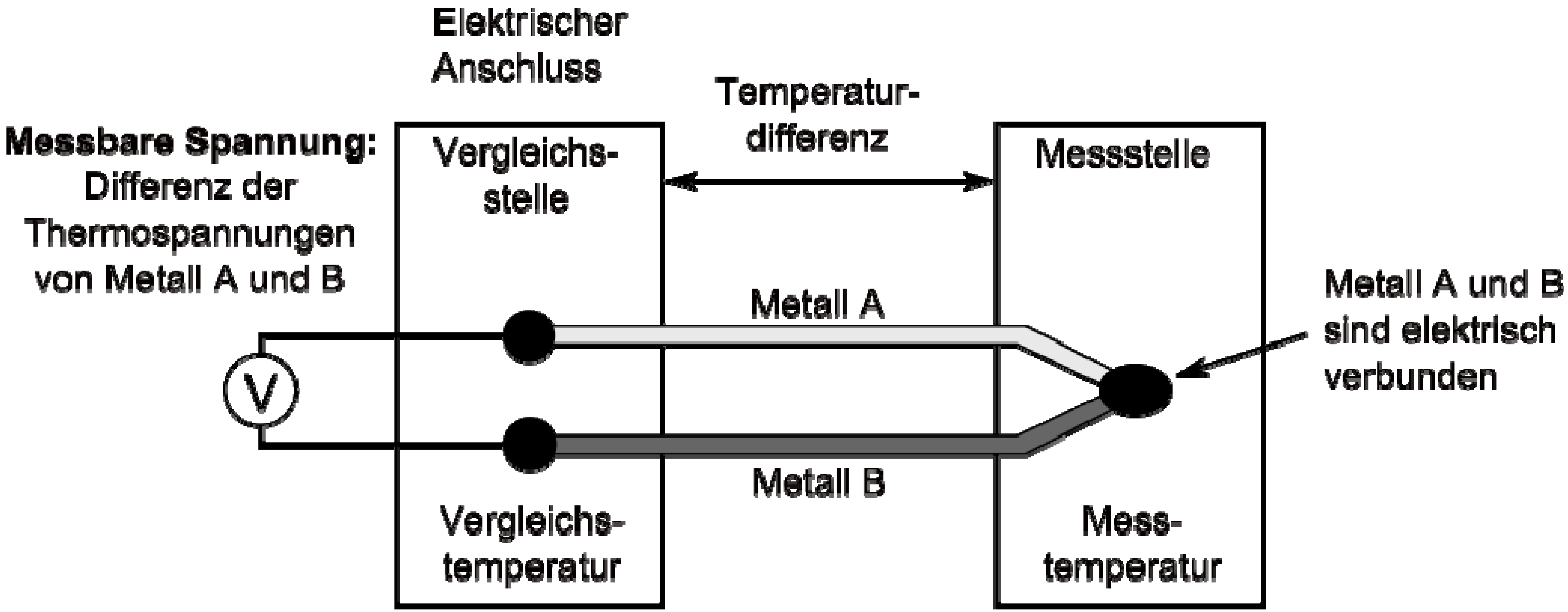
Regression II: Anpassung an Polynome

Temperaturmessung mit Thermospannung

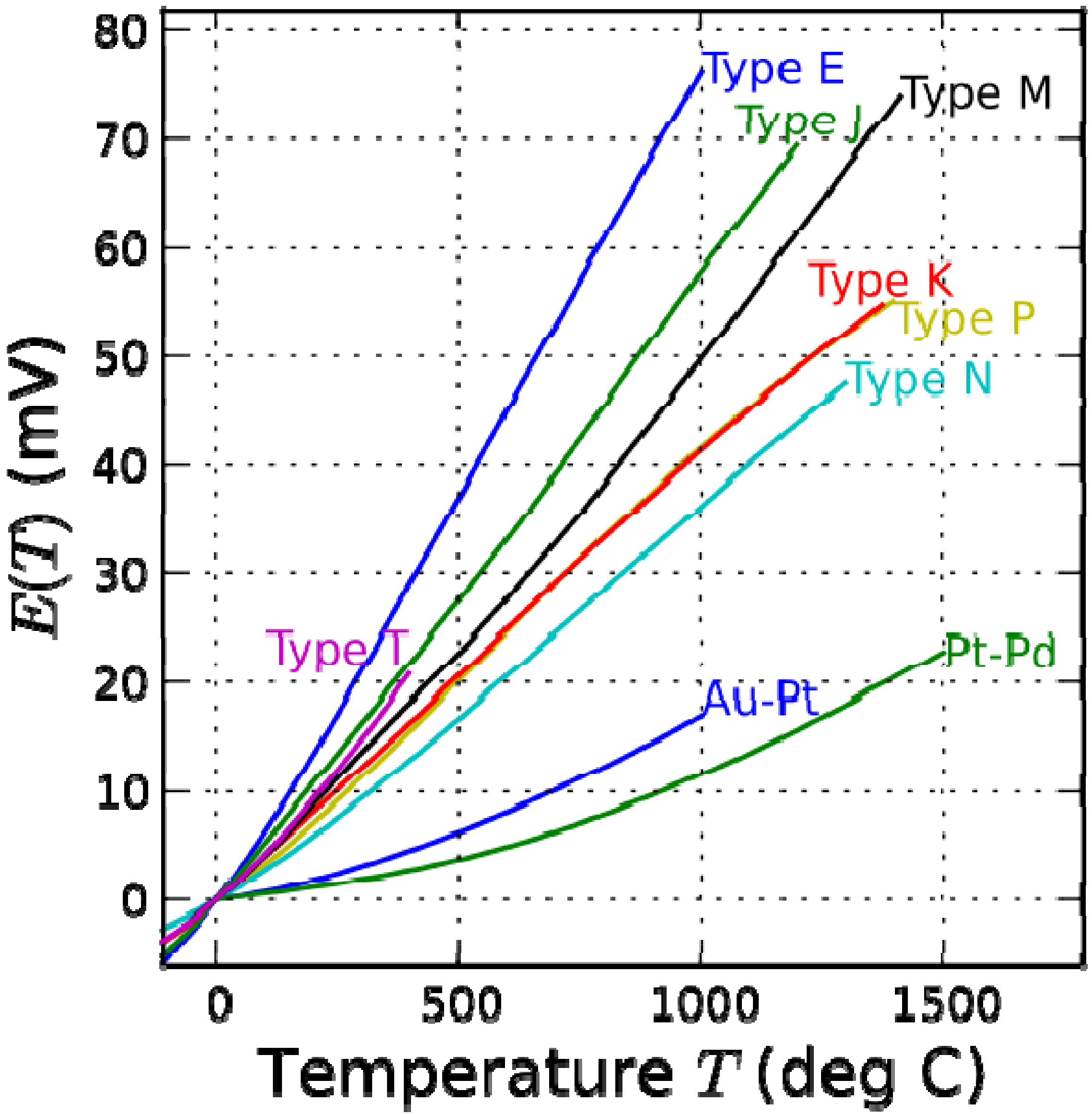


Für die abgegriffene Spannung gilt:

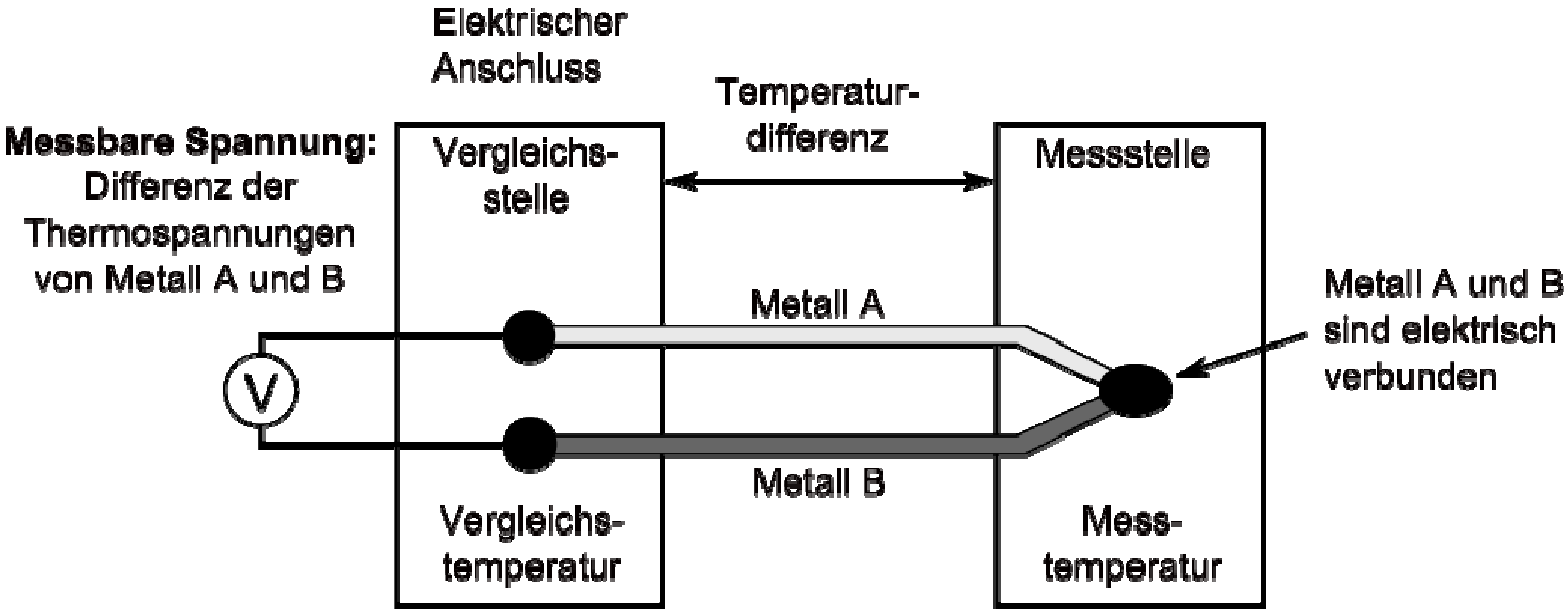
$$\mathrm{U} = \int_{T_1}^{T_2} \left(S_B(T) - S_A(T)\right) dT$$

Wobei $S_A(T)$, $S_B(T)$ die Seebeck Koeffizienten der Metalle *A, B* sind.

Verbreitete Thermoelemente



Temperaturmessung mit Thermospannung



Für die abgegriffene Spannung gilt:

$$\mathrm{U} = \int_{T_1}^{T_2} \left(S_B(T) - S_A(T)\right) dT$$

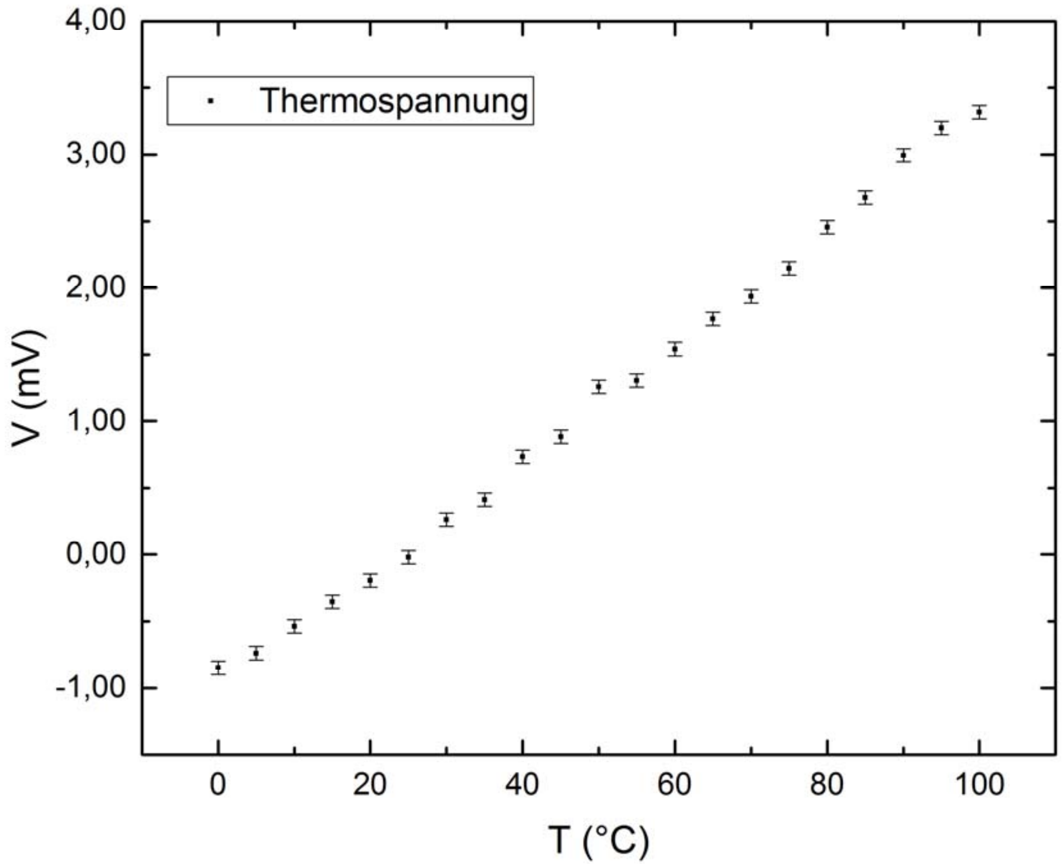
Wobei $S_A(T)$, $S_B(T)$ die Seebeck Koeffizienten der Metalle *A, B* sind.

Annahme: $$\mathrm{U} = (S_B - S_A)(T_2 - T_1)$$

Temperaturmessung mit Thermospannung

Wir erhalten folgende Kalibrationstabelle:

Temperatur (°C)	Thermospannung (mV)
0	-0,849
5	-0,738
10	-0,537
15	-0,354
20	-0,196
25	-0,019
30	0,262
35	0,413
40	0,734
45	0,882
50	1,258
55	1,305
60	1,541
65	1,768
70	1,935
75	2,147
80	2,456
85	2,676
90	2,994
95	3,200
100	3,318

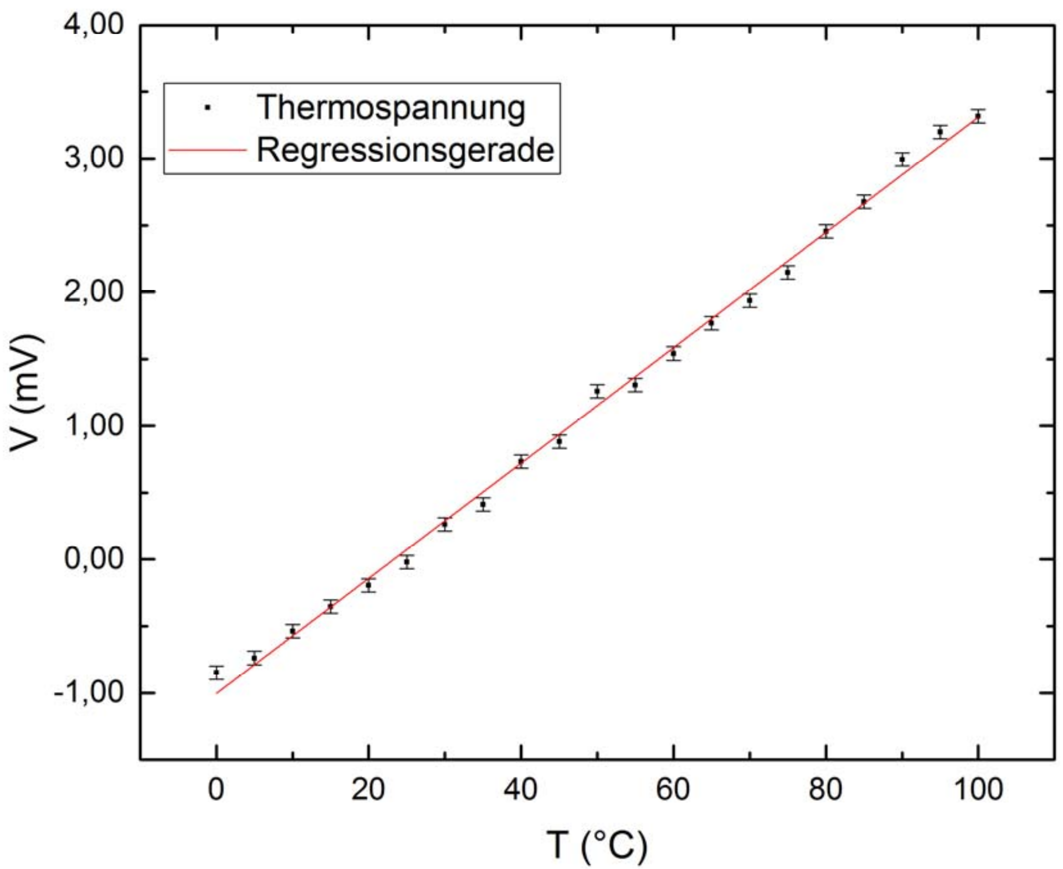


Spannungsfehler: $\pm 0{,}05$ mV

Erstellen der Kalibrationsfunktion

Testanpassung: Bestimme beste Gerade durch lineare Regression mit festem Gaußfehler

Temperatur (°C)	Thermospannung (mV)
0	-0,849
5	-0,738
10	-0,537
15	-0,354
20	-0,196
25	-0,019
30	0,262
35	0,413
40	0,734
45	0,882
50	1,258
55	1,305
60	1,541
65	1,768
70	1,935
75	2,147
80	2,456
85	2,676
90	2,994
95	3,200
100	3,318



Spannungsfehler: $\pm 0{,}05$ mV

Wie gut ist diese Anpassung?

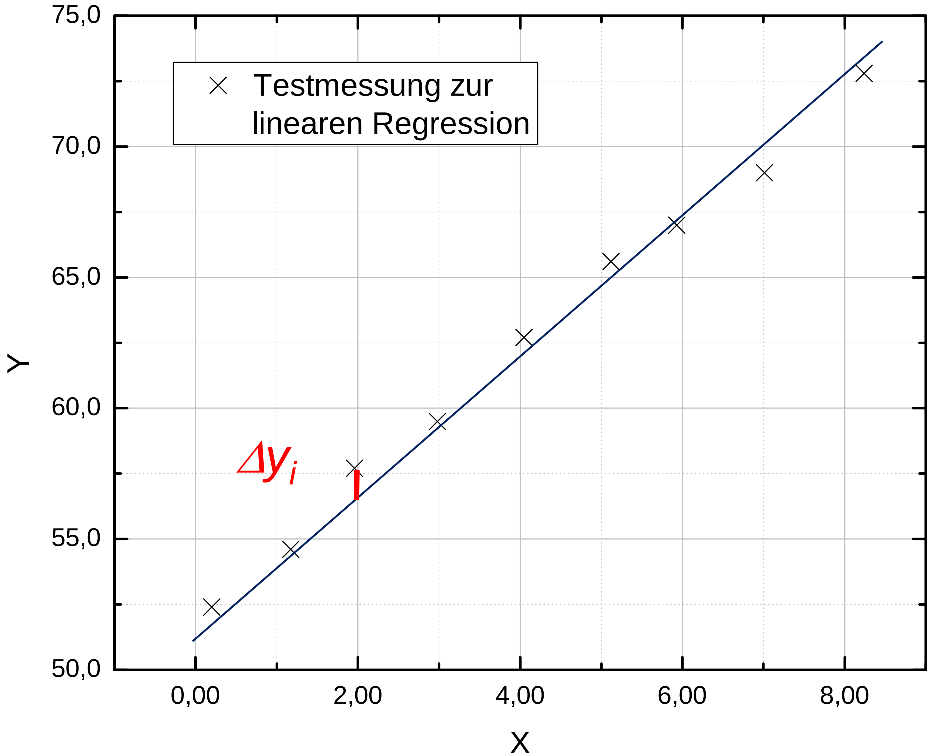
Wiederholung: Vorüberlegungen

Wenn die Messwerte (X_i, Y_i) keinerlei Unsicherheit hätten,
dann läge jeder Punkt exakt auf der Geraden

Annahmen: Die Fehler in X sind wesentlich kleiner als die Fehler in Y.
X ist fehlerfrei und Y ist fehlerbehaftet.

Die Daten sind beschrieben durch den funktionellen Zusammenhang:

$$y = a + bx.$$



Die Abweichung Δy_i jedes Datenpunktes von der bestangepassten Geraden ist dann:

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) = y_i - a - bx_i.$$

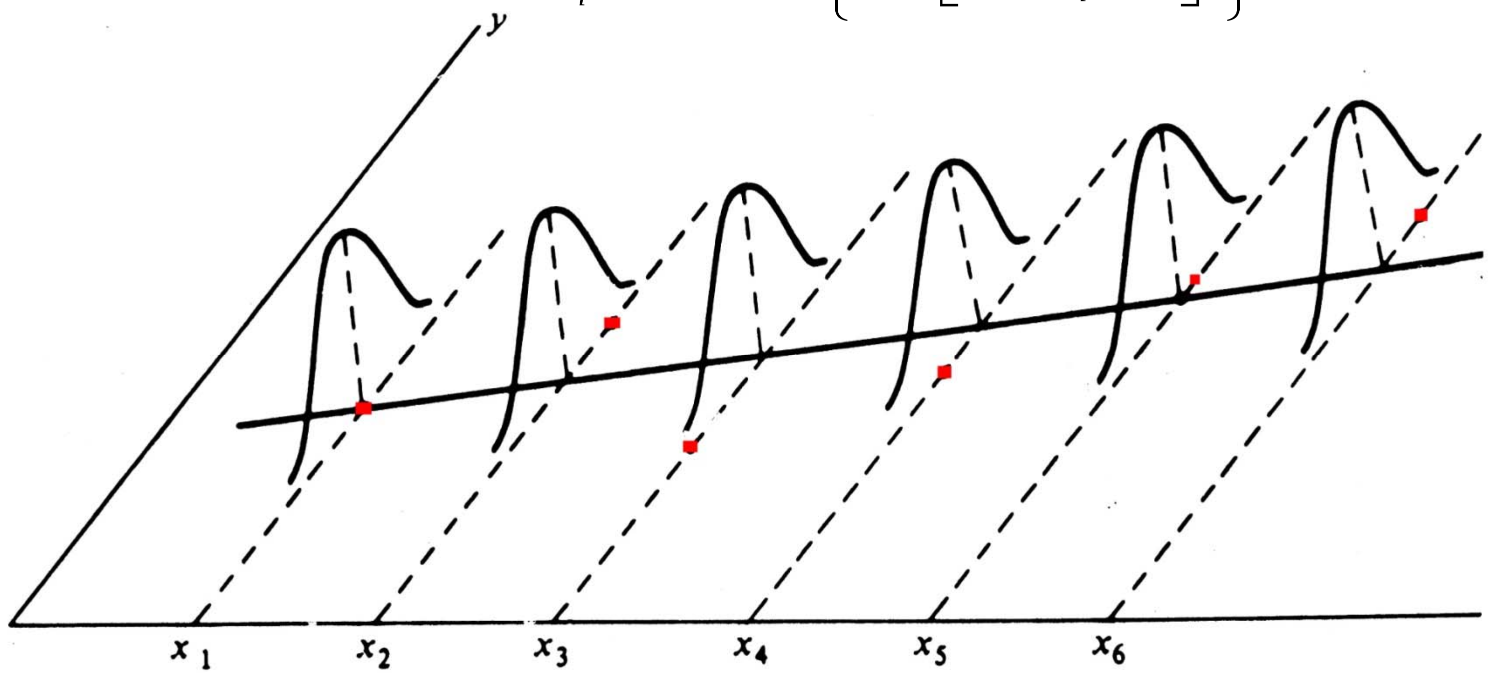
Wiederholung: Vorüberlegungen

$$y = a + bx.$$

Für jedes X_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit P_i den Messwert Y_i zu erhalten.

Annahme: Normalverteilung der Messwerte

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

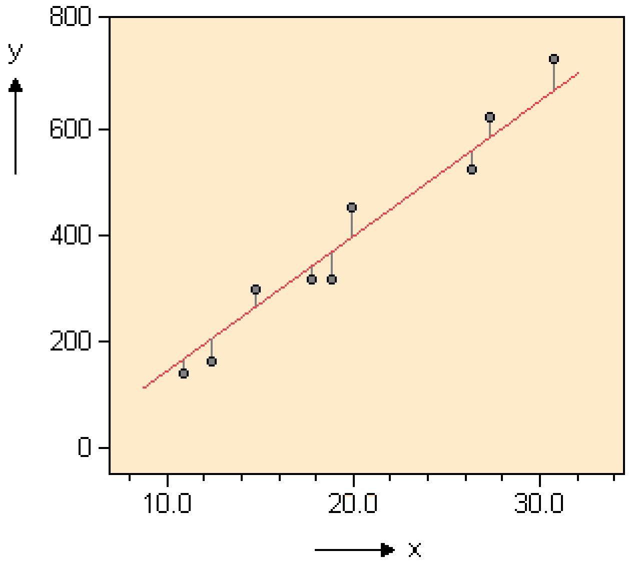


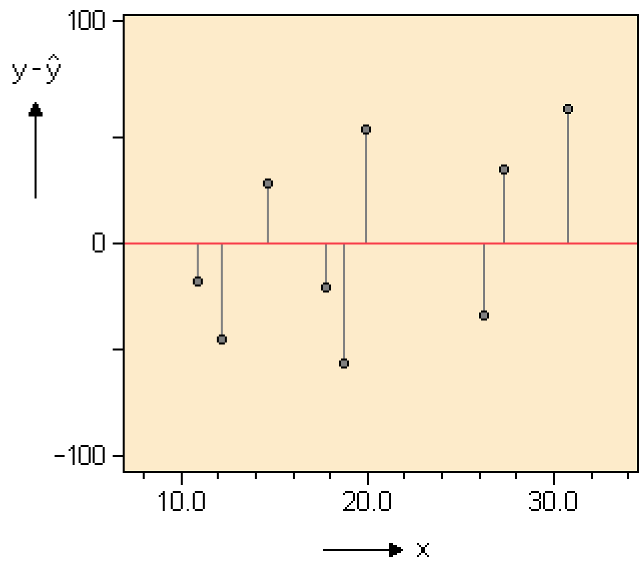
Betrachtung der Residuen

Gemäß unserer Annahmen sollten die Residuen

$$r = \Delta y_i = y_i - y(x_i).$$

normalverteilt um unsere bestangepasste Kurve streuen





Sehr zugängliche Form der Überprüfung, da das menschliche Gehirn nach Mustererkennung arbeitet.

Luat enier Stidue an der elingshcen Cmabridge Unvirestiät ist es eagl, in wlehcer Rienhnelfoge die Bcuhtsbaen in eniem Wrot sethen, das enizg wcihitge dbaei ist, dsas der estre und lzete Bcuhtsbae am rcihgiten Paltz snid. Der Rset knan ttolaer Bölsdinn sein, und man knan es torztedm onhe Porbelme lseen.
Das ghet dseahlb, wiel das mneschilche Geihrn nciht jdeen Bchustbaen liset sodnern das Wrot als Gnaezs.

Was für Buchstaben gilt, gilt leider nicht für Zahlen !

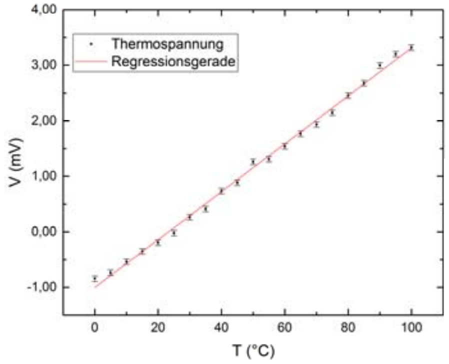
$$4{,}35678 \neq 4{,}75638$$

Dies ist beim Eintippen von Zahlen in den Taschenrechner dringend zu beachten!

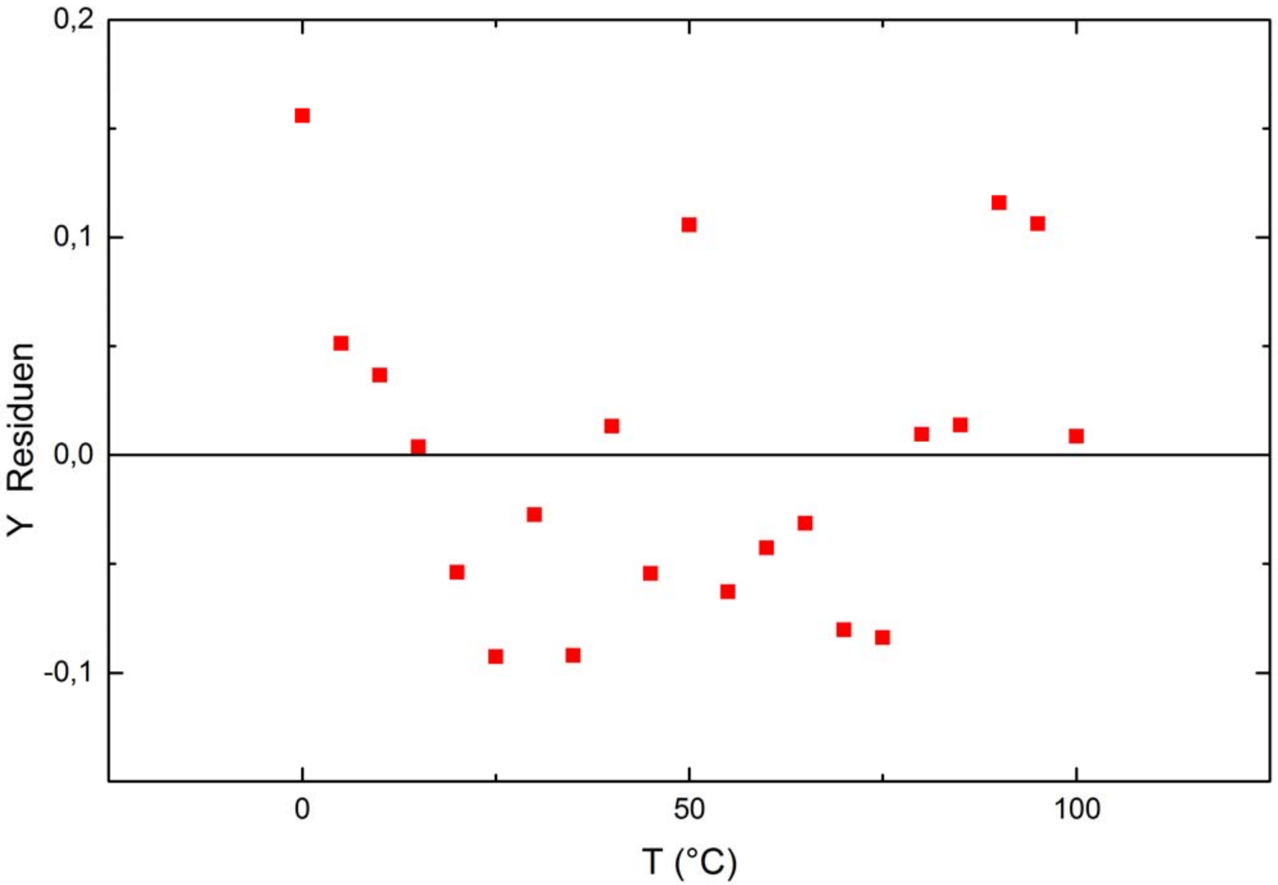
Es gilt aber sehr wohl für graphische Darstellungen!

Erstellen der Kalibrationsfunktion

Wie gut ist diese Anpassung?



Modifiziere Testfunktion: $\mathrm{U} = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$



Wiederholung: Vorüberlegungen

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei *N* Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$P(a_0, b_0) = \prod_{i=1}^{N} P_i = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$

Die beste Gerade liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Das ist der Fall, wenn der Exponent

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i}\right]^2$$

minimal wird.

Neue Anpassung

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_x x^3 + \cdots + a_m x^{m-1}$$

Oder etwas kompakter:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^{k-1}$$

Alles Folgende lässt sich noch allgemeiner fassen. Betrachten wir:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x)$$

Einzige Forderung: Die $f_k(x)$ müssen unabhängig von den Koeffizienten a_k sein.

Regression mit Polynomen

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x)$$

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei *N* Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2 \right\}$$

Die beste Anpassung liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Das ist der Fall, wenn der Exponent

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

minimal wird.

Regression mit Polynomen

Wieder:

Anpassung der Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

Dazu:

$$\frac{\partial}{\partial a_l} \chi^2 = \frac{\partial}{\partial a_l} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right]^2$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i) \right] = 0$$

für $l = 1,2, \ldots, m$

Regression mit Polynomen

Damit erhalten wir folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i)$$

Oder zum Zwecke der besseren Übersichtlichkeit expliziter:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} [a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + a_3 f_3(x_i) + \cdots]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} [a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + a_3 f_3(x_i) + \cdots]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} [a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + a_3 f_3(x_i) + \cdots]$$

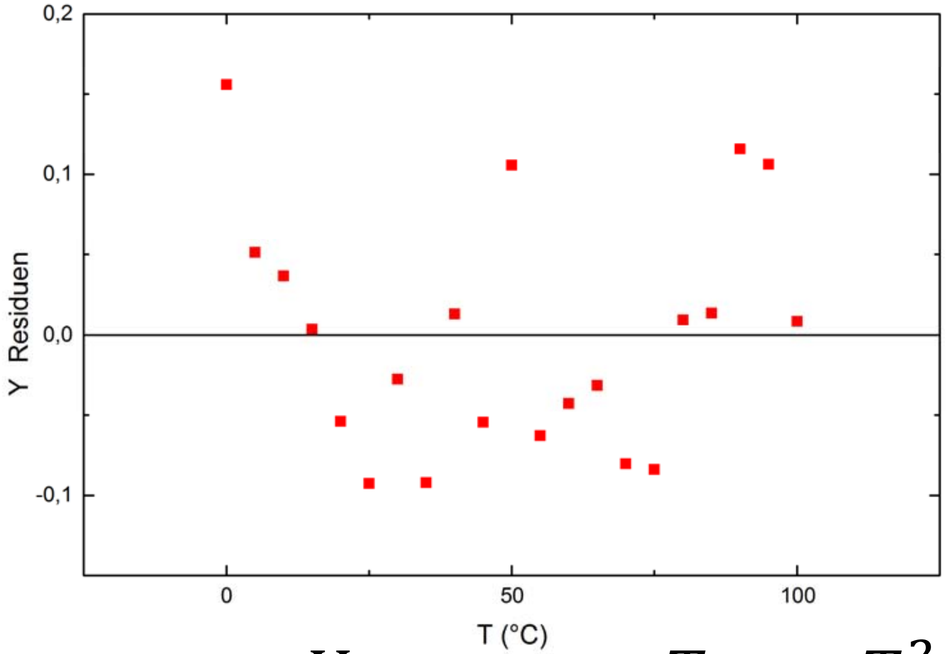
$$\ldots$$

Regression mit Polynomen

Wir betrachten also m Gleichungen mit m linearen Unbekannten:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i)$$

Das geht immer analytisch, mit modernen Computern kein Problem. Bevor wir die allgemeine Lösung betrachten, zurück zu unserem konkreten Problem.



Modifiziere Testfunktion: $U = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$

Regression mit Polynomen

Konkret müssen wir also lösen:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} [a_1 + a_2 x_i + a_3 {x_i}^2]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} [a_1 + a_2 x_i + a_3 {x_i}^2]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{{x_i}^2}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{{x_i}^2}{\sigma_i^2} [a_1 + a_2 x_i + a_3 {x_i}^2]$$

Dazu betrachten wir nach dem Determinantenverfahren die konkreten Lösungen für die Bestwerte der Koeffizienten.

Summengrenzen lassen wir ab hier wieder weg, alle Summen laufen über unsere Datenpunkte.

Bestwerte im Beispiel

Ergibt:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{1}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

Beispiel Kalibrationsfunktion

Modifiziere Testfunktion: $$\mathrm{U} = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$$

Temperatur (°C)	Thermospannung (mV)
0	-0,849
5	-0,738
10	-0,537
15	-0,354
20	-0,196
25	-0,019
30	0,262
35	0,413
40	0,734
45	0,882
50	1,258
55	1,305
60	1,541
65	1,768
70	1,935
75	2,147
80	2,456
85	2,676
90	2,994
95	3,200
100	3,318

Spannungsfehler: $\pm 0{,}05$ mV

Auswertung nun computergestützt.

Sinnvoll für Einsteiger: Tabellarische Bestimmung.

Beispiel Kalibrationsfunktion

Sinnvoll für Einsteiger: Tabellarische Bestimmung.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Messung		x	x^2	y	Messfehler	simga^2	1/sigma^2	x*y	x^2/simga^2	y/sigma^2	x/sigma^2	xy/sigma^2	x^3/simga^2	x^4/sigma^2	yx^2/sigma^2
2	1		0	0	-0,849	0,05	0,0025	400	0	0	-339,6	0	0	0	0	0
3	2		5	25	-0,738	0,05	0,0025	400	-3,69	10000	-295,2	2000	-1476	50000	250000	-7380
4	3		10	100	-0,537	0,05	0,0025	400	-5,37	40000	-214,8	4000	-2148	400000	4000000	-21480
5	4		15	225	-0,354	0,05	0,0025	400	-5,31	90000	-141,6	6000	-2124	1350000	20250000	-31860
6	5		20	400	-0,196	0,05	0,0025	400	-3,92	160000	-78,4	8000	-1568	3200000	64000000	-31360
7	6		25	625	-0,019	0,05	0,0025	400	-0,475	250000	-7,6	10000	-190	6250000	156250000	-4750
8	7		30	900	0,262	0,05	0,0025	400	7,86	360000	104,8	12000	3144	10800000	324000000	94320
9	8		35	1225	0,413	0,05	0,0025	400	14,455	490000	165,2	14000	5782	17150000	600250000	202370
10	9		40	1600	0,734	0,05	0,0025	400	29,36	640000	293,6	16000	11744	25600000	1,024E+09	469760
11	10		45	2025	0,882	0,05	0,0025	400	39,69	810000	352,8	18000	15876	36450000	1,64E+09	714420
12	11		50	2500	1,258	0,05	0,0025	400	62,9	1000000	503,2	20000	25160	50000000	2,5E+09	1258000
13	12		55	3025	1,305	0,05	0,0025	400	71,775	1210000	522	22000	28710	66550000	3,66E+09	1579050
14	13		60	3600	1,541	0,05	0,0025	400	92,46	1440000	616,4	24000	36984	86400000	5,184E+09	2219040
15	14		65	4225	1,768	0,05	0,0025	400	114,92	1690000	707,2	26000	45968	109850000	7,14E+09	2987920
16	15		70	4900	1,935	0,05	0,0025	400	135,45	1960000	774	28000	54180	137200000	9,604E+09	3792600
17	16		75	5625	2,147	0,05	0,0025	400	161,025	2250000	858,8	30000	64410	168750000	1,266E+10	4830750
18	17		80	6400	2,456	0,05	0,0025	400	196,48	2560000	982,4	32000	78592	204800000	1,638E+10	6287360
19	18		85	7225	2,676	0,05	0,0025	400	227,46	2890000	1070,4	34000	90984	245650000	2,088E+10	7733640
20	19		90	8100	2,994	0,05	0,0025	400	269,46	3240000	1197,6	36000	107784	291600000	2,624E+10	9700560
21	20		95	9025	3,2	0,05	0,0025	400	304	3610000	1280	38000	121600	342950000	3,258E+10	11552000
22	21		100	10000	3,318	0,05	0,0025	400	331,8	4000000	1327,2	40000	132720	400000000	4E+10	13272000
23																
24		Summe:	1050	71750	24,196		0,0525	8400	2040,33	28700000	9678,4	420000	816132	2,205E+09	1,807E+11	66596960
25																
26																
27																
28			8400	420000	28700000				8400	9678,4	28700000					
29	delta:	3,6274E+20	420000	28700000	2205000000		A2:	0,03765433	420000	816132	2205000000					
30			28700000	2,205E+09	1,8067E+11				28700000	66596960	1,8067E+11					
31																
32			9678,4	420000	28700000				8400	420000	9678,4					
33	A1:	-0,9181039	816132	28700000	2205000000		A3:	5,4901E-05	420000	28700000	816132					
34			66596960	2,205E+09	1,8067E+11				28700000	2,205E+09	66596960					

Beispiel Kalibrationsfunktion

Modifiziere Testfunktion: $$\mathrm{U} = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$$

Temperatur (°C)	Thermospannung (mV)
0	-0,849
5	-0,738
10	-0,537
15	-0,354
20	-0,196
25	-0,019
30	0,262
35	0,413
40	0,734
45	0,882
50	1,258
55	1,305
60	1,541
65	1,768
70	1,935
75	2,147
80	2,456
85	2,676
90	2,994
95	3,200
100	3,318

Spannungsfehler: $\pm 0{,}05$ mV

Auswertung nun computergestützt.

Sinnvoll für Einsteiger tabellarische Bestimmung.

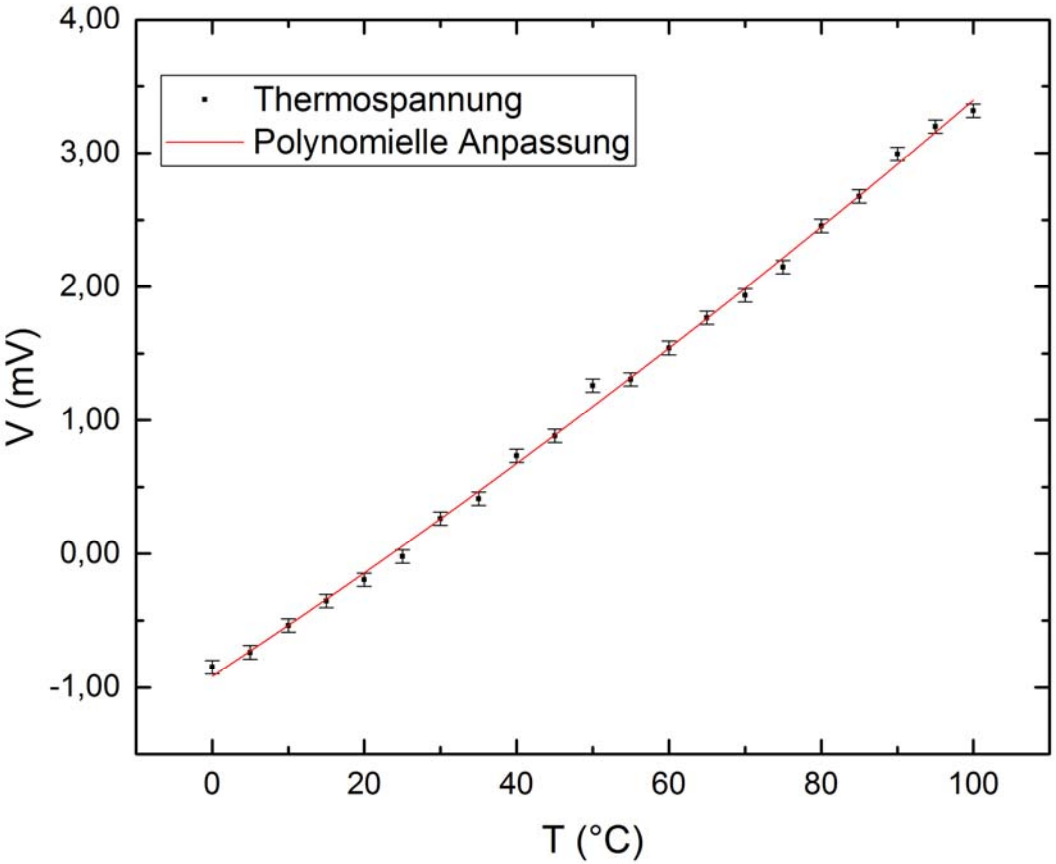
Ergibt konkret folgende Werte:

$$a_1 = -0{,}918$$
$$a_2 = 0{,}0377$$
$$a_3 = 0{,}000055$$

Erstellen der Kalibrationsfunktion

Modifiziere Testfunktion: $\mathrm{U} = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$

Temperatur (°C)	Thermospannung (
0	-0,849
5	-0,738
10	-0,537
15	-0,354
20	-0,196
25	-0,019
30	0,262
35	0,413
40	0,734
45	0,882
50	1,258
55	1,305
60	1,541
65	1,768
70	1,935
75	2,147
80	2,456
85	2,676
90	2,994
95	3,200
100	3,318

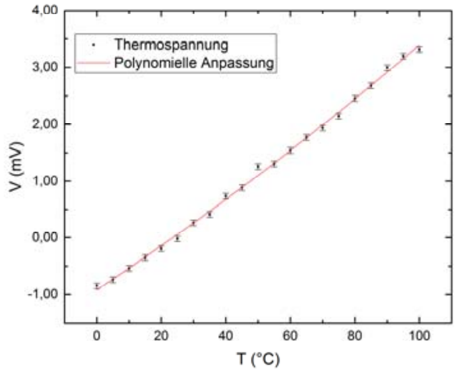


Spannungsfehler: $\pm 0{,}05$ mV

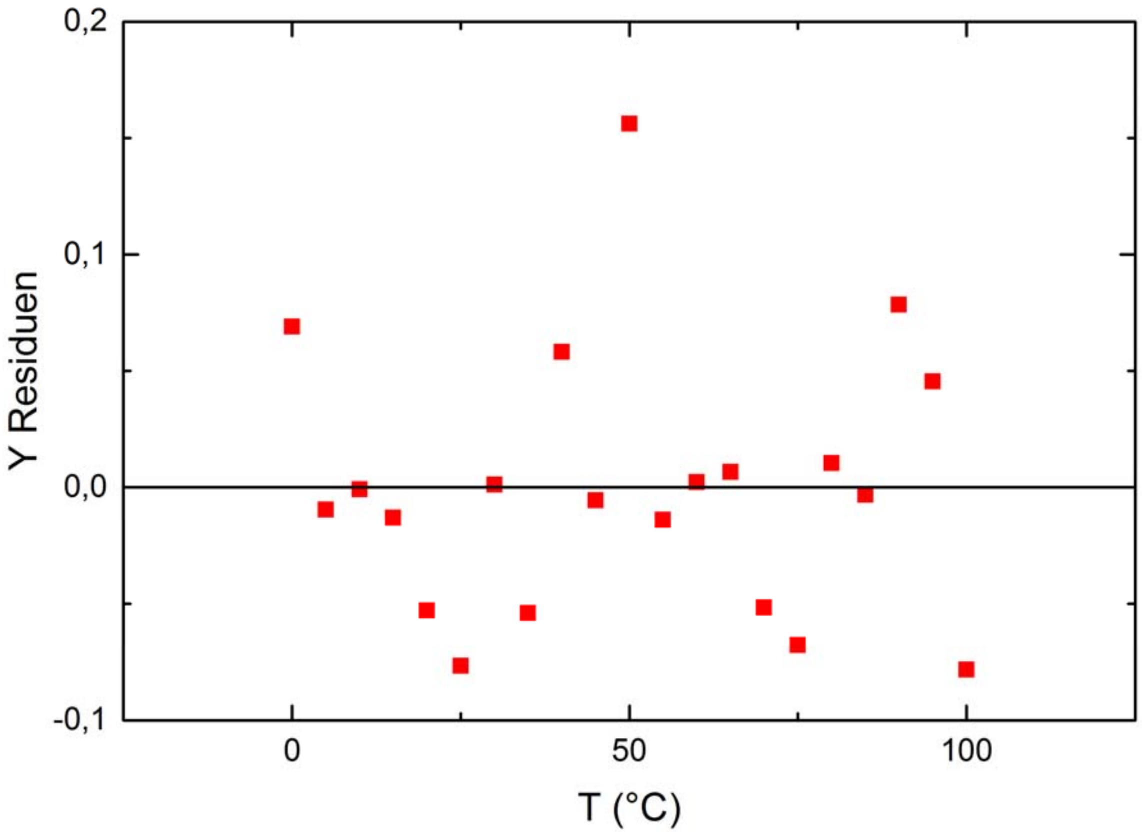
Wie gut ist diese Anpassung?

Erstellen der Kalibrationsfunktion

Wie gut ist diese Anpassung?

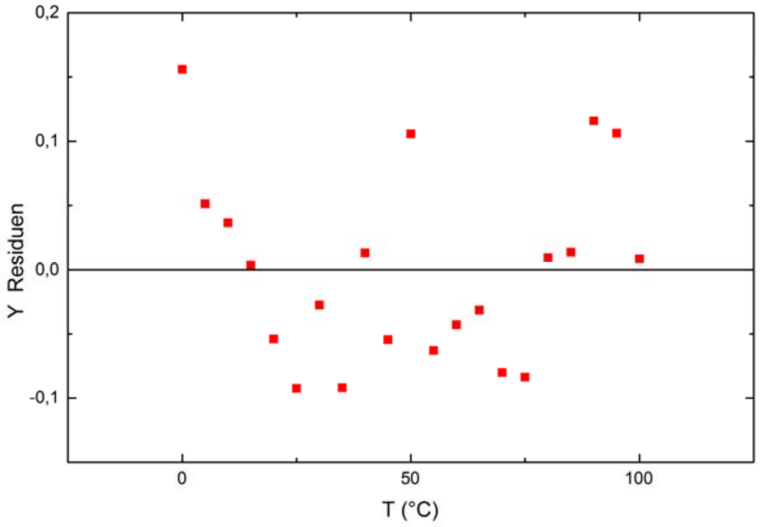


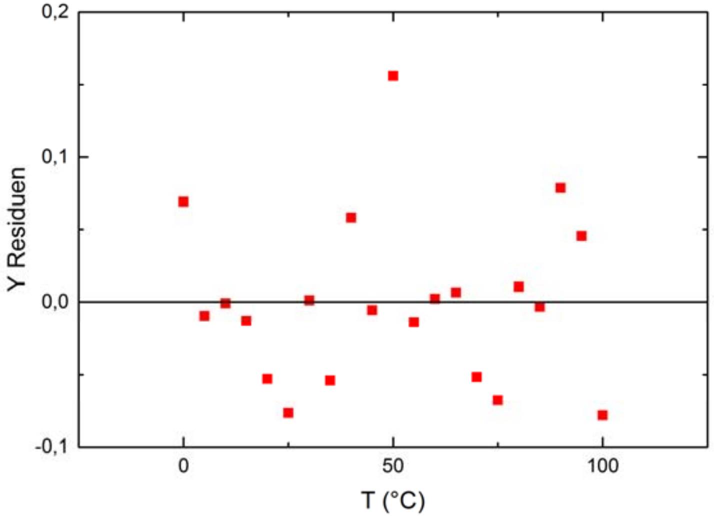
Modifiziere Testfunktion: $U = a_1 + a_2 T + a_3 T^2$



Besser als linear?

Vergleiche Residuen





Offenkundig kann man die Anpassung weiter verbessern, wenn man die Ordnung der Polynome erhöht.

Sinnvoll?

Dazu müssen wir auch den Fehler der Koeffizienten betrachten.

Dazu auch später mehr, wenn wir Modellbildung betrachten.

Fehler der Koeffizienten

Klassisches Fehlerfortpflanzungsproblem: Wir haben eine Größe die sich aus mehreren fehlerbehafteten Einzelgrößen zusammensetzt.

In diesem Fall sind es unsere Koeffizienten, deren Fehler wir suchen.

Annahme: Unsere einzelnen Messpunkte sind statistisch voneinander unabhängig.

Dann können wir eine ganz normale Fehlerrechnung nach Gauß durchführen.

Es gilt:

$$\sigma_z^{\,2} = \sum_k \left[\sigma_k^{\,2} \left(\frac{\partial z}{d y_k} \right)^2 \right]; \qquad \text{mit } z = a_1, a_2, \dots, a_m$$

Ab hier gleiches Vorgehen wie bei der Fehlerbestimmung im Fall der Geraden.

Sie sind dran: Siehe Übungsaufgabe!

Regression mit linear unabhängigen Funktionen

Zurück zu unserem allgemeinen linearen Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(x_i)$$

Forderungen: Die $f_k(x)$ müssen unabhängig von den Koeffizienten a_k sein, und linear unabhängig.

Auch dann lassen sich z.B. nach dem Determinantenverfahren die konkreten Lösungen für die Bestwerte der Koeffizienten bestimmen.

Summengrenzen lassen wir ab hier wieder weg, alle Summen laufen über unsere Datenpunkte.

Analytisch?

Regression mit linear unabhängigen Funktionen

Ergibt für m = 3:

$$a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_1(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_2(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum y_i \frac{f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$

mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{f_1(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_1(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_2(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_2(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{f_3(x_i)f_1(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_2(x_i)}{\sigma_i^2} & \sum \frac{f_3(x_i)f_3(x_i)}{\sigma_i^2} \end{vmatrix}$$