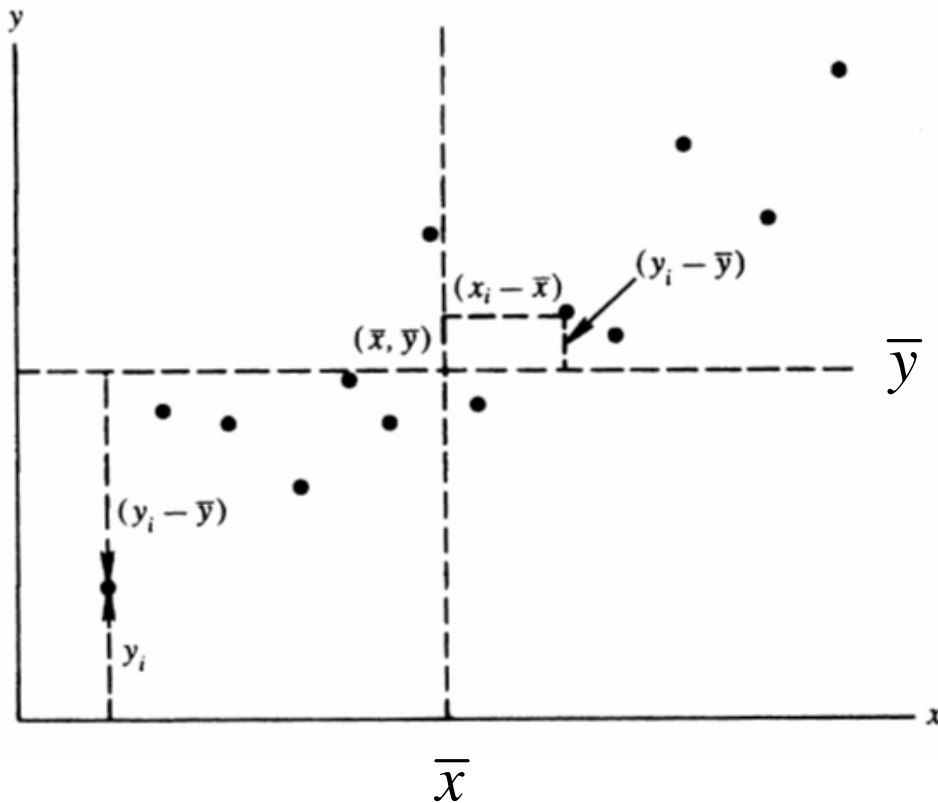


Definition des linearen Korrelationskoeffizienten



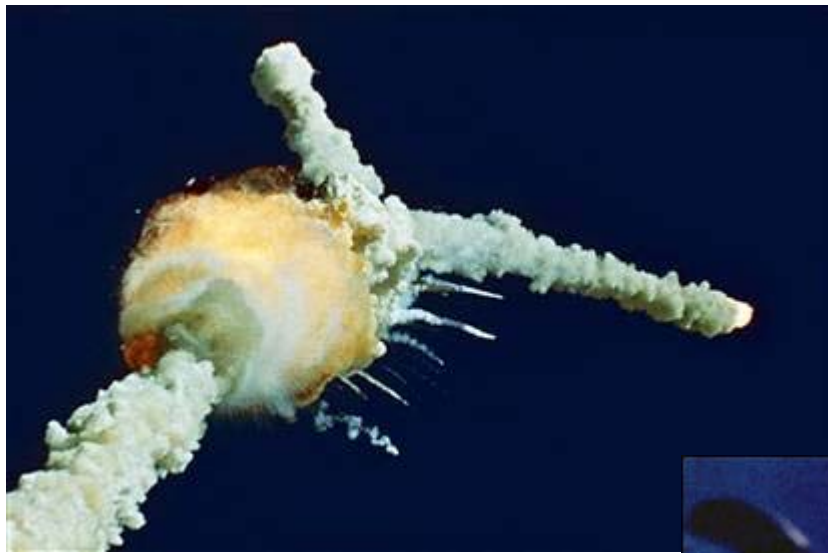
$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

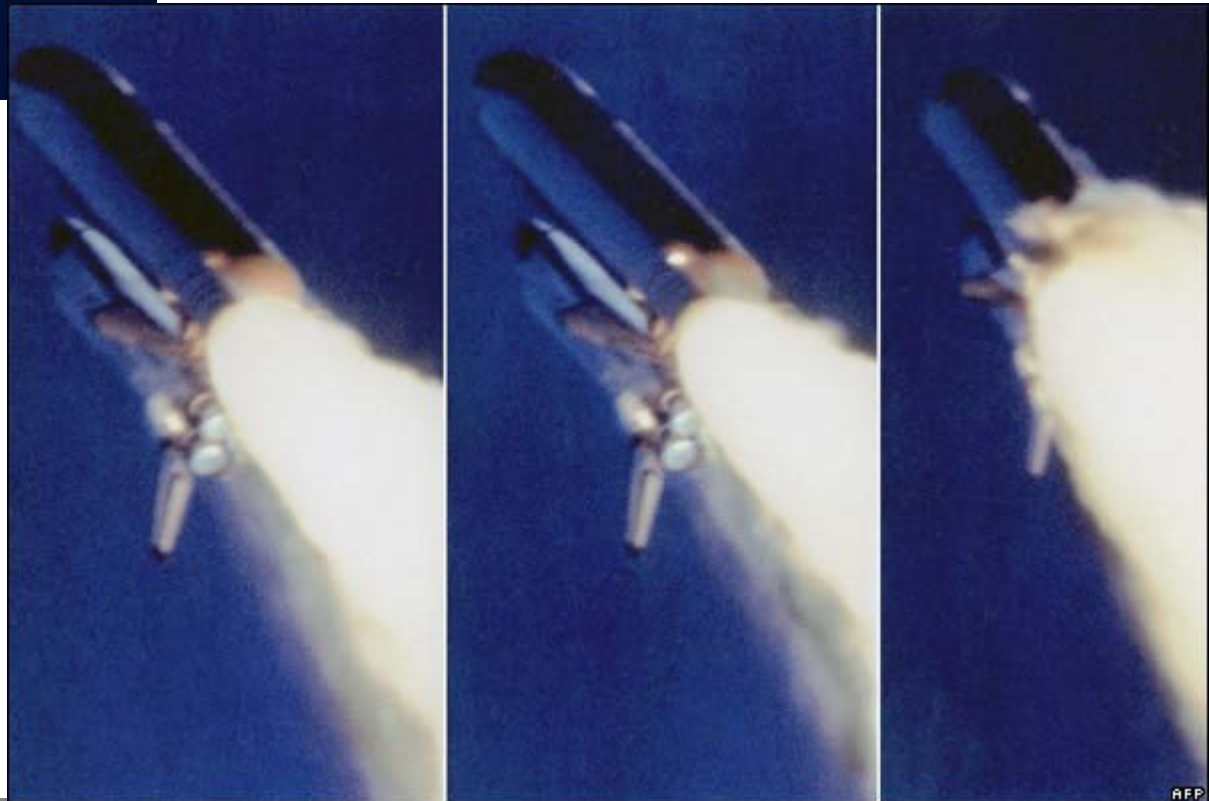
Der Korrelationskoeffizient ist ein Indikator dafür, wie gut die Punkte (X_i, Y_i) zu einer Geraden passen.

Sein Wert liegt zwischen -1 und +1. Ist r nahe bei ± 1 , dann befinden sich die Punkte dicht bei einer Geraden. Ist r dagegen nahe bei 0, dann zeigen die Punkte wenig oder keine Neigung, auf einer Geraden zu liegen.

Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele

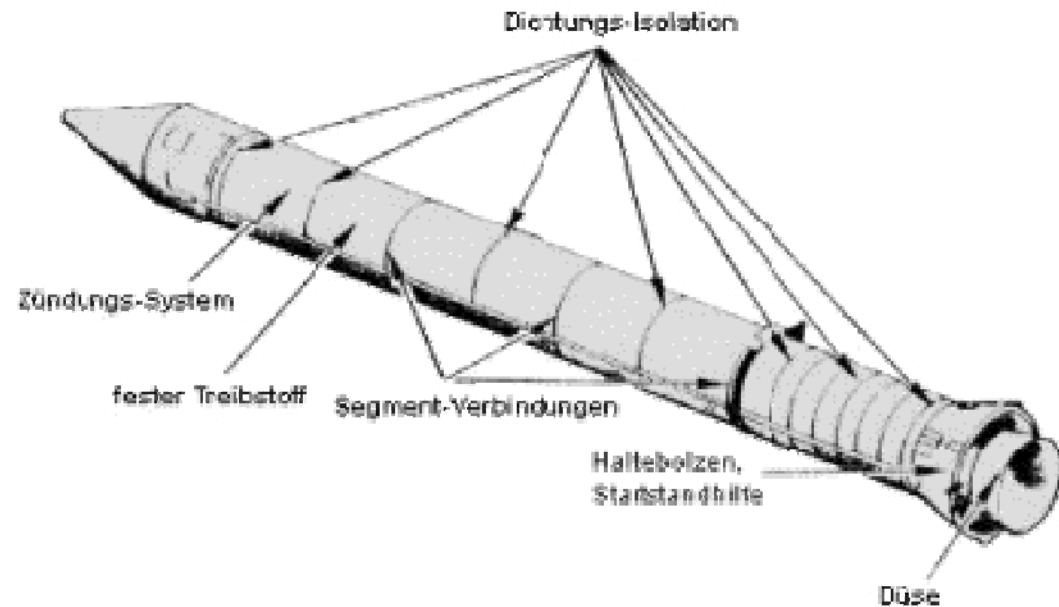


Challenger, 28.01.1986



Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele

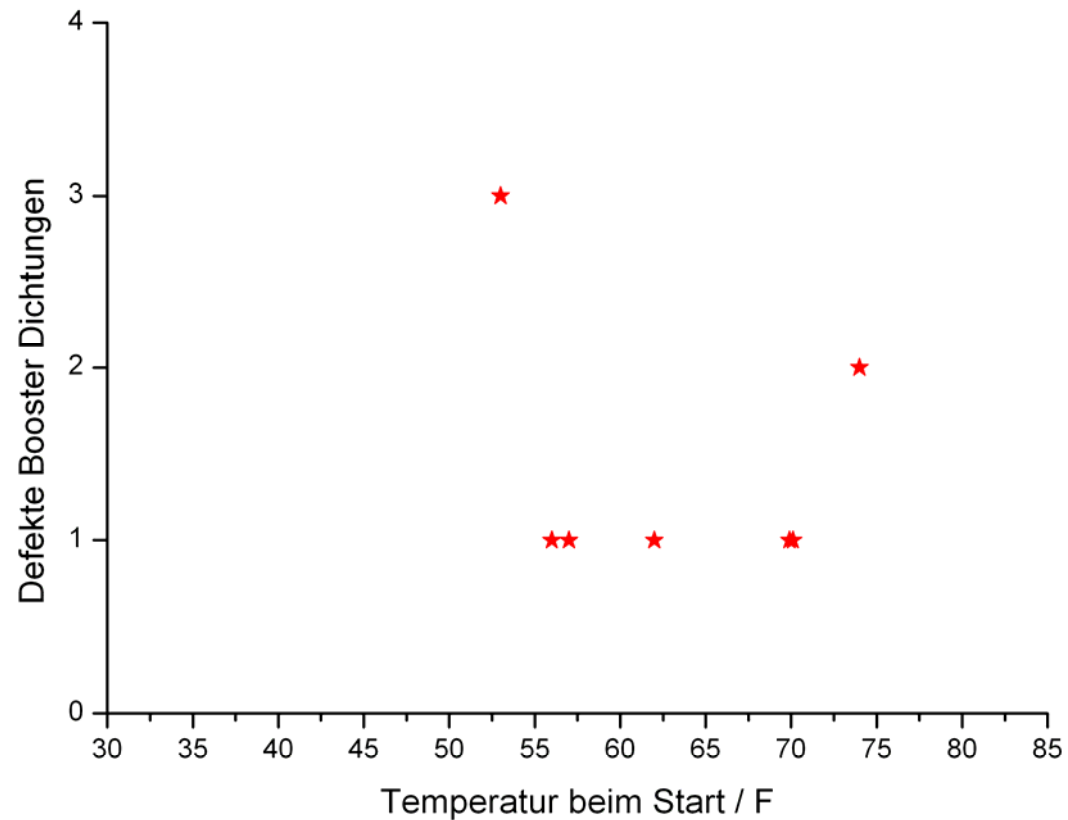
Challenger, 28.01.1986



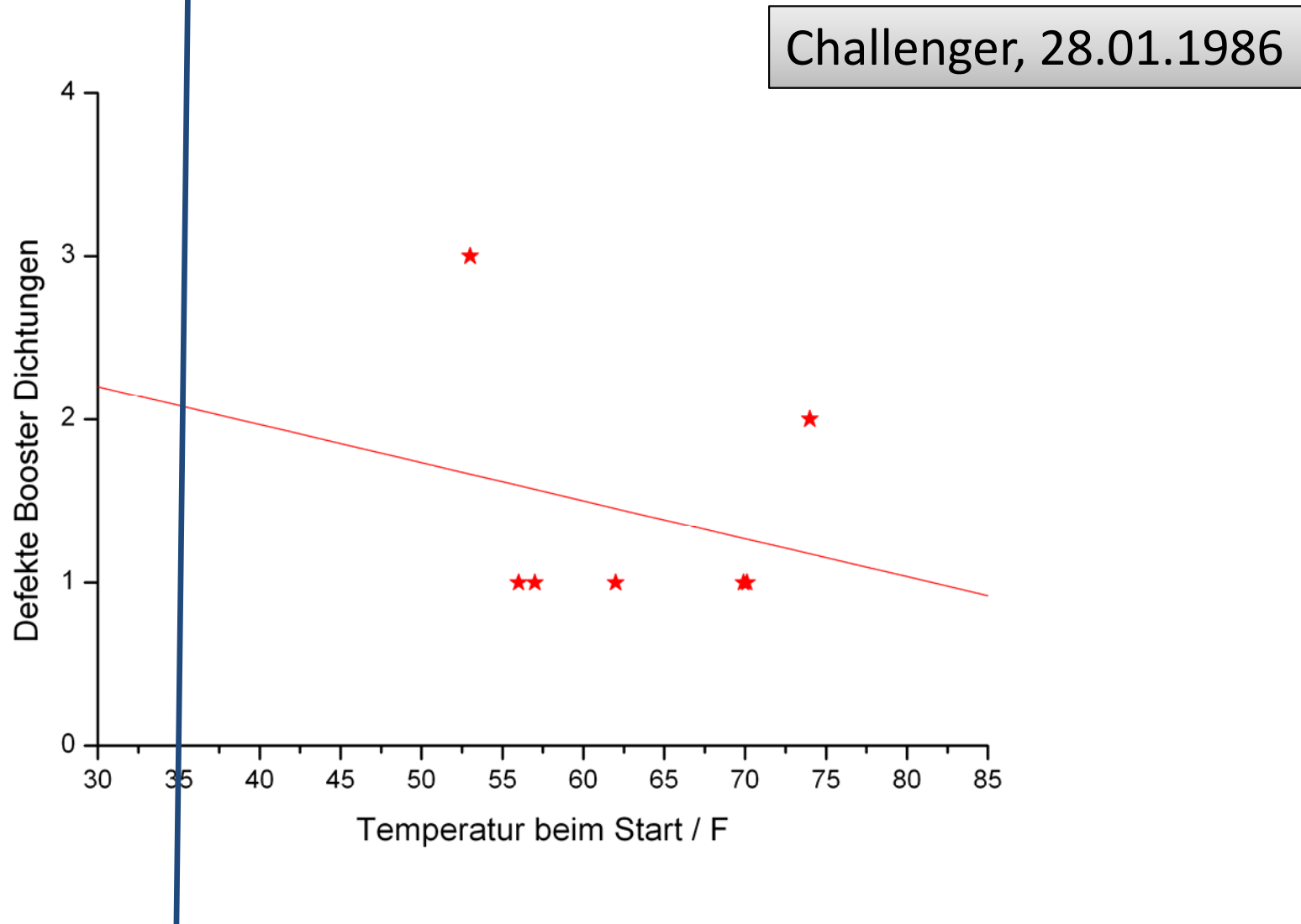
<http://www.jsc.nasa.gov/Bios/htmlbios/mcauliffe.html>

Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele

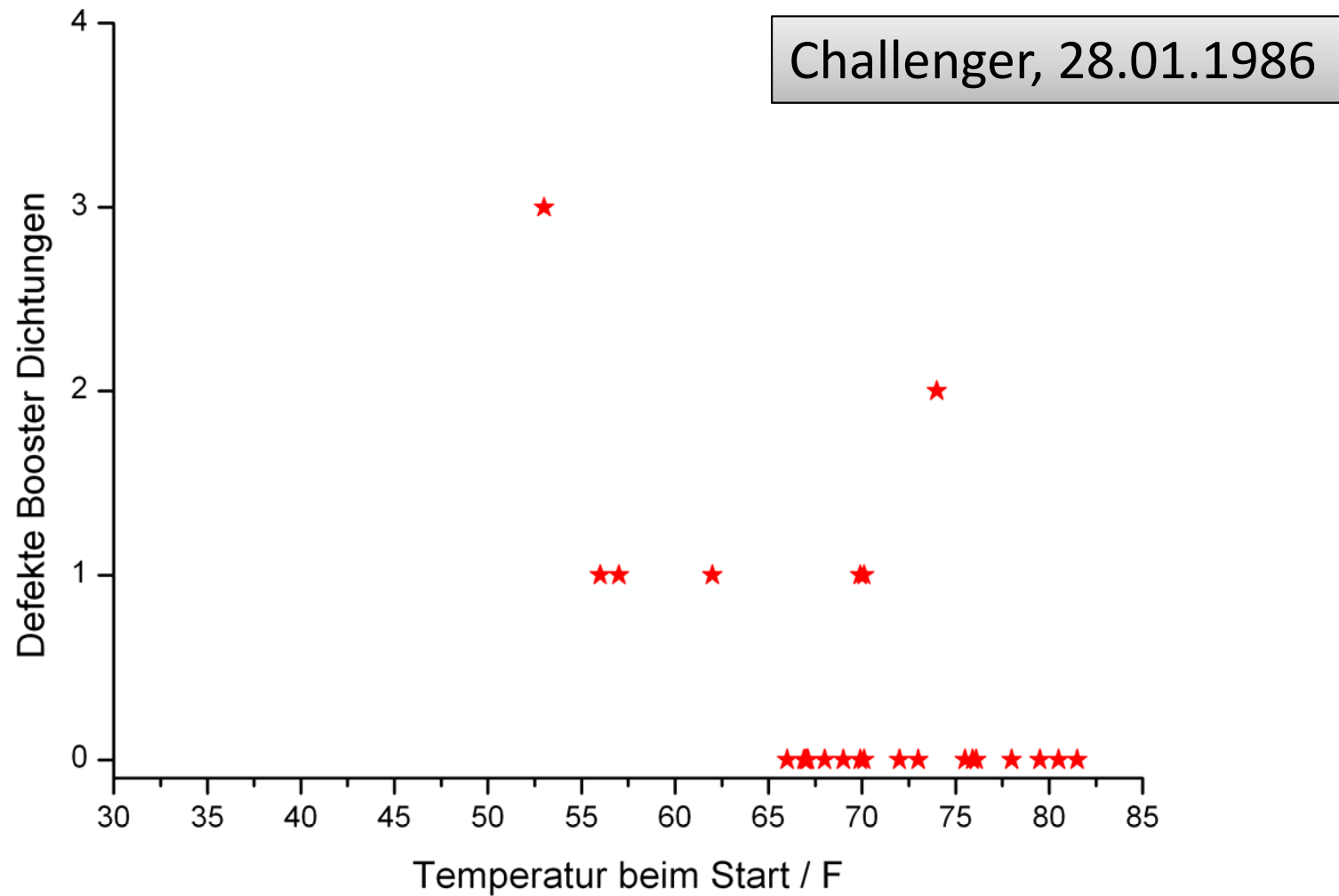
Challenger, 28.01.1986



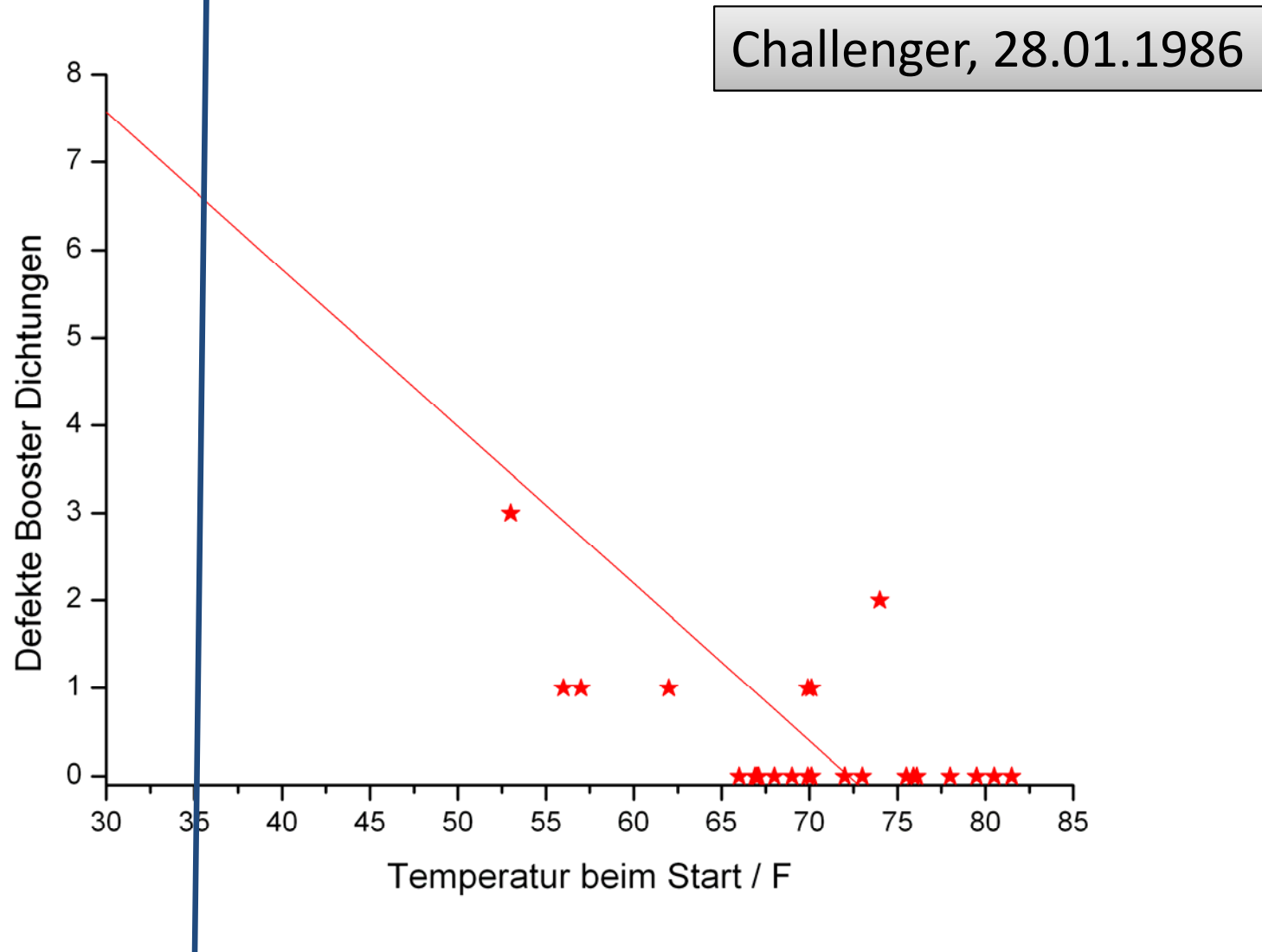
Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele



Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele



Linearer Korrelationskoeffizient: Beispiele

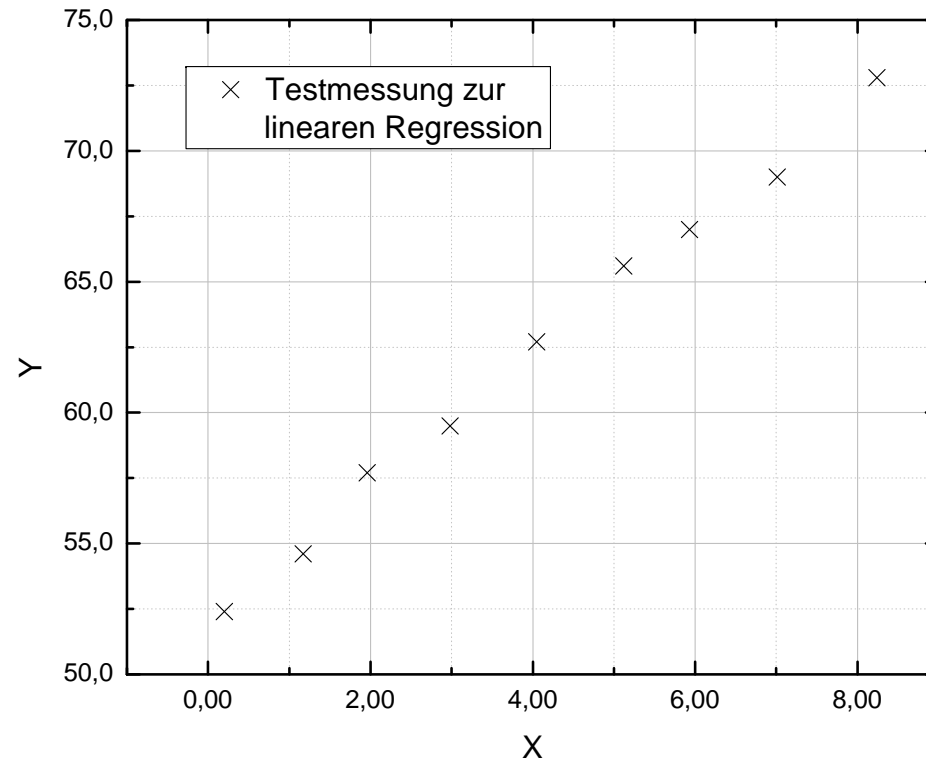


Regression I: Poisson'sche Regression

Rückblick Fragestellung

Wir führen eine Messung durch und erhalten folgende Werte:

X_i	Y_i
0,20	52,4
1,17	54,6
1,96	57,7
2,98	59,5
4,05	62,7
5,12	65,6
5,93	67,0
7,01	69,0
8,24	72,8



1.) Wie können wir objektiv beurteilen, inwieweit die Daten unsere Annahme erfüllen und wirklich einer bestimmten Funktion (hier einer Gerade) folgen?

2.) Angenommen die Beziehung zwischen x und y ist linear, welche Gerade passt am besten zu den Messwerten?

Wiederholung: Vorüberlegungen

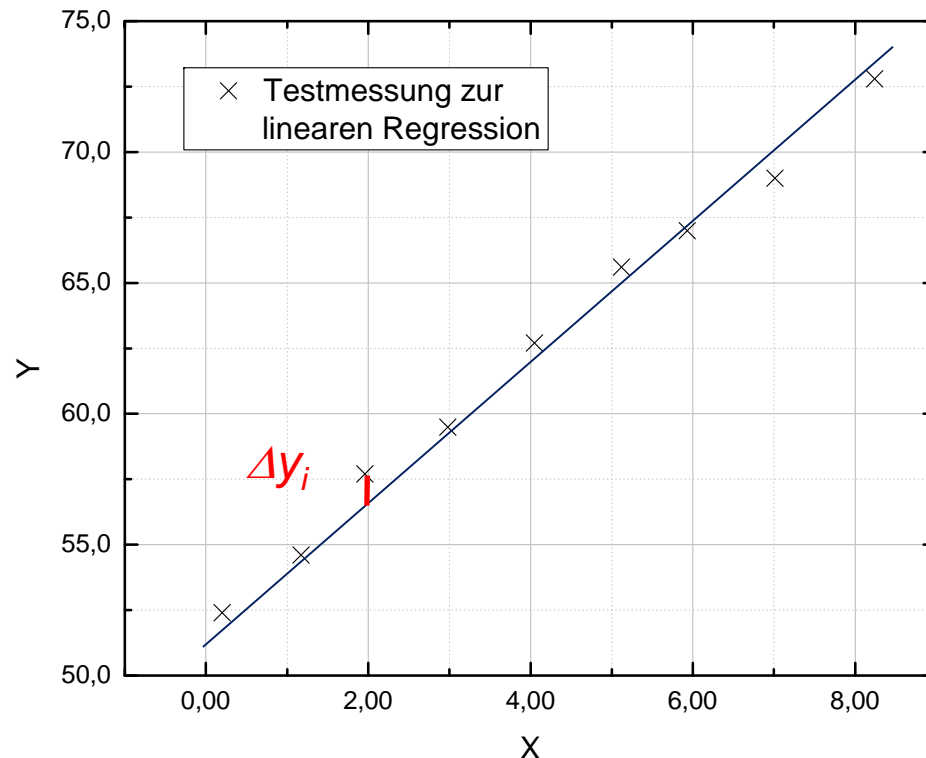
Wenn die Messwerte (X_i, Y_i) keinerlei Unsicherheit hätten, dann läge jeder Punkt exakt auf der Geraden

Annahmen:

Die Fehler in X sind wesentlich kleiner als die Fehler in Y .
 X ist fehlerfrei und Y ist fehlerbehaftet.

Die Daten sind beschrieben durch den funktionellen Zusammenhang:

$$y = a + bx.$$



Die Abweichung Δy_i jedes Datenpunktes von der bestangepassten Geraden ist dann:

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) = y_i - a - bx_i.$$

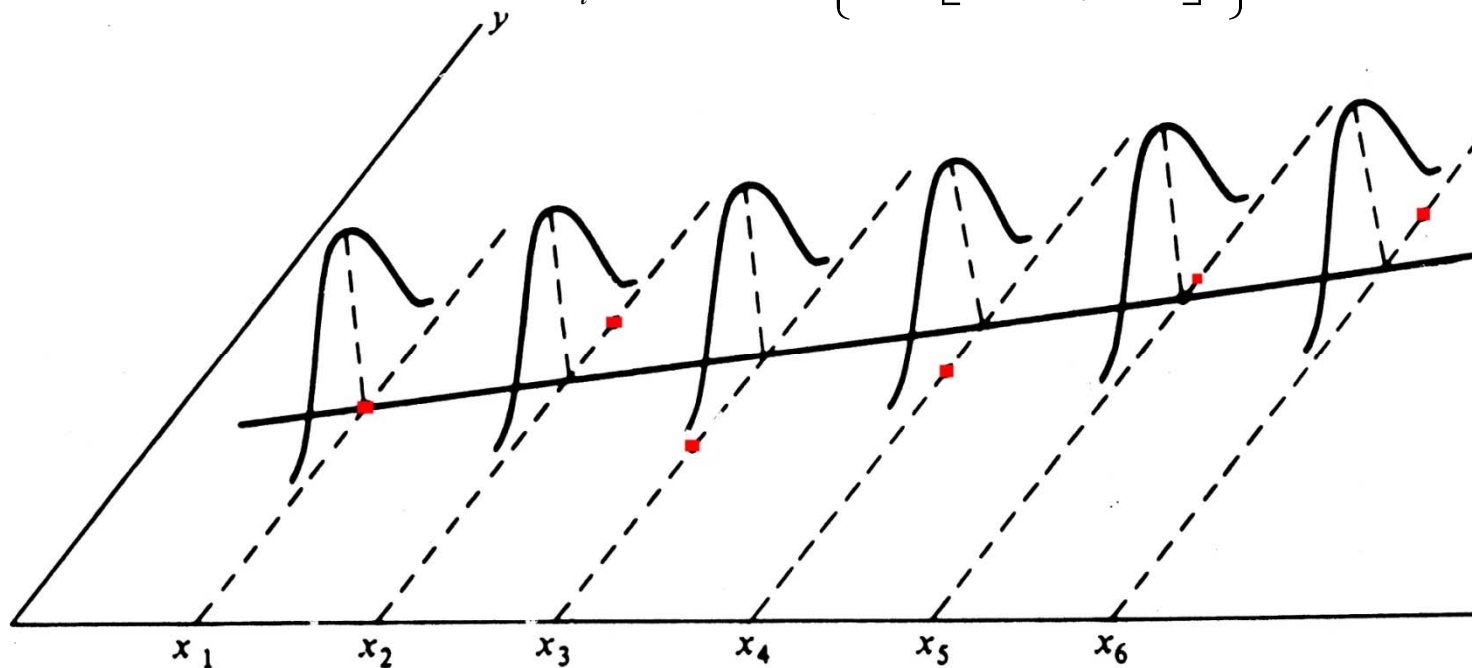
Wiederholung: Vorüberlegungen

$$y = a + bx.$$

Für jedes X_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit P_i den Messwert Y_i zu erhalten.

Bisher: Normalverteilung der Messwerte

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$



Wiederholung: Vorüberlegungen

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei N Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} P(a_0, b_0) &= \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Die beste Gerade liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Das ist der Fall, wenn der Exponent

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right]^2$$

minimal wird.

Lineare Regression bei Normalverteilung

Lineare Regression

oder

Anpassung einer Geraden nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right]^2$$

Für χ^2 minimal ist die Übereinstimmung am besten.

$$\frac{\partial}{\partial a} \chi^2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \chi^2 = 0;$$

Lineare Regression bei Normalverteilung

Wir suchen weiter die besten a und b :

$$\frac{\partial}{\partial a} \chi^2 = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i)^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i) \right] = 0;$$
$$\frac{\partial}{\partial b} \chi^2 = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i)^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i) \right] = 0;$$

Ein wenig geordnet gibt das:

$$\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} = a \sum \frac{1}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2};$$
$$\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = a \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2};$$

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir ab hier die Summengrenzen weg.
(weiter von 1 bis N)

Lineare Regression - Bestwerte

$$\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} = a \sum \frac{1}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2};$$

$$\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = a \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2};$$

Mit der Determinantenmethode gibt das:

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

Lineare Regression - Bestwerte

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

Falls jeder Datenpunkt den gleichen Fehler aufweist, lässt sich dieses Gleichungssystem vereinfachen.

Das wird häufig, aber bei weitem nicht immer möglich sein.

Lineare Regression - Bestwerte

In unserem Beispiel habe jeder Datenpunkt den selben durch die Messung bedingten Fehler. Dann ergibt sich:

$$a = \frac{1}{\Delta^s} \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i);$$

$$b = \frac{1}{\Delta^s} \begin{vmatrix} N & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i);$$

$$\Delta^s = \begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2.$$

Wir benötigen folgende Größen:

$$\sum x_i^2, \quad \sum (x_i \cdot y_i), \quad \sum x_i, \quad \sum y_i$$

Lineare Regression - Fehler

Klassisches Fehlerfortpflanzungsproblem: Wir haben eine Größe die sich aus mehreren fehlerbehafteten Einzelgrößen zusammensetzt.

In diesem Fall sind es unsere Koeffizienten, deren Fehler wir suchen.

Weitere Annahme: Unsere einzelnen Messpunkte sind statistisch voneinander unabhängig.

Dann können wir eine ganz normale Fehlerrechnung nach Gauß durchführen.

Es gilt:

$$\sigma_z^2 = \sum_k \left[\sigma_k^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_k} \right)^2 \right];$$

Die Annahme, dass unsere Messpunkte voneinander statistisch unabhängig sind, muss ebenfalls überprüft werden.

Dazu später mehr.

Lineare Regression - Fehler

$$\sigma_z^2 = \sum_k \left[\sigma_k^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_k} \right)^2 \right];$$

Wir benötigen zunächst die partiellen Ableitungen:

$$a = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

$$\frac{\partial a}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right);$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right);$$

Lineare Regression - Fehler

$$\sigma_z^2 = \sum_k \left[\sigma_k^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_k} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial a}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right); \quad \Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

Damit bestimmen wir zunächst den Fehler in a :

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{\sigma_k^4} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \frac{x_k}{\sigma_k^4} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \frac{x_k^2}{\sigma_k^4} \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right); \end{aligned}$$

Beide Summen laufen von eins bis N.

Lineare Regression - Fehler

$$\sigma_z^2 = \sum_k \left[\sigma_k^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_k} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right); \quad \Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

Analog bestimmen wir den Fehler in b :

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left[\frac{x_k^2}{\sigma_k^4} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \frac{x_k}{\sigma_k^4} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_k^4} \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right); \end{aligned}$$

Beide Summen laufen von eins bis N.

Lineare Regression - Fehler

Wir erhalten also allgemein folgende Fehler, die beide nicht von den y_i abhängen:

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right); \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right);$$

$$\text{mit } \Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

Falls jeder Datenpunkt den gleichen Fehler aufweist, lässt sich dies abermals vereinfachen.

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta^s} \sum x_i^2; \quad \sigma_b^2 = N \frac{\sigma^2}{\Delta^s};$$

$$\text{mit } \Delta^s = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2.$$

Lineare Regression - Fehler

Es kann allgemein gezeigt werden, dass die Stichprobenvarianz für eine erwartungstreue Schätzung gegeben ist durch:

$$s^2 \equiv \frac{1}{N - c} \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

Dabei ist N die Anzahl der beobachteten Klassen und c Anzahl der aus den Daten berechneten und/oder in der Rechnung verwendeten Parameter c.

Mit anderen Worten: im Nenner vor der Summe stehen die Freiheitsgrade

In unserem konkreten Fall passen wir die Daten an für:

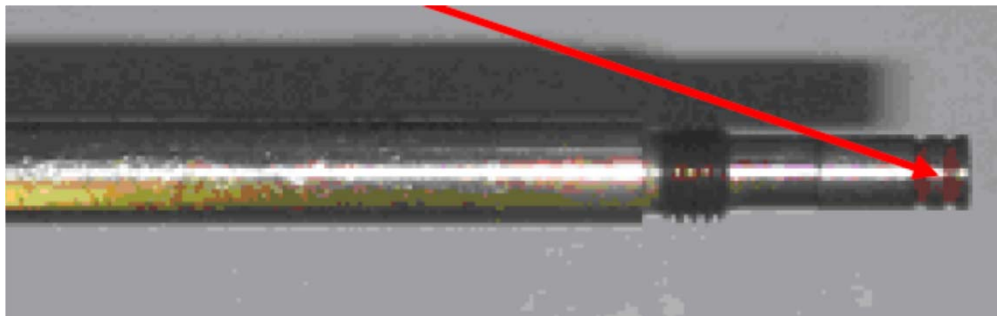
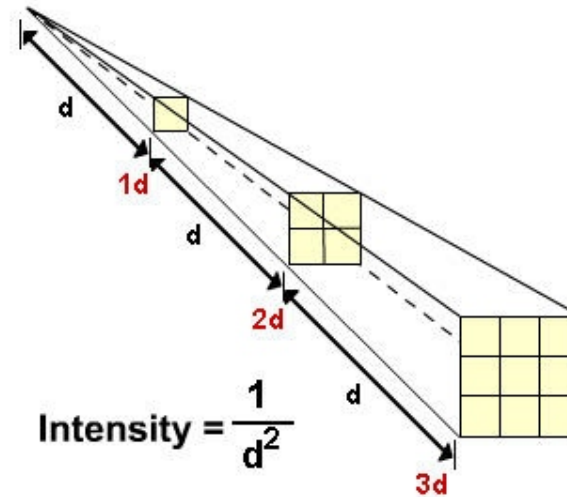
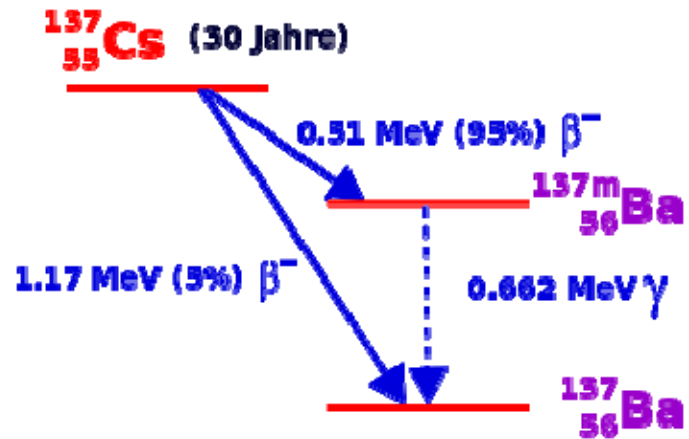
$$y = a + bx.$$

Und damit:

$$s^2 = \frac{1}{N - 2} \sum_i (y_i - a - bx_i)^2$$

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137



X

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137

Zählereignisse bei fester Messzeit in Abhängigkeit des Abstandes

Abstand (m)	Zählereignisse
0,20	44
0,25	18
0,30	17
0,35	6
0,4	8
0,45	9
0,50	9
0,60	11
0,75	3
1,00	3

**Die Untergrund ist bereits
abgezogen.**

**Weiterhin vereinfachende Annahme:
Untergrund fehlerfrei.**

**Die Darstellung wollen wir
zunächst linearisieren.**

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137

Zählereignisse bei fester Messzeit in Abhängigkeit des Abstandes

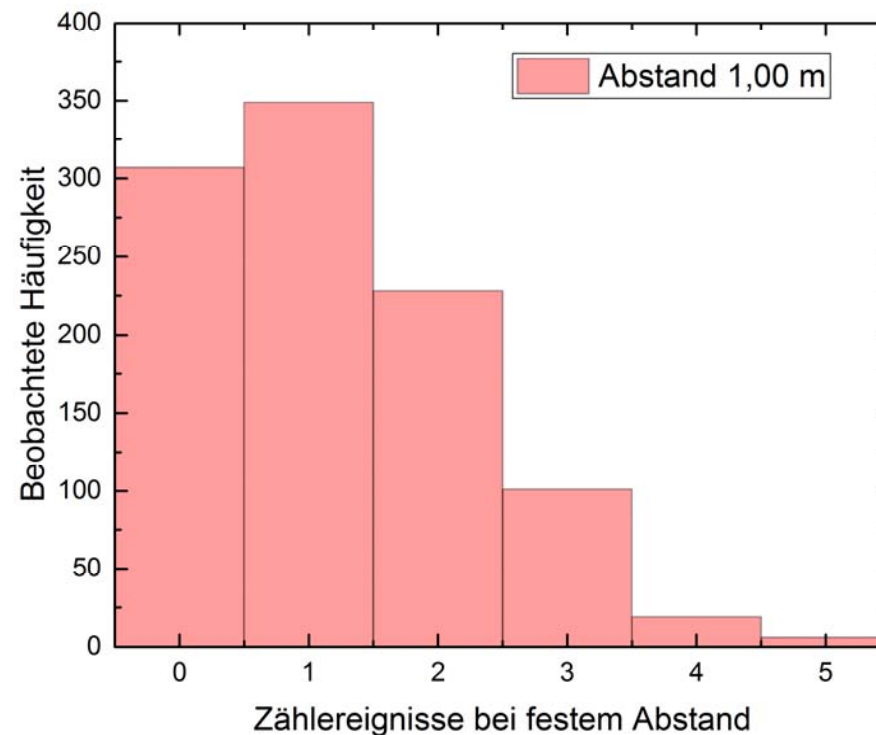
Inverses Abstandsquadrat (m^{-2})	Zählereignisse
25,00	44
16,00	18
11,11	17
8,16	6
6,25	8
4,94	9
4,00	9
2,78	11
1,78	3
1,00	3

Messunsicherheit?

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137

Messreihe: Betrachte Verteilung der Zählereignisse bei festem Abstand



N = 1010

Hypothesentest zeigt das diese Verteilung gut durch eine Poissonverteilung beschrieben ist.

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137

Zählereignisse bei fester Messzeit in Abhängigkeit des Abstandes

Inverses Abstandsquadrat (m^{-2})	Zählereignisse	Poissonfehler
25,00	44	6,6
16,00	18	4,2
11,11	17	4,1
8,16	6	2,4
6,25	8	2,8
4,94	9	3,0
4,00	9	3,0
2,78	11	3,3
1,78	3	1,7
1,00	3	1,7

Wiederholung: Vorüberlegungen

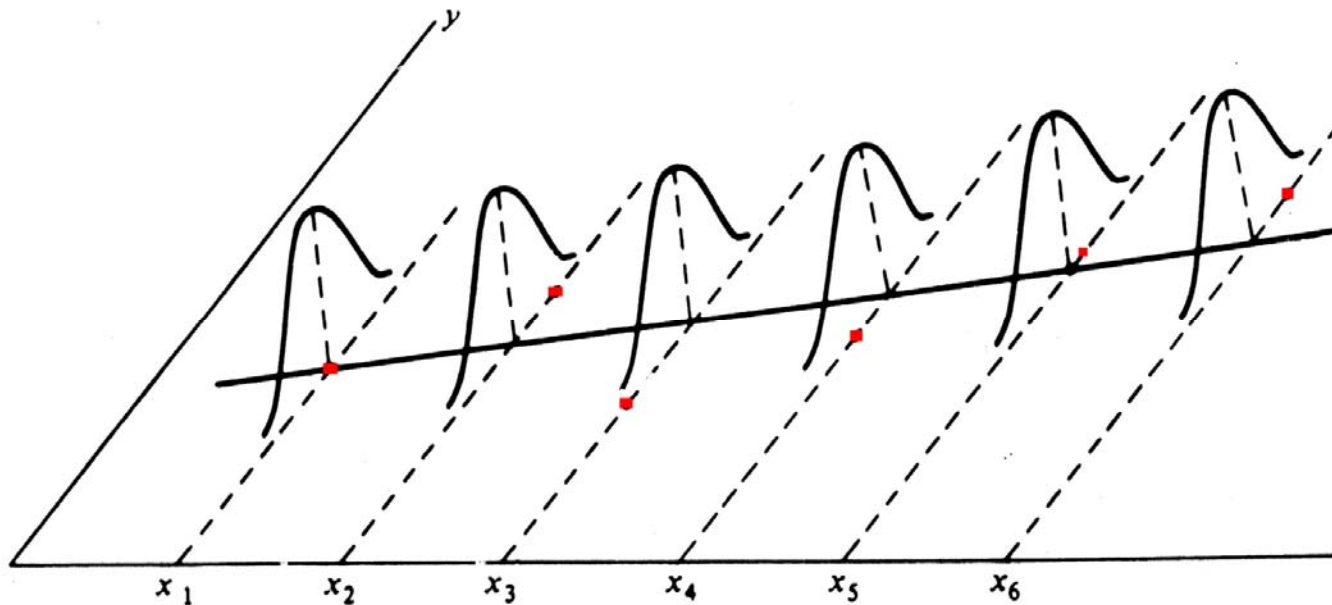
$$y = a + bx.$$

Für jedes X_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit P_i den Messwert Y_i zu erhalten.

Bisher: Normalverteilung der Messwerte

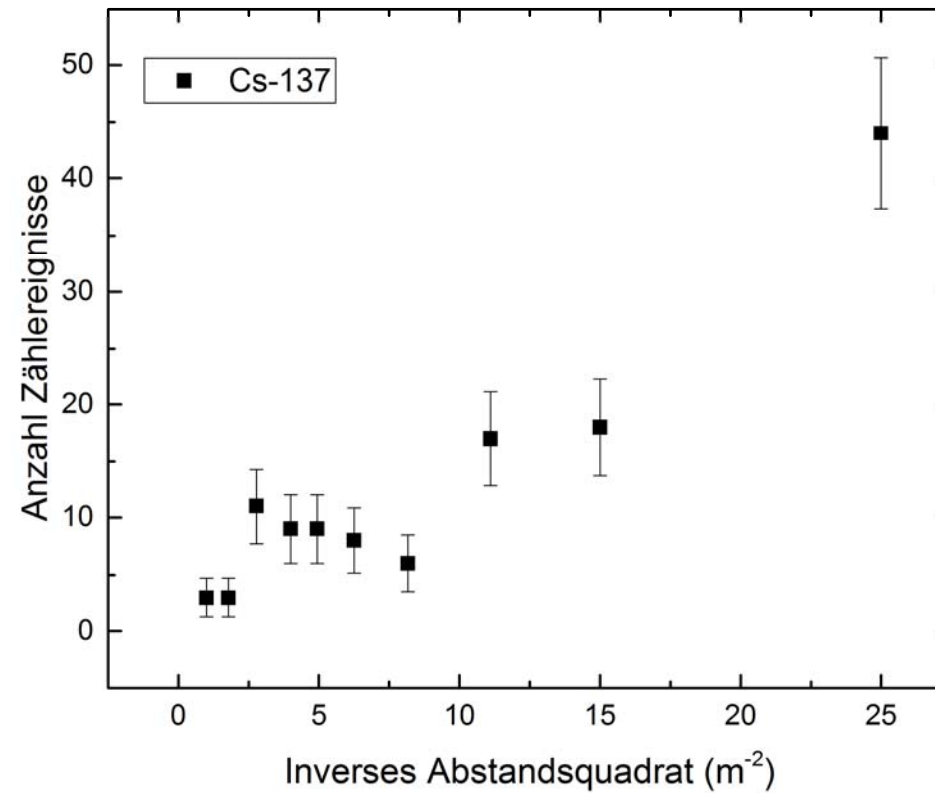
$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

Offensichtlich nicht gegeben. Wie kritisch?



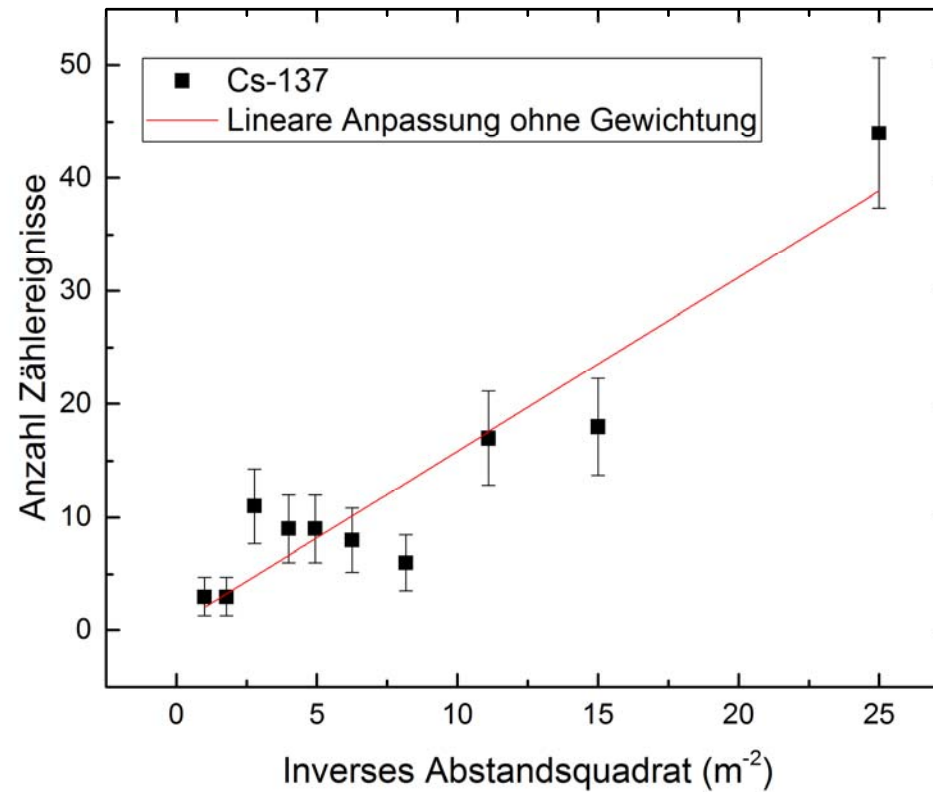
Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137



Konkretes Beispiel

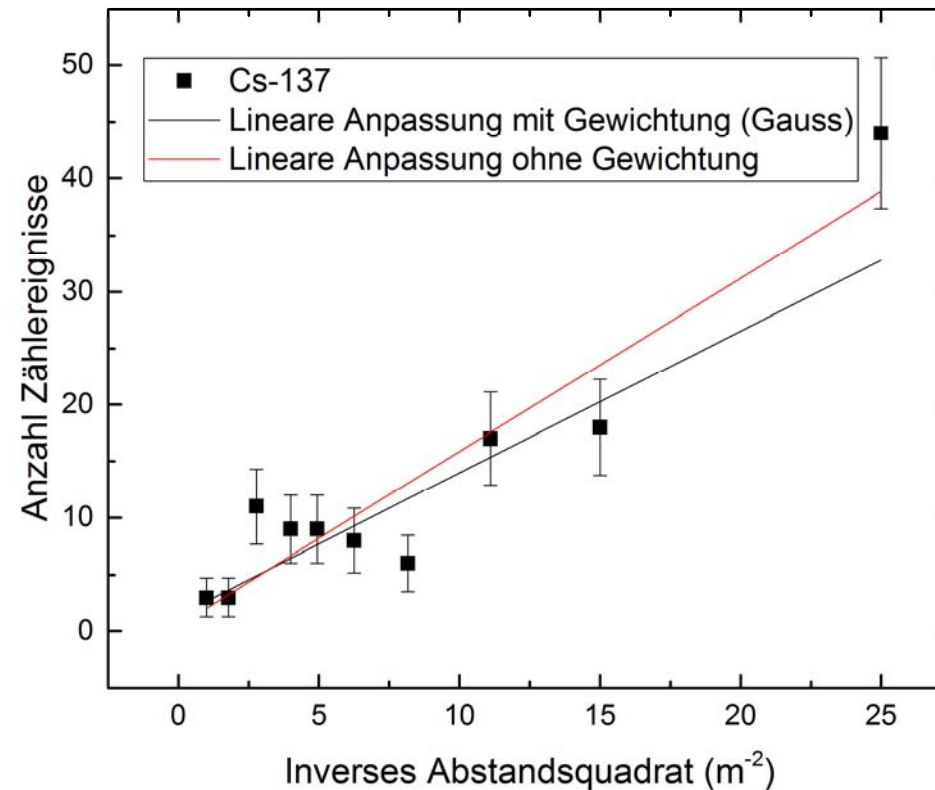
Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137



$$a = (0,7 \pm 2,2); b = (1,50 \pm 0,21)$$

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137



$$a = (0,7 \pm 2,7); b = (1,50 \pm 0,21)$$

$$a = (1,5 \pm 1,2); b = (1,22 \pm 0,19)$$



Annahme einer Poissonverteilung

$$P_i = \frac{[y(x_i)]^{y_i}}{y_i!} \exp\{-y(x_i)\}$$

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei N Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$P(a_0, b_0) = \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \frac{[y(x_i)]^{y_i}}{y_i!} \exp\{-y(x_i)\}$$

Die beste Gerade liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Es ist einfacher zunächst den Logarithmus zu bilden und damit zu den Parametersatz für die maximale Wahrscheinlichkeit zu suchen

$$\log[P(a_0, b_0)] = \log \left[\prod_{i=1}^N \frac{[y(x_i)]^{y_i}}{y_i!} \exp\{-y(x_i)\} \right]$$

Regression bei Poissonverteilung

$$\log[P(a_0, b_0)] = \log \left[\prod_{i=1}^N \frac{[y(x_i)]^{y_i}}{y_i!} \exp\{-y(x_i)\} \right]$$

$$\log[P(a_0, b_0)] = \sum y_i \log[y(x_i)] - \sum \log[y_i!] - \sum y(x_i)$$

Die Summengrenzen lassen wir wieder weg (läuft wie immer über alle Datenpunkte).

Der mittlere Term hängt nicht von unseren Regressionsparametern ab.
Bestimme nun Bestwerte wie üblich durch Extremwertsuche.

$$\frac{\partial}{\partial a} \log[P(a_0, b_0)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \log[P(a_0, b_0)] = 0$$

Regression bei Poissonverteilung

$$\log[P(a_0, b_0)] = \sum y_i \log[y(x_i)] - \sum \log[y_i!] - \sum y(x_i)$$

$$\text{mit } y(x_i) = a + bx_i$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log[P(a_0, b_0)] = \sum \frac{y_i}{a + bx_i} - \underbrace{\sum 1}_{= N}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \log[P(a_0, b_0)] = \sum \frac{y_i x_i}{a + bx_i} - \sum x_i$$

Regression bei Poissonverteilung - Bestwerte

$$P_i = \frac{[y(x_i)]^{y_i}}{y_i!} \exp\{-y(x_i)\}$$

Damit erhalten wir folgende zwei gekoppelte Gleichungen:

$$N = \sum \frac{y_i}{a + bx_i}$$

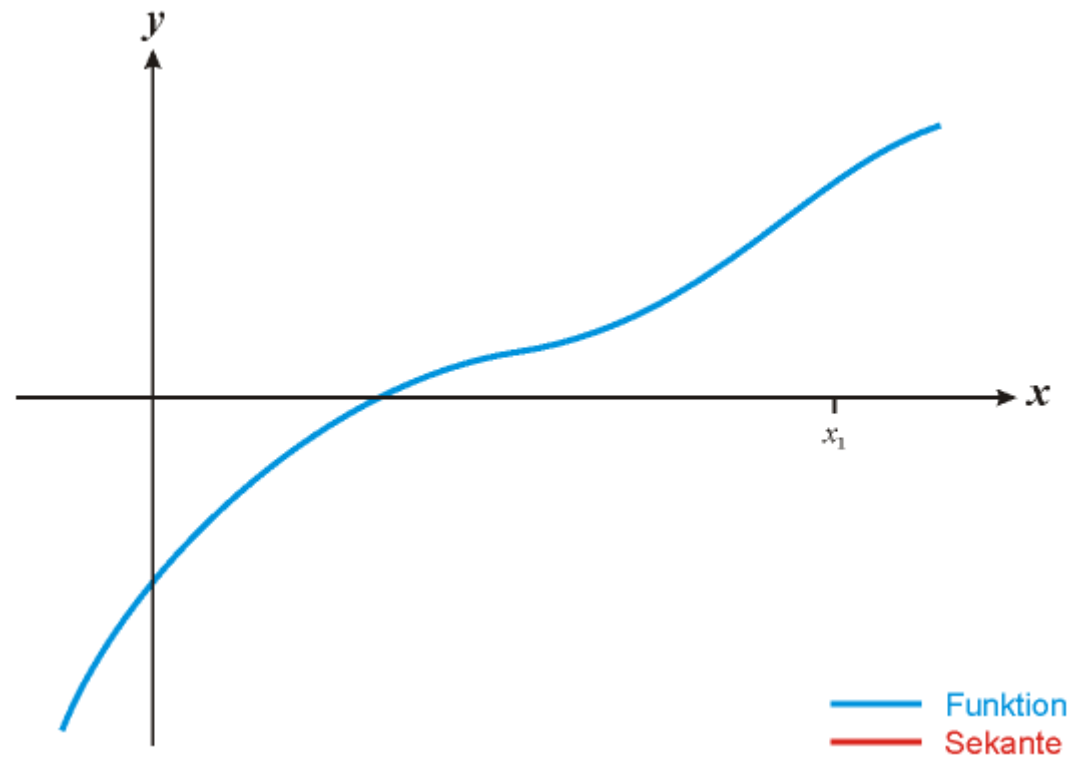
$$\sum x_i = \sum \frac{y_i x_i}{a + bx_i}$$

Ab hier geht es nicht mehr analytisch. Betrachte nun numerische Möglichkeiten.

Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

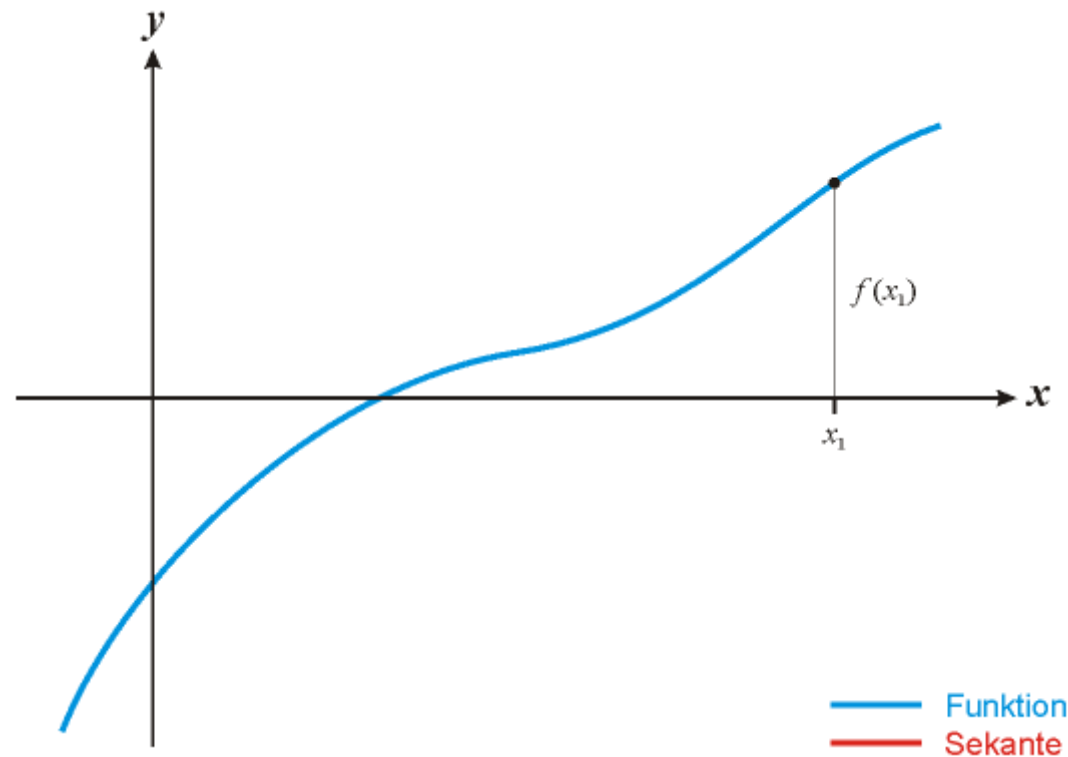
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

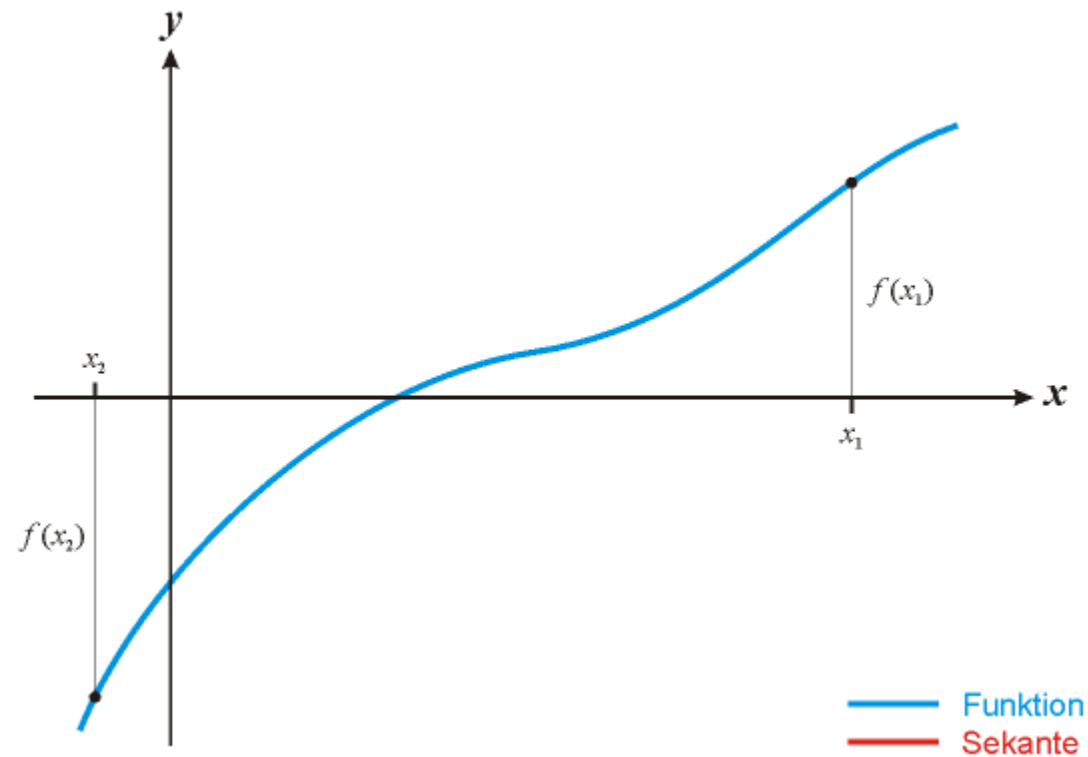
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

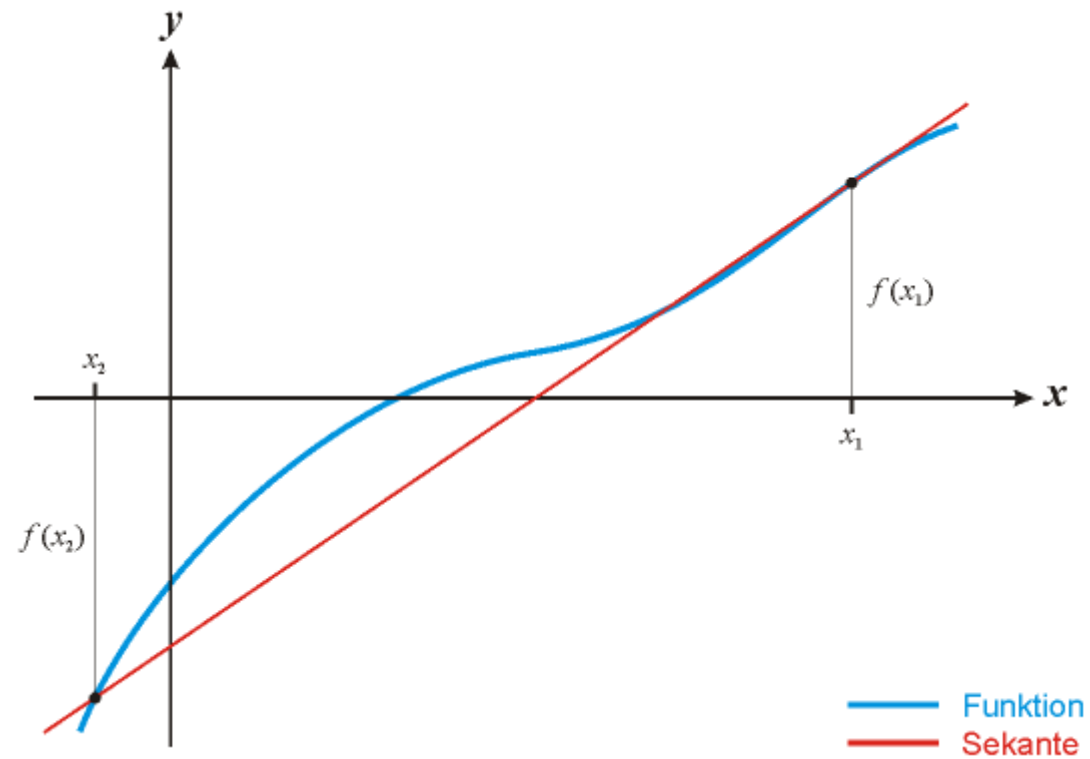
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

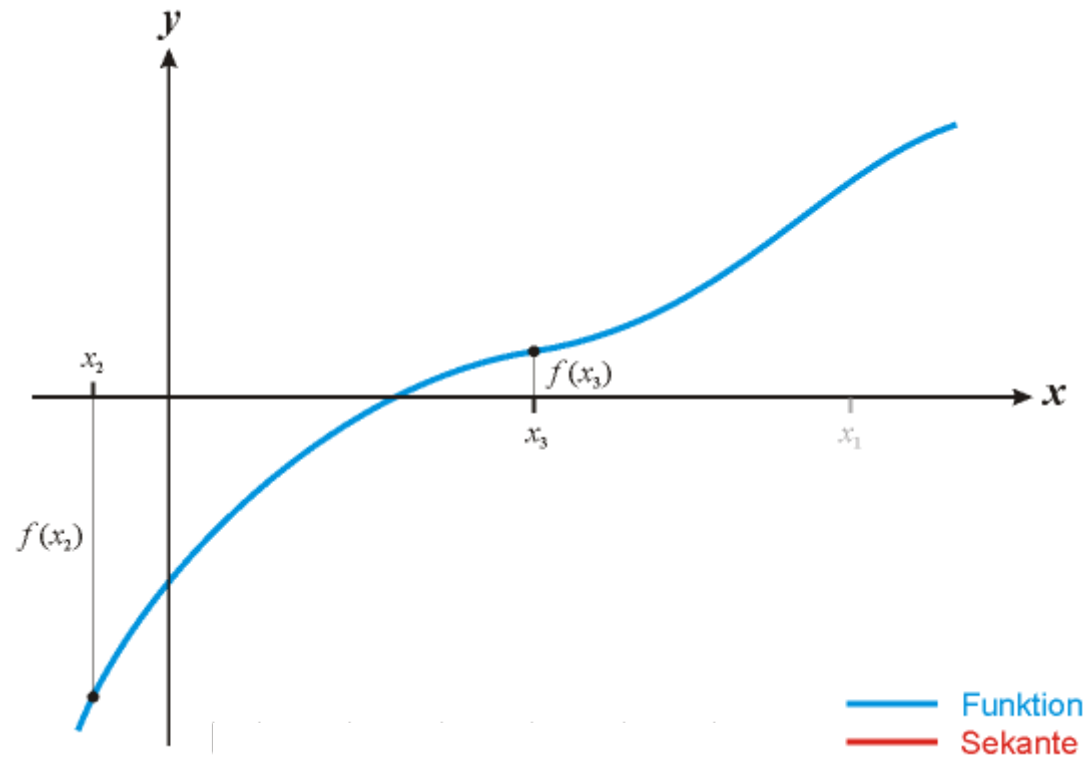
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

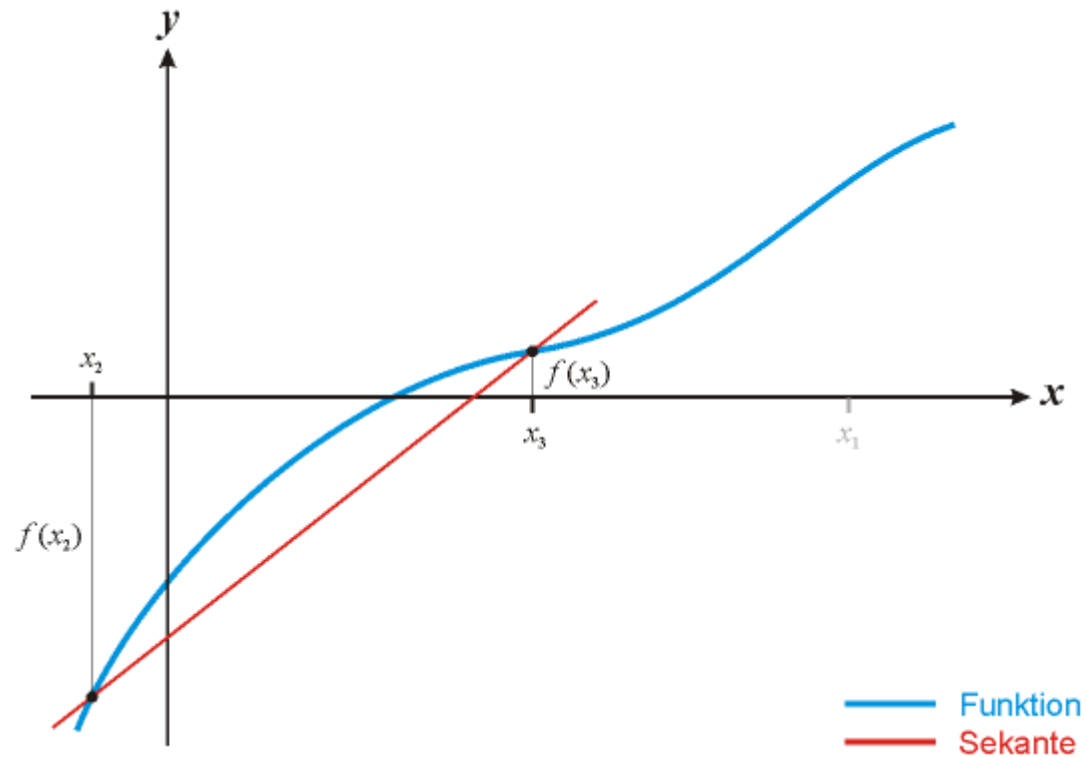
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

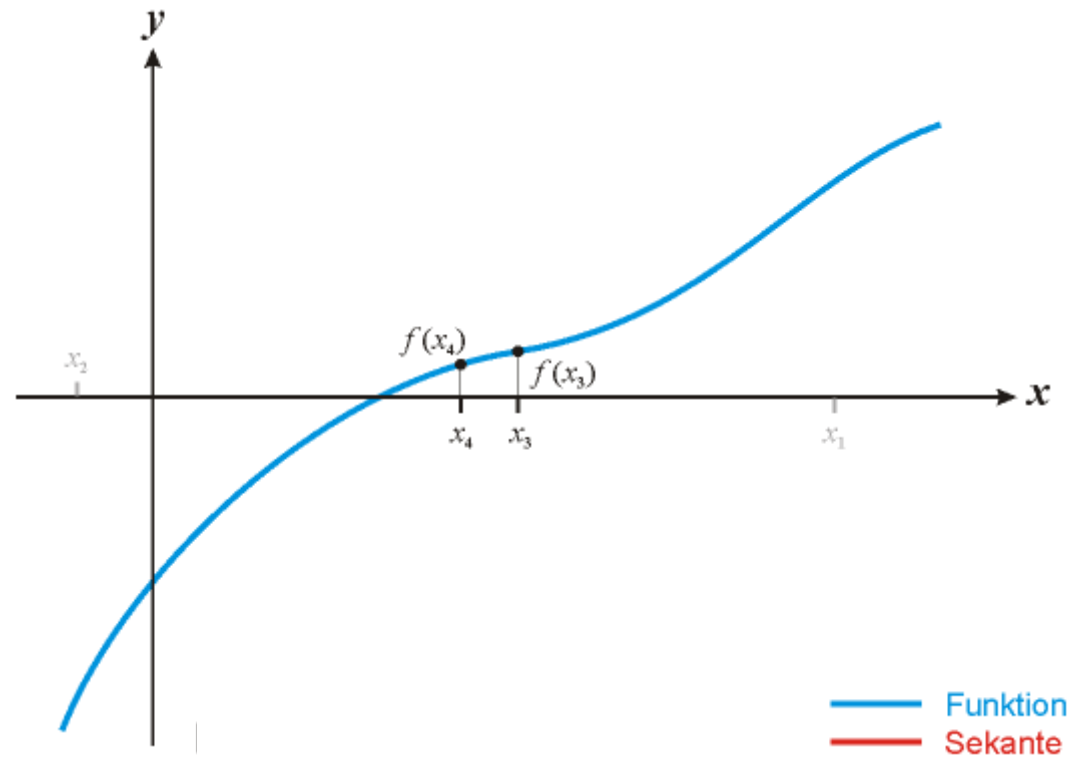
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

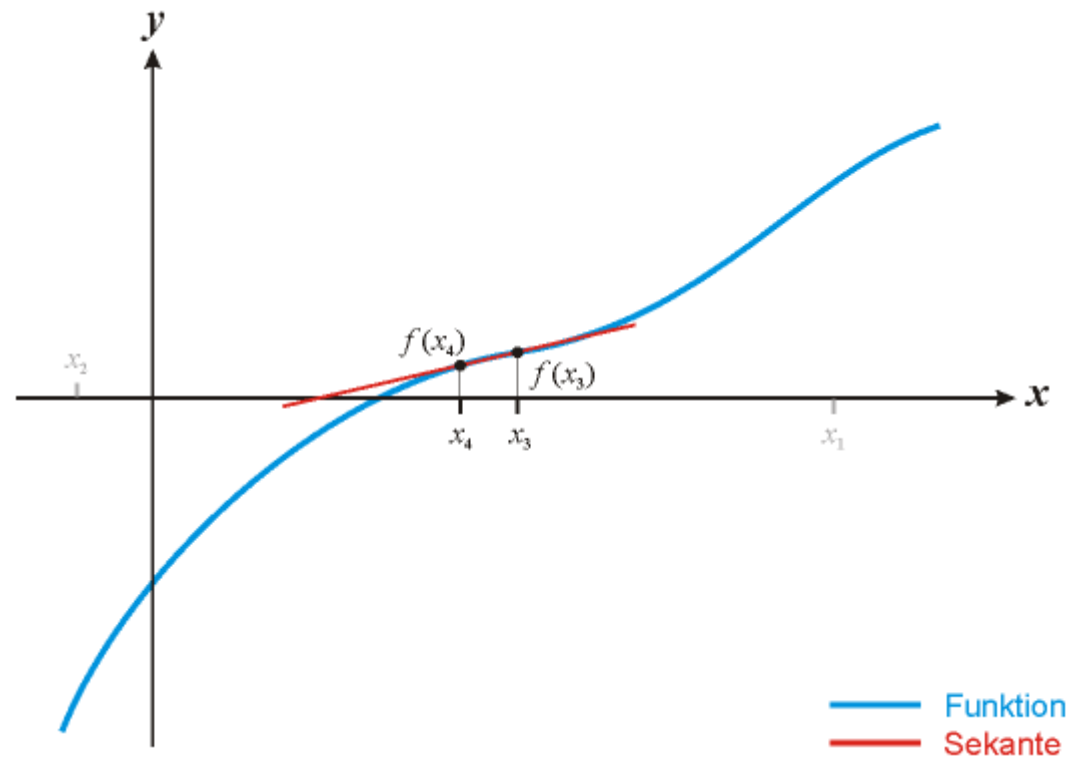
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

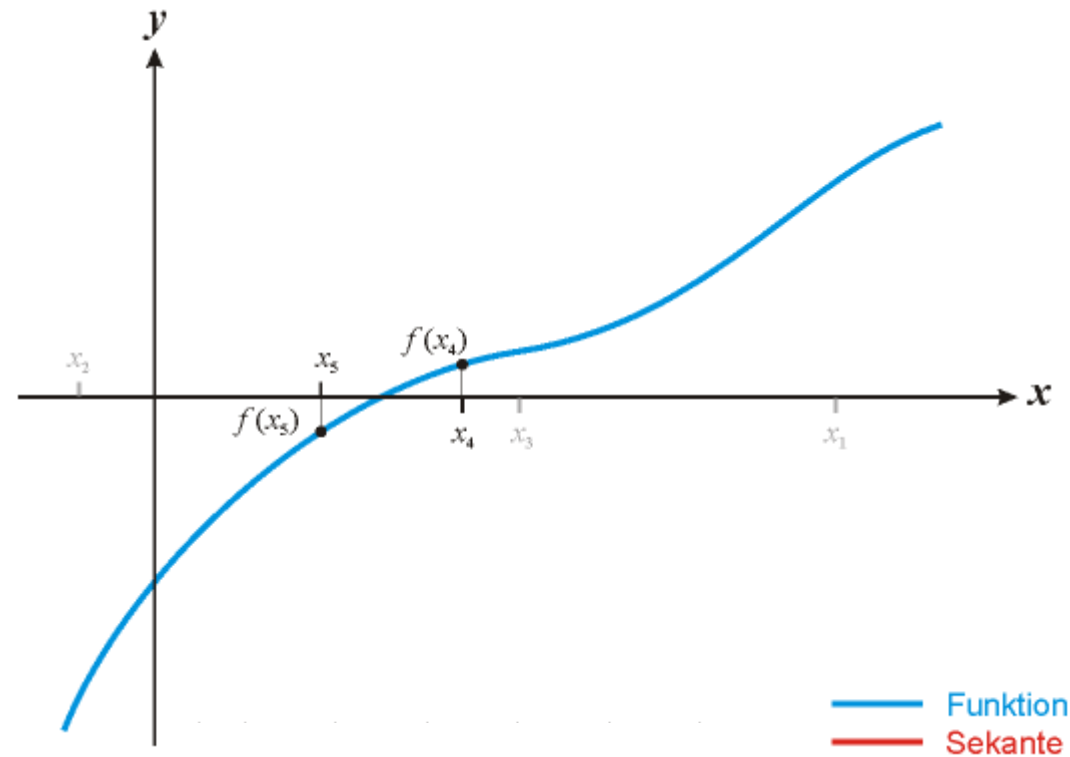
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

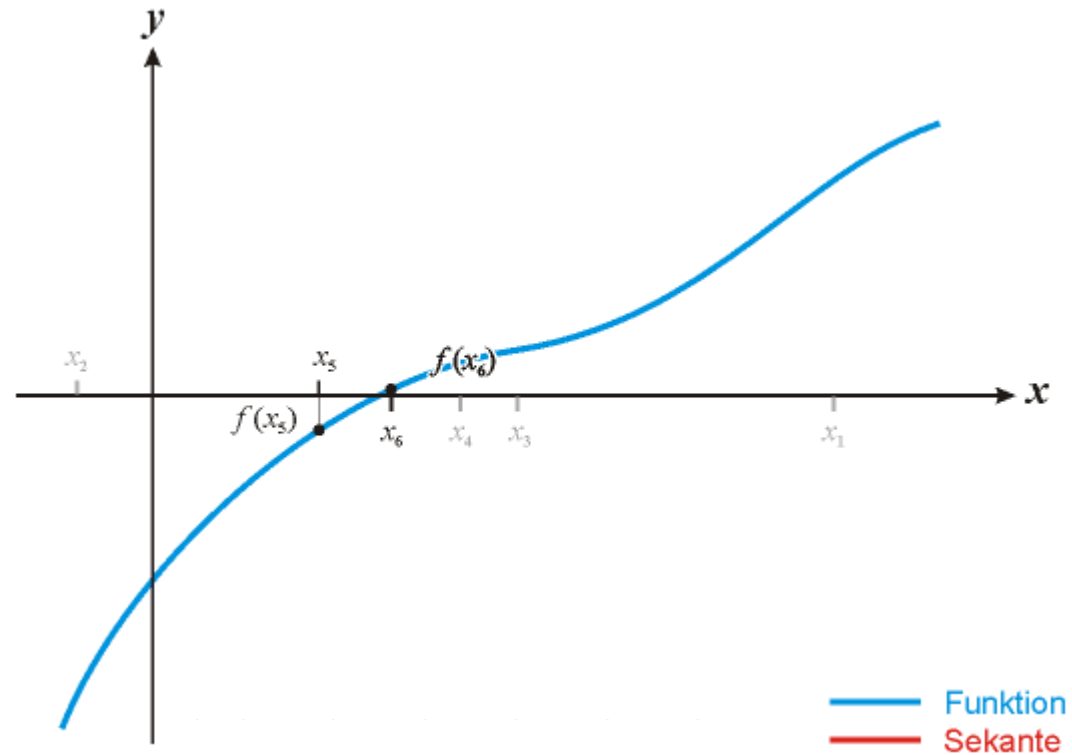
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Iteratives Verfahren: Suche Nullstelle einer Funktion nach folgender Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



Sekantenverfahren

Vorteile:

- 1.) Es müssen nur Funktionswerte bestimmt werden. Viele andere Verfahren nutzen Ableitungen, was problematisch bei nicht hinreichend glatten Funktionen ist. Daher sehr robust.
- 2.) Nur ein Rechenschritt pro Iterationsschritt.
- 3.) Über Wahl der Startpunkte wird der Bereich eingeschränkt, in dem gesucht wird. Vorsicht: Das kann auch ein Nachteil sein bei unpassender Wahl.

Nachteile:

- 1.) Nur superlineares Konvergenzverhalten
- 2.) Bestimmung der Differenzenquotienten kann numerisch Probleme bereiten (Auf Maschinenpräzision achten¹).

Sekantenverfahren

Wir benötigen es nun in zwei Dimensionen:

$$f_1(a, b) = \sum \frac{y_i}{a + bx_i} - N \stackrel{!}{=} 0$$

$$f_2(a, b) = \sum \frac{y_i x_i}{a + bx_i} - \sum x_i \stackrel{!}{=} 0$$

Damit bestimmen wir zunächst Funktionswerte für zwei Punktepaare (a_0, b_0) , (a_1, b_1) , und linearisieren zwischen diesen:

$$f_1(a, b) = f_1(a_0, b_0) + (a - a_0)\Delta f_{1a} + (b - b_0)\Delta f_{1b}$$

$$f_2(a, b) = f_2(a_0, b_0) + (a - a_0)\Delta f_{2a} + (b - b_0)\Delta f_{2b}$$

Sekantenverfahren

Bestimme Differenzenquotienten:

$$\Delta f_{1a} = f_1[a_0, b_0; a_1, b_0] \equiv \frac{f_1(a_1, b_0) - f_1(a_0, b_0)}{a_1 - a_0}$$

$$\Delta f_{1b} = f_1[a_0, b_0; a_0, b_1] \equiv \frac{f_1(a_0, b_1) - f_1(a_0, b_0)}{b_1 - b_0}$$

$$\Delta f_{2a} = f_2[a_0, b_0; a_1, b_0] \equiv \frac{f_2(a_1, b_0) - f_2(a_0, b_0)}{a_1 - a_0}$$

$$\Delta f_{2b} = f_2[a_0, b_0; a_0, b_1] \equiv \frac{f_2(a_0, b_1) - f_2(a_0, b_0)}{b_1 - b_0}$$

Sekantenverfahren

Damit können wir ein lineares Gleichungssystem in a, b lösen:

$$a\Delta f_{1a} + b\Delta f_{1b} - a_0\Delta f_{1a} - b_0\Delta f_{1b} + f_1(a_0, b_0) = 0$$

$$a\Delta f_{2a} + b\Delta f_{2b} - a_0\Delta f_{2a} - b_0\Delta f_{2b} + f_2(a_0, b_0) = 0$$

und erhalten:

$$a = a_2 = (A\Delta f_{2b} - B\Delta f_{1b})/D$$

$$b = b_2 = (B\Delta f_{1a} - A\Delta f_{2a})/D$$

mit:

$$D = \Delta f_{1a}\Delta f_{2b} - \Delta f_{1b}\Delta f_{2a}$$

$$A = a_0\Delta f_{1a} + b_0\Delta f_{1b} - f_1(a_0, b_0)$$

$$B = a_0\Delta f_{2a} + b_0\Delta f_{2b} - f_2(a_0, b_0)$$

Sekantenverfahren

$$a = a_2 = (A\Delta f_{2b} - B\Delta f_{1b})/D$$

$$b = b_2 = (B\Delta f_{1a} - A\Delta f_{2a})/D$$

mit:

$$D = \Delta f_{1a}\Delta f_{2b} - \Delta f_{1b}\Delta f_{2a}$$

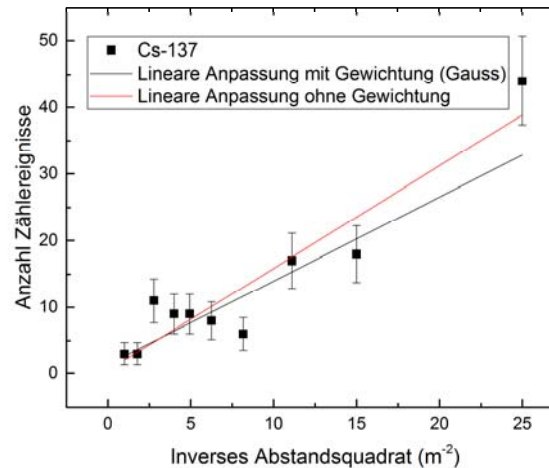
$$A = a_0\Delta f_{1a} + b_0\Delta f_{1b} - f_1(a_0, b_0)$$

$$B = a_0\Delta f_{2a} + b_0\Delta f_{2b} - f_2(a_0, b_0)$$

Mit unserem neuen Datenpaar (a_2, b_2) , starten wir dann die nächste Iteration (zusammen mit (a_1, b_1)) usw., bis wir das Ergebnis in vernünftiger Genauigkeit bestimmt haben.

Konkretes Beispiel

Messung des Abstandsgesetzes bei radioaktivem Zerfall an Cs-137



$$a = (0,7 \pm 2,7); b = (1,50 \pm 0,21)$$

$$a = (1,5 \pm 1,2); b = (1,22 \pm 0,19)$$

Mit Poisson'scher Regression erhalten wir folgende Bestwerte:

$$a = 2,10; b = 1,32$$

Fehler?