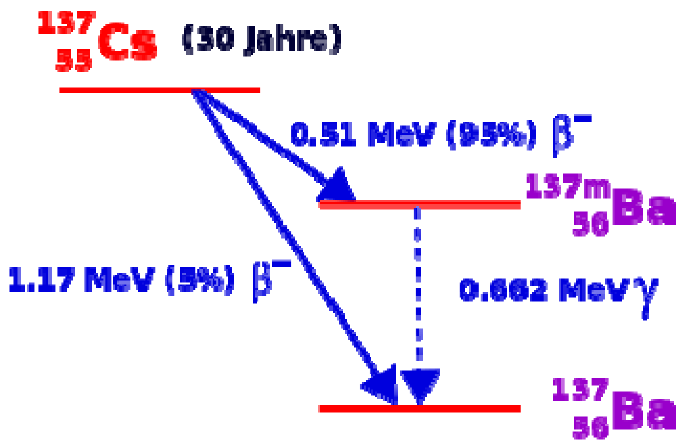
Ergebnis Übung 4



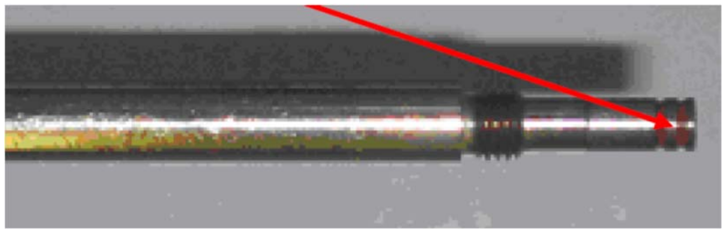
Korrigiertes Übungsblatt

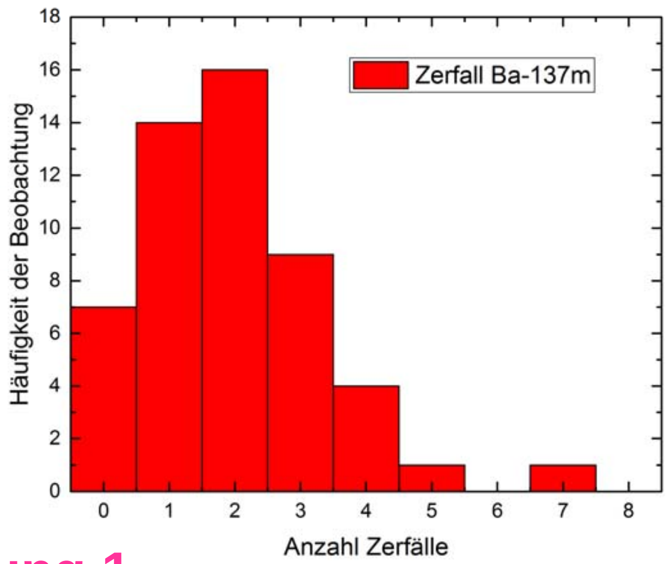
Zeit (s)	Anzahl Zerfälle
20	27
40	25
60	23
80	22
100	19
120	16
140	16
160	15
180	15
200	9



Daten seien Poissonverteilt:

Wiederhole Messung für feste Messzeit:

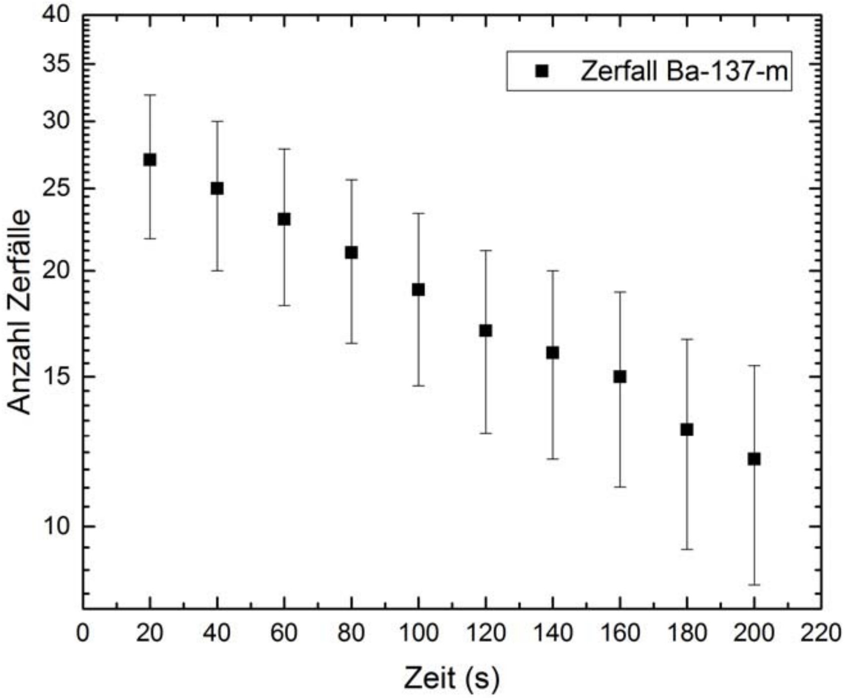




Siehe auch Übung 1

Korrigiertes Übungsblatt

Linearisiere Daten:



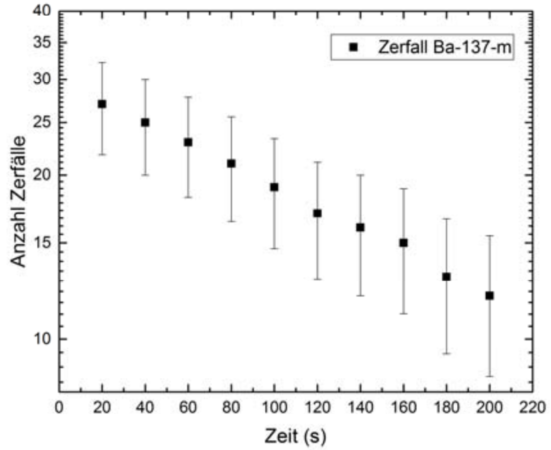
Direkt ersichtlich:

Die Streuung der Bestwerte passt nicht zu den Fehlerbalken!

Wie transformiere ich die Fehlerbalken?

Korrigiertes Übungsblatt

Wie transformiere ich die Fehlerbalken?



Mehrere Möglichkeiten:

1.) Die Genauigkeit der Messung darf nicht besser oder schlechter werden, wenn die Darstellung der Daten geändert wird. Ansatz: **Behalte relative Fehler**

2.) Aus praktischen Gründen wird häufig linearisiert:

Transformation: $y_i \rightarrow f(y_i)$ wie muss $\sigma_i \rightarrow \sigma_i^{trans}$?

Taylor: $$f(y_i \pm \sigma_i) = f(y_i) \pm \boxed{\frac{\partial f(y_i)}{\partial y}\sigma_i} \rightarrow \sigma_i^{trans}$$

Beide Verfahren sind nicht der Weisheit letzter Schluss

Dazu später mehr bei der Erstellung von Modellen!

Zusammenhang der Verteilungen

Bernoulli - Verteilung

diskret

Parameter: n=1, p

Binomial-Verteilung

diskret

Parameter: n, p

Bi (x)

$n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow 0$

Poisson - Verteilung

diskret

Parameter $\mu = \sigma^2$

P(x)

$n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow$ const.

Gauß - Verteilung

Normal - Verteilung

kontinuierlich

Parameter: μ, σ

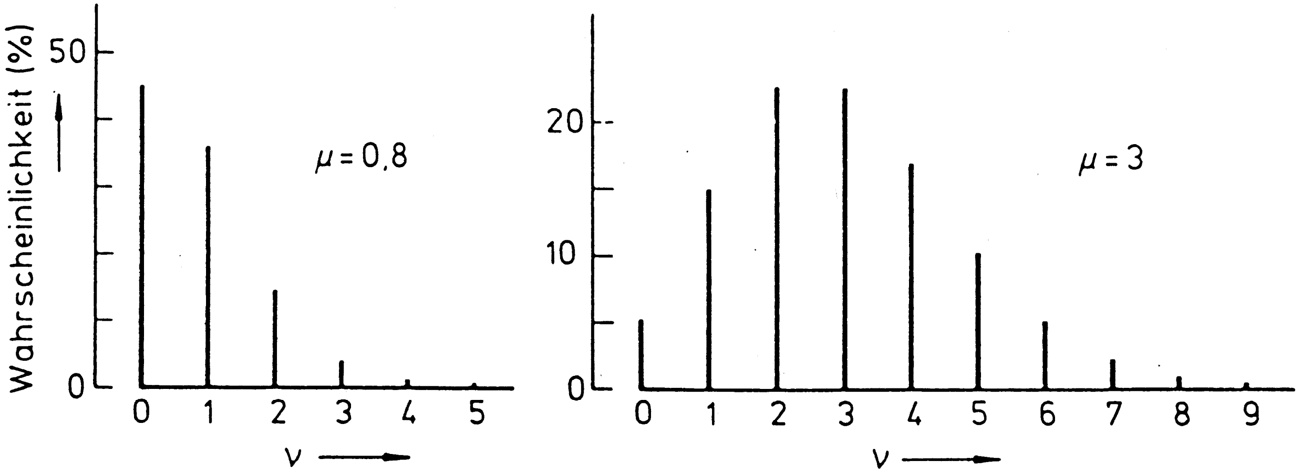
G (x)

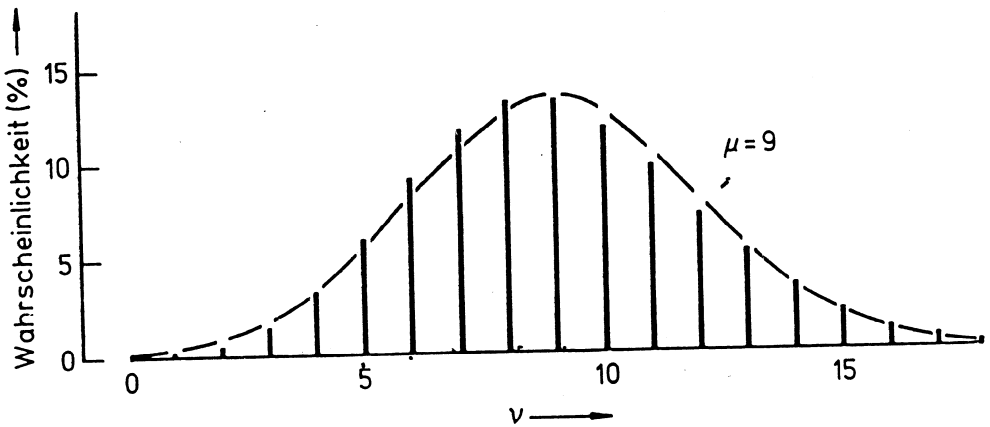
$\mu \rightarrow \infty$

$\mu = n\,p$

Korrigiertes Übungsblatt

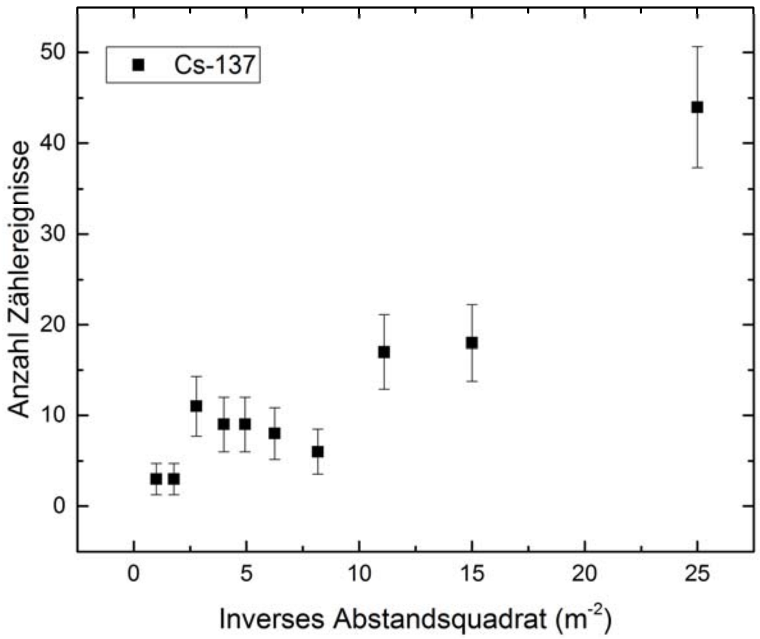
Rückblick Verteilungen: Was bedeutet das in der Praxis?



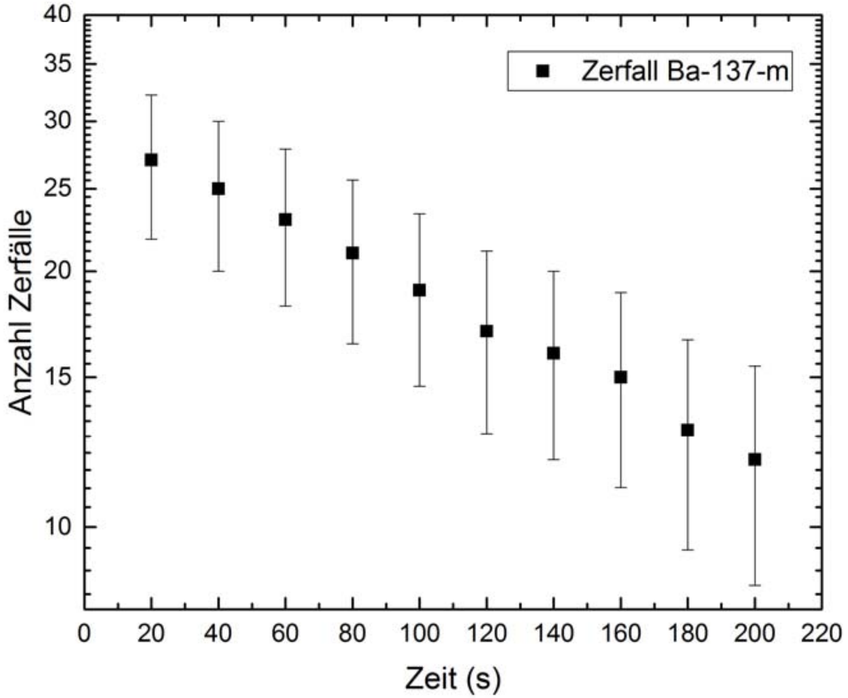


Korrigiertes Übungsblatt

Beispiel aus der Vorlesung:



Übungsblatt:



Für Werte größer 9 ist die Streuung immer gut durch Gauß beschrieben.

Das stellt keinen Widerspruch zur Beobachtung, dass die Daten einer Poissonverteilung folgen, dar!

Regression III:

Anpassung mit nichtlinearen Funktionen

Teil A: Orthogonale Funktionen und lineare Koeffizienten

Wiederholung

Wir wollen unsere Messwerte anpassen an Funktionen des Typs:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x)$$

Forderung: Die $f_k(x)$ müssen unabhängig von den Koeffizienten a_k sein und untereinander linear unabhängig sein.

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei *N* Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2 \right\}$$

Die beste Anpassung liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Das ist der Fall, wenn der Exponent

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

minimal wird.

Wiederholung

Wieder:

Anpassung der Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

Dazu:

$$\frac{\partial}{\partial a_l} \chi^2 = \frac{\partial}{\partial a_l} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right] = 0$$

für l = 1,2, …,m

Regression mit linear unabhängigen Funktionen

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i)$$

Forderungen: Die $f_k(x)$ müssen unabhängig von den Koeffizienten a_k sein, und linear unabhängig.

Auch dann lassen sich z.B. nach dem Determinantenverfahren die konkreten Lösungen für die Bestwerte der Koeffizienten bestimmen.

Summengrenzen lassen wir ab hier wieder weg, alle Summen laufen über unsere Datenpunkte.

Analytisch?

Regression mit linear unabhängigen Funktionen

Ergibt für m = 3:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Bei geeigneter Energie (ca. 4,5 MeV) werden diese von den Kernen eingefangen.
Das entstehende ^{14}N relaxiert Überschussenergie durch Emission von γ-Quanten

Wir beobachten folgende Winkelverteilung in der Emission der γ-Quanten:

Winkel (Grad)	Zählereignisse
0	1400
10	1386
20	1130
30	1045
40	971
50	862
60	819
70	808
80	862
90	829
100	824
110	839
120	819
130	901
140	925
150	1044
160	1224

Nehmen wir an, der Fehler sei rein statistisch durch Schwankungen auf Detektor erklärt.

Dann können wir diesen als Poissonfehler auffassen.

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Bei geeigneter Energie (ca. 4,5 MeV) werden diese von den Kernen eingefangen.
Das entstehende ^{14}N relaxiert Überschussenergie durch Emission von γ-Quanten

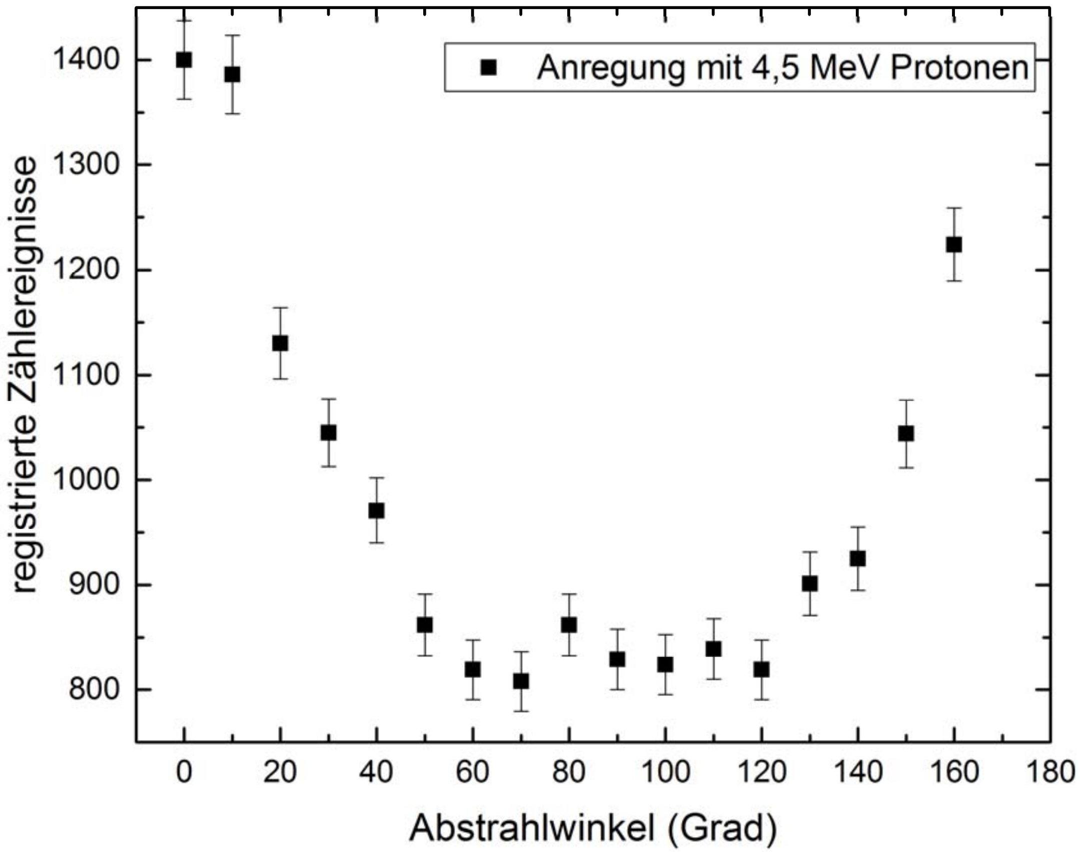
Wir beobachten folgende Winkelverteilung in der Emission der γ-Quanten:

Winkel (Grad)	Zählereignisse	Messunsicherheit
0	1400	37,4165739
10	1386	37,2290209
20	1130	33,6154726
30	1045	32,3264598
40	971	31,1608729
50	862	29,3598365
60	819	28,618176
70	808	28,4253408
80	862	29,3598365
90	829	28,7923601
100	824	28,7054002
110	839	28,9654967
120	819	28,618176
130	901	30,016662
140	925	30,4138127
150	1044	32,3109888
160	1224	34,9857114

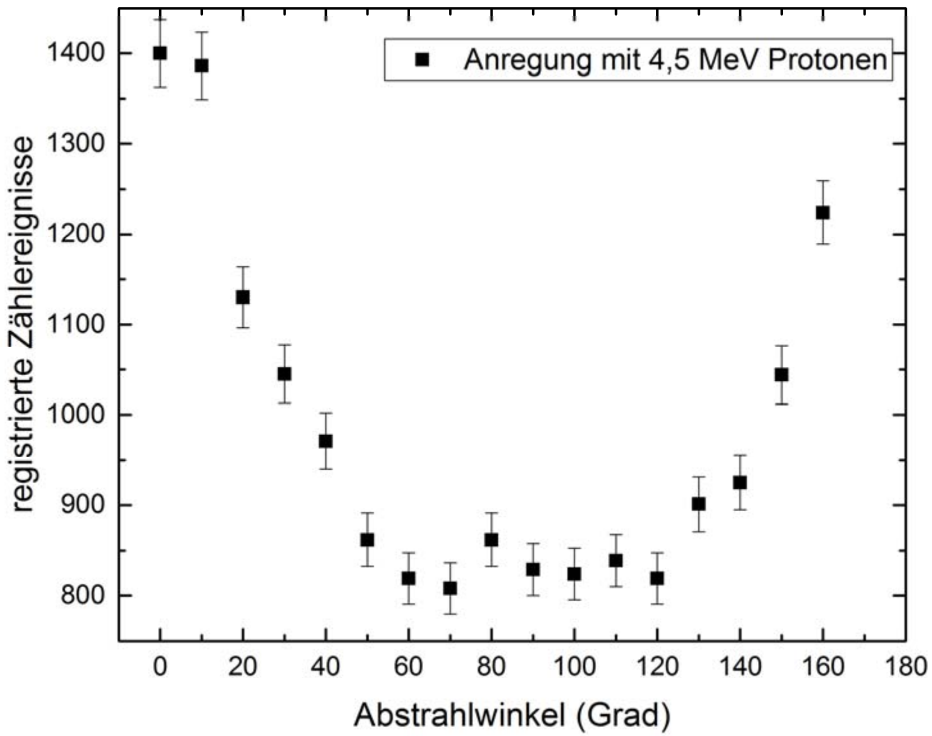
Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Bei geeigneter Energie (ca. 4,5 MeV) werden diese von den Kernen eingefangen.
Das entstehende ^{14}N relaxiert Überschussenergie durch Emission von γ-Quanten

Wir beobachten folgende Winkelverteilung in der Emission der γ-Quanten:



Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen



Theoretisch wird eine Winkelverteilung vorhergesagt, die durch gerade Legendre-Polynome beschrieben ist.

$$y(x) = \sum_{L=1}^{m-1} a_L P_L(x)$$

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Theoretisch wird eine Winkelverteilung vorhergesagt, die durch gerade Legendre-Polynome in vierter Ordnung beschrieben ist.

$$y(x) = \sum_{L=1}^{m-1} a_L P_L(x)$$

Mit $x = \cos\Theta$ und $P_L(x)$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_2(x) = 0{,}5(3x^2 - 1)$$

$$P_1(x) = x \qquad P_3(x) = 0{,}5(5x^2 - 3x)$$

Weiter geht es nach folgender Rekursionsvorschrift:

$$P_L(x) = \frac{1}{L}[(2L-1)xP_{L-1}(x) - (L-1)P_{L-2}(x)]$$

Bestimme beste Anpassung an Daten

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Zunächst Annahme, dass Theorie stimmt. Dann müssen wir anpassen:

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x) + a_4 P_4(x)$$

Mit $x = \cos\Theta$ und

$$P_0(x) = 1; \qquad P_2(x) = 0{,}5(3x^2 - 1); \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

Regression mit linear unabhängigen Funktionen

Ergibt für m = 3:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Mit $x = \cos\Theta$: $P_0(x) = 1 = f_1(x)$; $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = f_3\ (x)$;

$P_2(x) = 0{,}5(3x^2 - 1) = f_2\ (x)$;

Ergibt für in unserem konkreten Fall:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Sieht sperrig aus, ist im Kern aber nicht kompliziert. Wir führen es einmal mit Hilfe eines Tabellenkalkulators vor. In der Praxis wird man eher einen Algorithmus bemühen.

Definiere zunächst alle Ausgangsgrößen:

	A	B	C	D	E	F
1	Messung		Winkel	x=cos(Winkel)	y	Messfehler
2	1		0	1	1400	37,4165739
3	2		10	0,984807753	1386	37,2290209
4	3		20	0,939692621	1130	33,6154726
5	4		30	0,866025404	1045	32,3264598
6	5		40	0,766044443	971	31,1608729
7	6		50	0,64278761	862	29,3598365
8	7		60	0,5	819	28,618176
9	8		70	0,342020143	808	28,4253408
10	9		80	0,173648178	862	29,3598365
11	10		90	6,12574E-17	829	28,7923601
12	11		100	-0,173648178	824	28,7054002
13	12		110	-0,342020143	839	28,9654967
14	13		120	-0,5	819	28,618176
15	14		130	-0,64278761	901	30,016662
16	15		140	-0,766044443	925	30,4138127
17	16		150	-0,866025404	1044	32,3109888
18	17		160	-0,939692621	1224	34,9857114
19						

Alle Zwischenschritte (hier die Messfehler) werden in Maschinenpräzision mitgenommen.

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Berechne die benötigten Legendre-Polynome:

Mit $x = \cos\Theta$

$$P_0(x) = 1; \qquad P_2(x) = 0{,}5(3x^2 - 1); \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Messung		Winkel	x=cos(Winkel)	y	Messfehler		P0	P2	P4
2	1		0	1	1400	37,4165739		1	1	1
3	2		10	0,984807753	1386	37,2290209		1	0,95476947	0,8532095
4	3		20	0,939692621	1130	33,6154726		1	0,82453333	0,47497774
5	4		30	0,866025404	1045	32,3264598		1	0,625	0,0234375
6	5		40	0,766044443	971	31,1608729		1	0,38023613	-0,31900435
7	6		50	0,64278761	862	29,3598365		1	0,11976387	-0,42753446
8	7		60	0,5	819	28,618176		1	-0,125	-0,2890625
9	8		70	0,342020143	808	28,4253408		1	-0,32453333	-0,00380004
10	9		80	0,173648178	862	29,3598365		1	-0,45476947	0,26590161
11	10		90	6,12574E-17	829	28,7923601		1	-0,5	0,375
12	11		100	-0,173648178	824	28,7054002		1	-0,45476947	0,26590161
13	12		110	-0,342020143	839	28,9654967		1	-0,32453333	-0,00380004
14	13		120	-0,5	819	28,618176		1	-0,125	-0,2890625
15	14		130	-0,64278761	901	30,016662		1	0,11976387	-0,42753446
16	15		140	-0,766044443	925	30,4138127		1	0,38023613	-0,31900435
17	16		150	-0,866025404	1044	32,3109888		1	0,625	0,0234375
18	17		160	-0,939692621	1224	34,9857114		1	0,82453333	0,47497774

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Jetzt prüfen wir, welche Summen benötigt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Wir brauchen:

$$\sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_1(x_i) f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_1(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2}$$

$$\sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_2(x_i) f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_1(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2}$$

$$\sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_3(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \qquad \sum \frac{f_2(x_i) f_3(x_i)}{\sigma_i^2}$$

Summengrenzen laufen hier jeweils über
alle Messpunkte

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Das lassen wir unseren Tabellenkalkulator nun auswerten:

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	y*P0/s^2	y*P2/s^2	y*P4/s^2		P0^2/s^2	P2^2/s^2	P4^2/s^2		P0*P2/s^2	P0*P4/s^2	P2*P4/s^2
	1	1	1		0,00071429	0,00071429	0,00071429		0,00071429	0,00071429	0,00071429
	1	0,95476947	0,8532095		0,0007215	0,00065771	0,00052523		0,00068887	0,00061559	0,00058775
	1	0,82453333	0,47497774		0,00088496	0,00060164	0,00019965		0,00072968	0,00042033	0,00034658
	1	0,625	0,0234375		0,00095694	0,0003738	5,2566E-07		0,00059809	2,2428E-05	1,4018E-05
	1	0,38023613	-0,31900435		0,00102987	0,0001489	0,0001048		0,00039159	-0,00032853	-0,00012492
	1	0,11976387	-0,42753446		0,00116009	1,664E-05	0,00021205		0,00013894	-0,00049598	-5,94E-05
	1	-0,125	-0,2890625		0,001221	1,9078E-05	0,00010202		-0,00015263	-0,00035295	4,4118E-05
	1	-0,32453333	-0,00380004		0,00123762	0,00013035	1,7872E-08		-0,00040165	-4,703E-06	1,5263E-06
	1	-0,45476947	0,26590161		0,00116009	0,00023992	8,2023E-05		-0,00052757	0,00030847	-0,00014028
	1	-0,5	0,375		0,00120627	0,00030157	0,00016963		-0,00060314	0,00045235	-0,00022618
	1	-0,45476947	0,26590161		0,00121359	0,00025099	8,5805E-05		-0,0005519	0,0003227	-0,00014675
	1	-0,32453333	-0,00380004		0,0011919	0,00012553	1,7211E-08		-0,00038681	-4,5293E-06	1,4699E-06
	1	-0,125	-0,2890625		0,001221	1,9078E-05	0,00010202		-0,00015263	-0,00035295	4,4118E-05
	1	0,11976387	-0,42753446		0,00110988	1,5919E-05	0,00020287		0,00013292	-0,00047451	-5,6829E-05
	1	0,38023613	-0,31900435		0,00108108	0,0001563	0,00011001		0,00041107	-0,00034487	-0,00013113
	1	0,625	0,0234375		0,00095785	0,00037416	5,2617E-07		0,00059866	2,245E-05	1,4031E-05
	1	0,82453333	0,47497774		0,00081699	0,00055544	0,00018432		0,00067364	0,00038805	0,00031996
Summe:	17	3,54523053	1,6780405		0,01788492	0,00470132	0,00279581		0,0023014	0,00090765	0,00120236

Und damit werten wir dann unsere Determinanten aus.

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Und damit werten wir dann unsere Determinanten aus.

		0,01788492	0,0023014	0,00090765				0,01788492	17	0,00090765
delta:	1,95566E-07	0,0023014	0,00470132	0,00120236		a2:	260,47938	0,0023014	3,54523053	0,00120236
		0,00090765	0,00120236	0,00279581				0,00090765	1,6780405	0,00279581
		17	0,0023014	0,00090765				0,01788492	0,0023014	17
a0:	907,1746679	3,54523053	0,00470132	0,00120236		a4:	193,66678	0,0023014	0,00470132	3,54523053
		1,6780405	0,00120236	0,00279581				0,00090765	0,00120236	1,6780405

Damit erhalten wir schließlich:

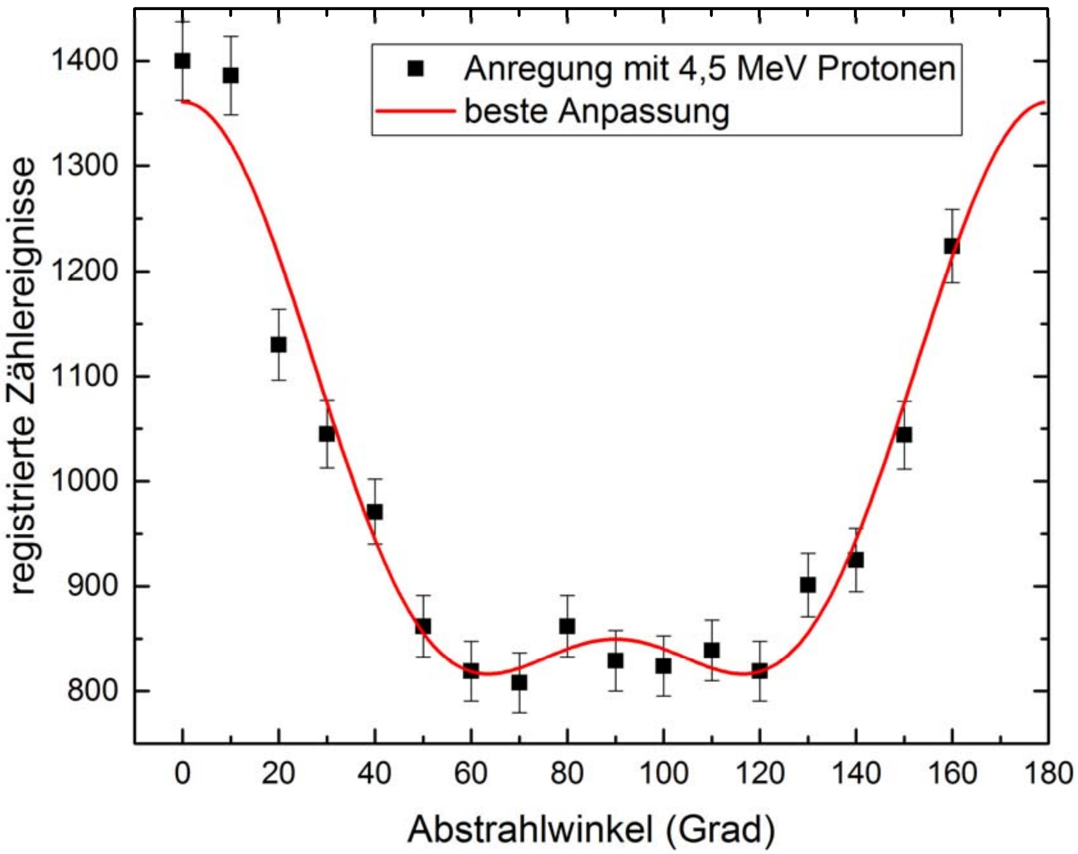
$$a_0 = 907{,}17$$
$$a_2 = 260{,}48$$
$$a_3 = 193{,}67$$

Die fünf Stellen sind im Moment Willkür und haben keine physikalische Bedeutung. Eine sinnvolle Stellenzahl können wir erst festlegen, wenn wir eine Fehleranalyse durchgeführt haben.

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Im Ergebnis haben wir folgende Anpassung:

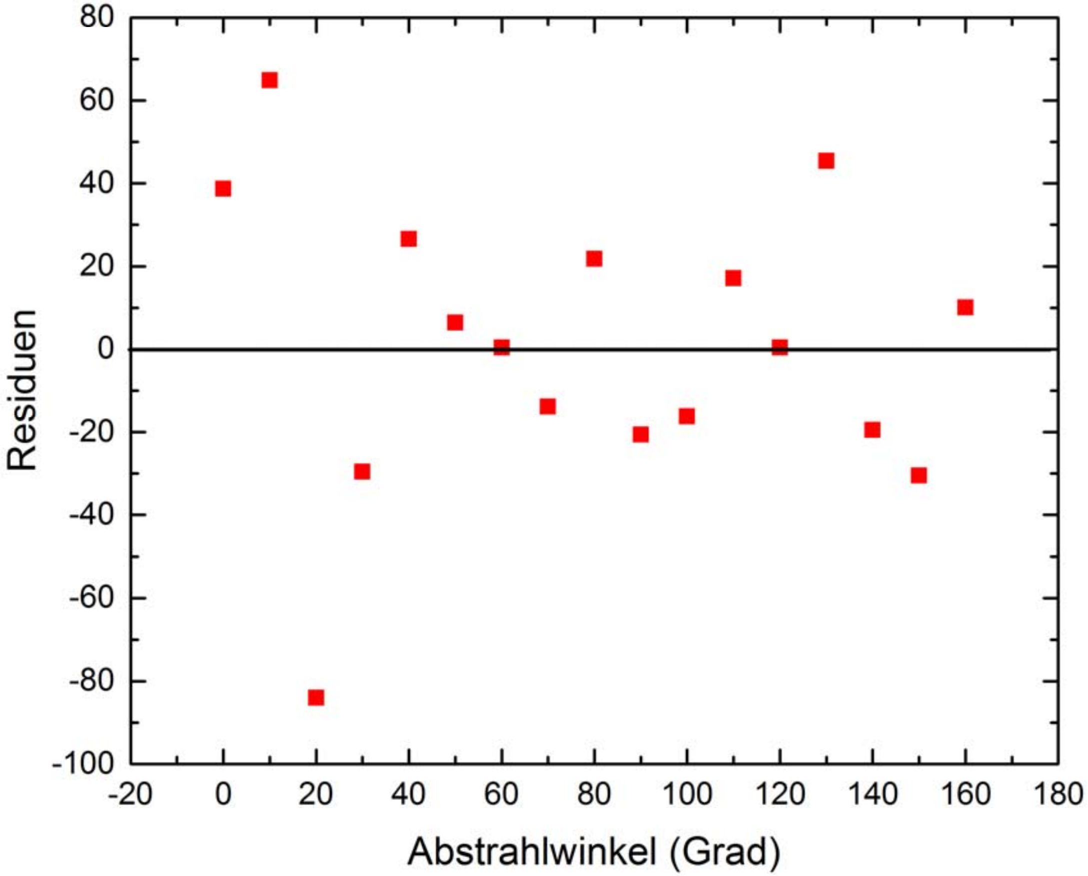
$$a_0 = 907{,}17; a_2 = 260{,}48; a_3 = 193{,}67$$

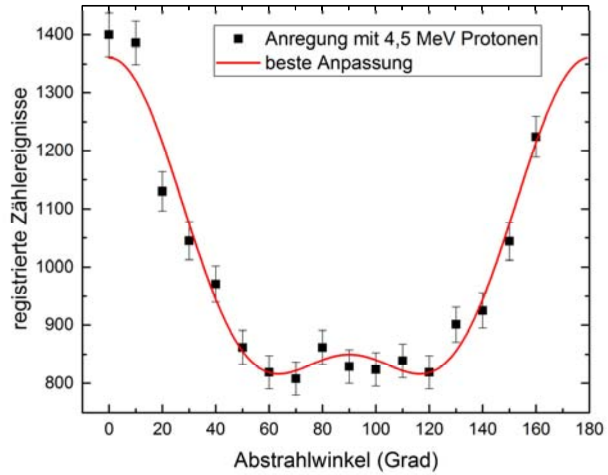


Wie gut ist diese Anpassung?

Beispiel: Beschuss von ^{13}C mit Protonen

Betrachte Residuen:





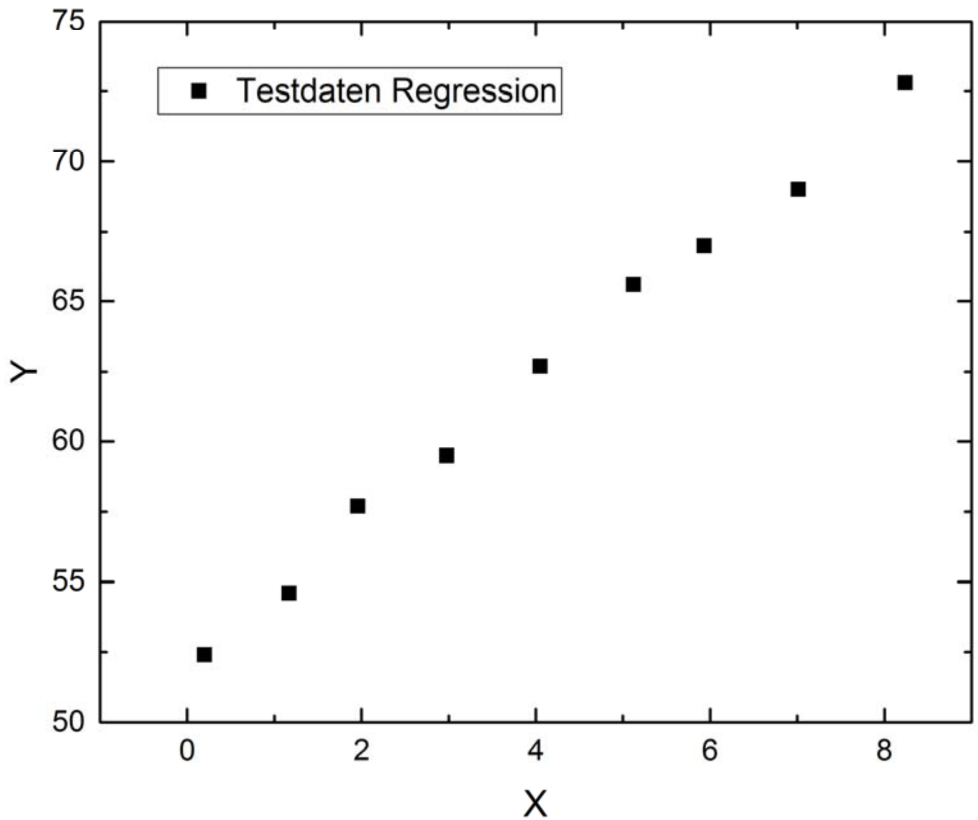
Wie sicher ist das Modell nun richtig?

Insgesamt ordentlich

Eindeutigkeit von Lösungen

Rückschau: Bei der Betrachtung der linearen Regression von Geraden hatte wir folgenden Testdatensatz

X_i	Y_i
0,20	52,4
1,17	54,6
1,96	57,7
2,98	59,5
4,05	62,7
5,12	65,6
5,93	67,0
7,01	69,0
8,24	72,8

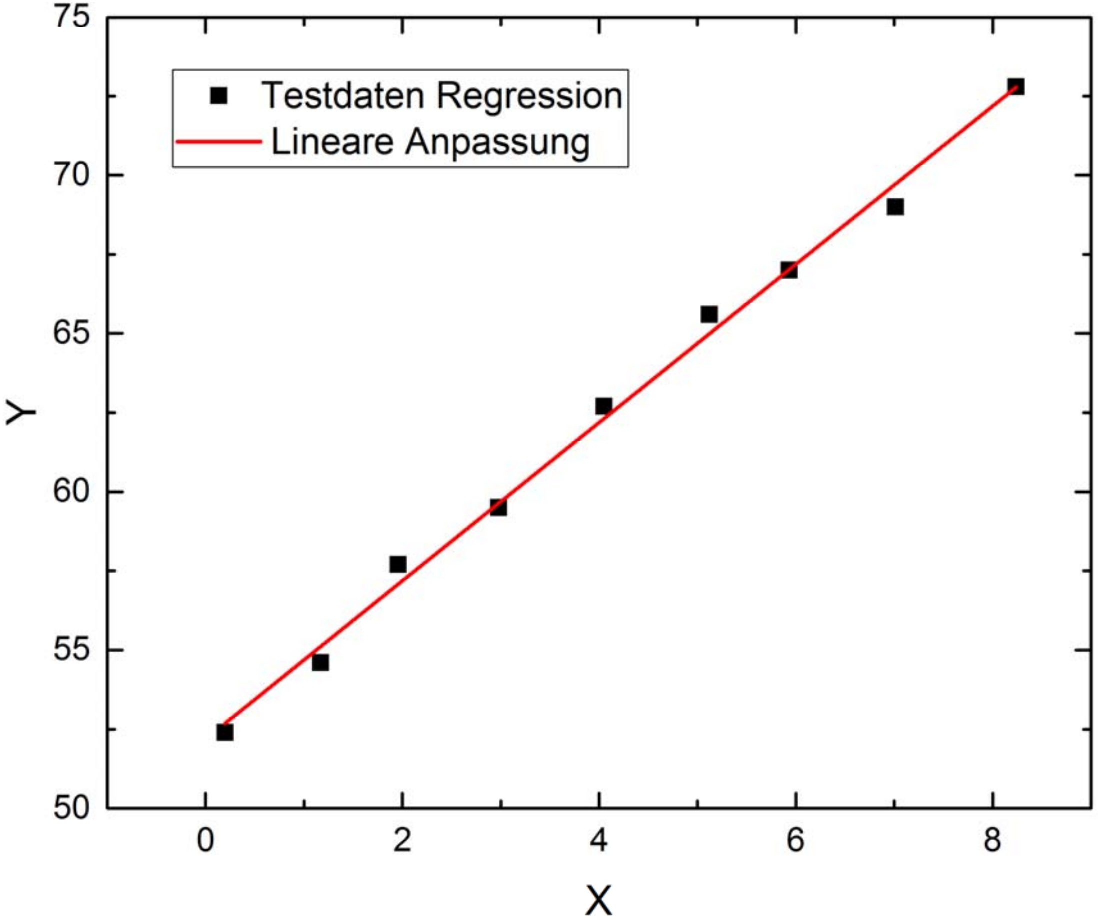


Die Korrelation der Daten war hochsignifikant.

Darauf haben wir die beste Gerade an diese Daten angepasst.

Eindeutigkeit von Lösungen

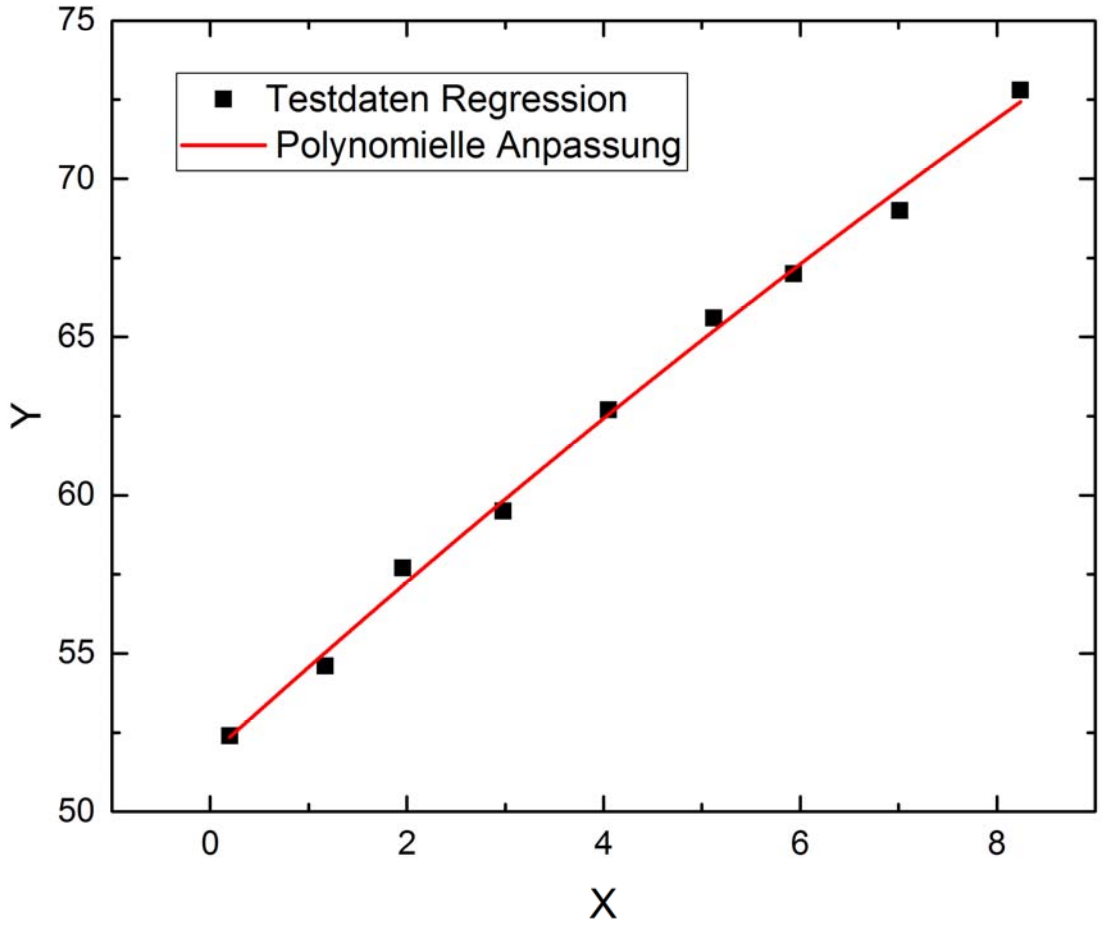
Lieferte:



Was passiert, wenn wir stattdessen ein Polynom zweiter Ordnung anpassen?

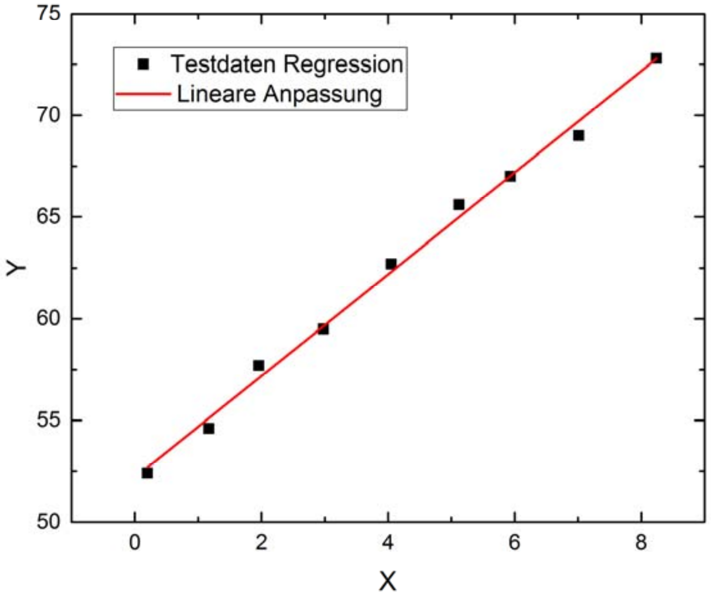
Eindeutigkeit von Lösungen

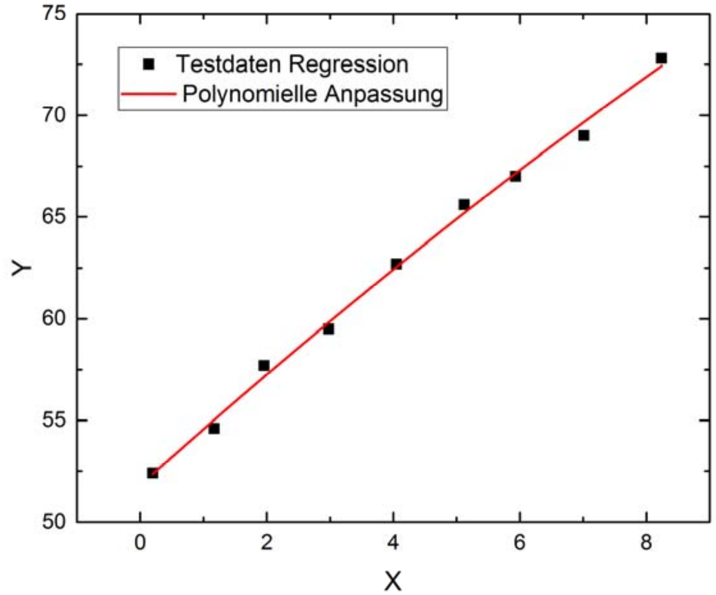
Gesagt, getan:



Wenn das eine hochsignifikante Korrelation war, sollte der lineare Koeffizient einfach reproduzieren

Eindeutigkeit von Lösungen





$$a_0 = 52{,}18$$
$$a_1 = 2{,}500$$

$$a_0 = 51{,}79$$
$$a_1 = 2{,}801$$
$$a_2 = -0{,}036$$

Der quadratische Koeffizient ist wie erwartet verschwindend klein.

ABER: Die anderen Koeffizienten stimmen noch nicht einmal innerhalb eines Fehlerbalkens überein!

Eindeutigkeit von Lösungen

Koeffizienten haben geometrische Bedeutung und hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Sinnvoll ist eine rein von den Daten abhängige Lösung.

Das heißt, dass die Koeffizienten ebenfalls von einander linear unabhängig sein müssen.

Das wiederum ist zunächst mathematisch kein Problem. Der entsprechende Startpunkt für die Anpassung an Polynome muss dann sein:

$$y(x) = a_1 + a_2(x-\beta) + a_3(x-\gamma_1)(x-\gamma_2) + a_4(x-\delta_1)\,(x-\delta_2)(x-\delta_3) + \cdots$$

Alles weitere bleibt zunächst analog. Es gilt wieder folgende Testgröße zu minimieren:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}\,[y_i - y(x_i)]^2$$

Im Weiteren lassen wir die Summengrenzen weg und nehmen vereinfachend an, dass alle Datenpunkte den gleichen Fehler haben.
(Das gestaltet es ein *wenig* übersichtlicher o. B. d. A.)

Eindeutigkeit von Lösungen

Ergibt:

$$\sum y_i = Na_1 + a_2 \sum (x_i - \beta) + a_3 \sum (x_i - \gamma_1)(x_i - \gamma_2)$$

$$+a_4 \sum (x_i - \delta_1)(x_i - \delta_2)\,(x_i - \delta_3) + \cdots$$

$$\sum x_i y_i = a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i (x_i - \beta) + a_3 \sum x_i (x_i - \gamma_1)(x_i - \gamma_2)$$

$$+a_4 \sum x_i (x_i - \delta_1)(x_i - \delta_2)\,(x_i - \delta_3) + \cdots$$

$$\sum x_i^2 y_i = a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^2 (x_i - \beta) + a_3 \sum x_i^2 (x_i - \gamma_1)(x_i - \gamma_2)$$

$$+a_4 \sum x_i^2 (x_i - \delta_1)(x_i - \delta_2)\,(x_i - \delta_3) + \cdots$$

usw.

Eindeutigkeit von Lösungen

Vereinfachen wir zunächst. Nehmen wir an, wir wollen ein Polynom 0ter Ordnung anpassen. Dann genügt es die erste Zeile zu betrachten:

$$\sum y_i = Na_1 + a_2 \sum (x_i - \beta) + a_3 \sum (x_i - \gamma_1)(x_i - \gamma_2)$$

$$+a_4 \sum (x_i - \delta_1)(x_i - \delta_2)\,(x_i - \delta_3) + \cdots$$

Ergibt:

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum y_i = \bar{y}$$

Falls wir Gerade anpassen wollen, muss für linear unabhängige Koeffizienten gelten wenn $a_1 \neq 0$:

$$\sum (x_i - \beta) = 0$$

Eindeutigkeit von Lösungen

Ergibt:

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum y_i = \bar{y}$$

Falls wir Gerade anpassen wollen, muss für linear unabhängige Koeffizienten gelten wenn $a_1 \neq 0$:

$$\sum (x_i - \beta) = 0$$

Somit:

$$\beta = \frac{1}{N} \sum x_i = \bar{x}$$

Schwerpunkt der Daten