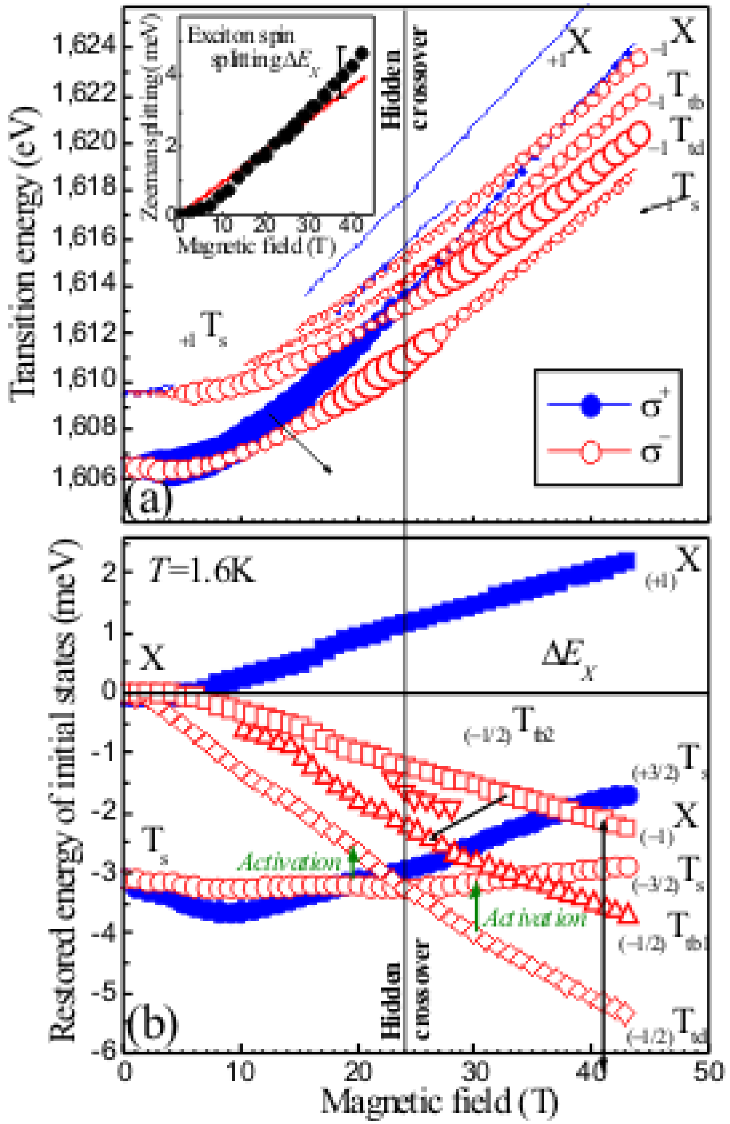

Exciton spin splitting ΔE_X
Zeeman splitting (meV)
Magnetic field (T)
Transition energy (eV)
Hidden crossover
(a)
(b)
T=1.6K
Activation
Restored energy of initial states (meV)
Magnetic field (T)

Fortgeschrittene Fehlerrechnung

11-P-FR2 Fortgeschrittene Fehlerrechnung und computergestütztes Arbeiten

Vorlesung

Übung

Diese Modul ist Pflicht für alle Studierenden mit Studienziel:

Physik (BP),
Nanostrukturtechnik (BN),
Mathematische Physik (BMP).

Es ist vorgesehen für das vierte Semester und dient der Vorbereitung der höheren Praktikumsmodule.
(Bachelor C-Modul, Master F-Praktikum)

Die Inhalte des Moduls 11-P-FR2 werden für die C-Praktikumsmodule als beherrscht vorausgesetzt.

Ankündigung Termine

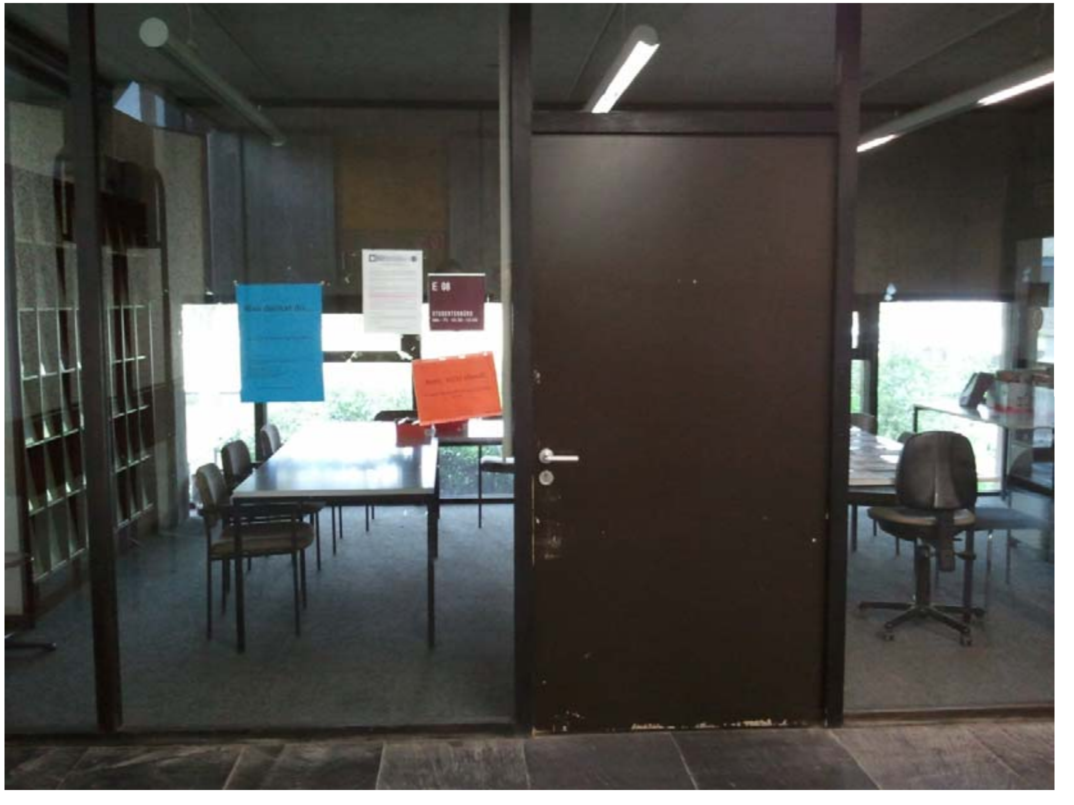
Zieldatum	Thema	Worum geht es?
26.04.2017	Verteilungsfunktionen	Poissonverteilung, Chi-Quadrat-Verteilung
03.05.2017	Hypothesentest	Signifikanztests allgemein, Chi-Quadrat-Test
10.05.2017	Korrelationen	Kovarianz, linearer Korrelationskoeffizient
17.05.2017	Regression I	Anpassung mit Polynomen
24.05.2017	Regression II	Anpassung an nicht-gaussverteilte Daten
31.05.2017	Regression III	Nichtlineare Anpassung
07.06.2017	Modellentwicklung	Modellentwicklung am Beispiel des Bierschaumzerfalls
14.06.2017	Linienformanpassung	Anpassung an Lorentz-/Gausskurven mit Untergrund
28.06.2017	Graphische Darstellungen	Computergestützte graphische Auswertung
05.07.2017	Weiterführende Fragestellungen	Einige Überlegungen zur Metrologie

Übungsaufgaben - Organisatorisches

Die Ausgabe der neuen Übungsblätter ist:

Freitag, 10:45 – 12:15 Uhr

Studentenbüro



Der Abgabetermin der bearbeiteten Übungsblätter ist:

Folgender Freitag, 13:00 Uhr im Fehlerrechnungsbriefkasten

Literatur

Die Veranstaltung basiert wesentlich auf folgenden Lehrbüchern:

- J. Hartung: „Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik", 2009
- P. Bevington: "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", 2003

Folien: https://www.physik.uni-wuerzburg.de/studium/studienganguebergreifende_infos_zum_studium/grundpraktikum/fortgeschrittene_fehlerrechnung/

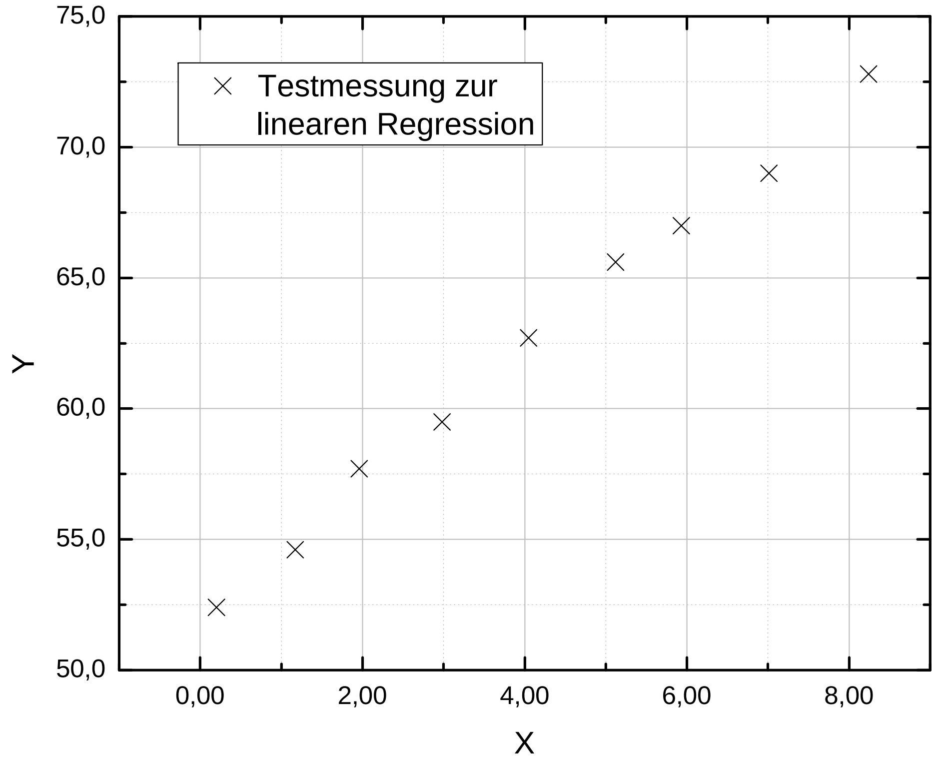
Sorry, das ist offenkundig wenig komfortabel und nur übergangsweise

Das „Handout“ ist lediglich ein grobes Gerüst.
Es ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch die intensive Beschäftigung mit dem Stoff.

Zentrale Fragestellungen

Wir führen eine Messung durch und erhalten folgende Werte:

X_i	Y_i
0,20	52,4
1,17	54,6
1,96	57,7
2,98	59,5
4,05	62,7
5,12	65,6
5,93	67,0
7,01	69,0
8,24	72,8



1.) Wie können wir objektiv beurteilen, inwieweit die Daten unsere Annahme erfüllen und wirklich einer bestimmten Funktion (hier einer Gerade) folgen?

2.) Angenommen die Beziehung zwischen *x* und *y* ist linear, welche Gerade passt am besten zu den Messwerten?

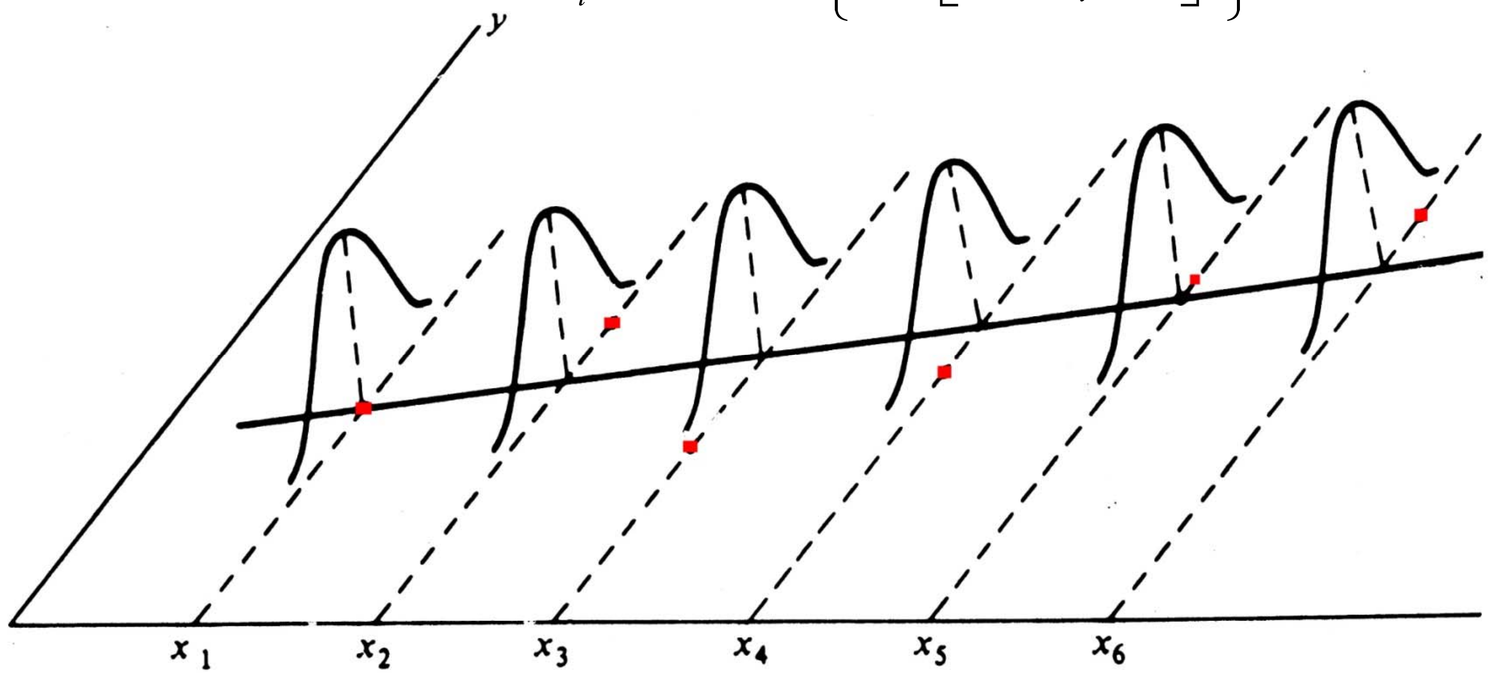
Vorüberlegungen

$$y = a + bx.$$

Für jedes X_i gibt es eine Wahrscheinlichkeit P_i den Messwert Y_i zu erhalten.

Normalverteilung der Messwerte:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$



Vorüberlegungen

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$

Die Wahrscheinlichkeit unseren Datensatz bei *N* Messpunkten genau so zu beobachten ist dann gegeben durch:

$$P(a_0, b_0) = \prod_{i=1}^{N} P_i = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$

Die beste Gerade liegt dann vor, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal wird. Das ist der Fall, wenn der Exponent

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i}\right]^2$$

minimal wird.

Vorüberlegungen

Das gesamte weitere Vorgehen beruht also auf der Annahme, dass unsere Datenpunkte verteilt sind nach:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right]^2\right\}$$

Wie können wir objektiv beurteilen, inwieweit die Daten unsere Annahme erfüllen und wirklich einer Normalverteilung folgen?

Ist es möglich unsere bisherigen Überlegungen zur Anwendung zu bringen, wenn die Daten einer anderen bekannten Verteilung folgen?

Verteilungsfunktionen III:

Wiederholung

Poissonverteilung

Chi-Quadrat-Verteilung

Was bisher geschah…

1.) Die Binomialverteilung

$$W(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Beschreibt Anzahl der Erfolge bei Serie gleichartiger und **unabhängiger** Versuche mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Bernoulli - Experiment)
- *W(m)* beschreibt, für gegebene Erfolgswahrscheinlichkeit *p*, die Wahrscheinlichkeit bei *n* Versuchen genau *m* Erfolge zu erzielen.
- Normiert, d. h. Summe über alle *W(m)* ist eins.
- Erwartungswert **M = n·p**
- Varianz: $\boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p\,(1-p) = M\,(1-p)}$

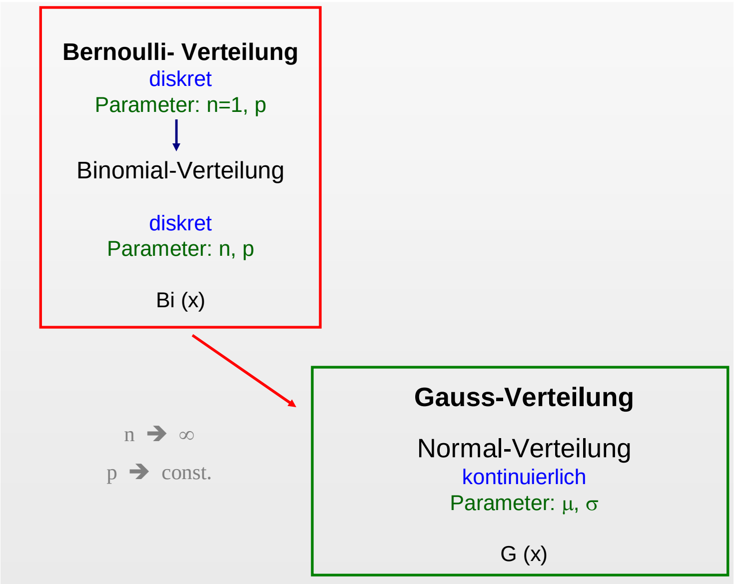
Was bisher geschah…

2.) Die Normalverteilung

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

- Kontinuierliche Verteilung
- Symmetrisch um den Erwartungswert *M,* geht schnell gegen null wen $(x - M)^2$ groß wird
- Standardabweichung gegeben durch σ, Wendepunkt der Verteilungsfunktion
- Normiert, d. h. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$
- Fehlerfunktion $P\left(\text{innerhalb } 1\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$
- Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ konvergiert Binomialverteilung gegen Normalverteilung

Von der Binomial- zur Normalverteilung



Wir machen eine Messung

Die Messwerte x_m setzen sich aus einer großen Zahl

von kleinen Elementarfehlern β zusammen,

die um den wahren Wert (Mittelwert) μ verteilt sind.

Die Elementarfehler treten n mal auf,

m mal positiv und n-m mal negativ.

Der Fehler f_m setzt sich somit zusammen aus (p = 1/2):

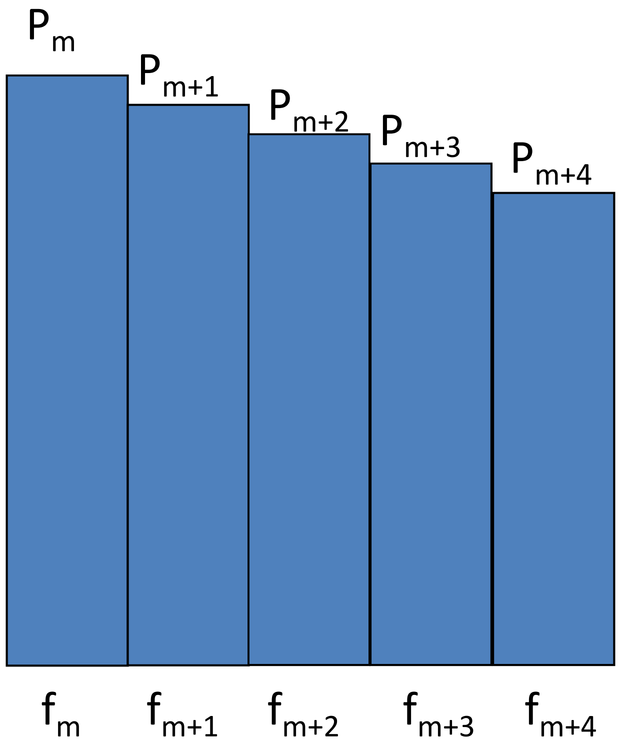
$$f_m = m\,\beta - (n-m)\,\beta = 2\,m\,\beta - n\,\beta$$

$$[m = n/2 + f_m / 2\,\beta]$$

Von der Binomial- zur Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler m mal positiv und n-m mal negativ auftritt wird durch die Binomial-Verteilung gegeben:

$$P_m = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = \binom{n}{m} \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{m!(n-m)!2^n}$$



Die Verteilung ist treppenförmig

Lassen wir β immer kleiner werden und *n* immer größer, dann wird die Anzahl der Stufen immer größer, die Kurve immer "glatter".

Versuch, eine Funktion zu finden, die den Verlauf beschreibt.

Von der Binomial- zur Normalverteilung

$f_m = m\,\beta - (n\text{-}m)\,\beta = \;\; 2\,m\,\beta - n\,\beta$

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{P_m - P_{m+1}}{f_m - f_{m+1}}$$

$$P_m = \binom{n}{m}\frac{1}{2^n} \qquad und \qquad P_{m+1} = \binom{n}{m+1}\frac{1}{2^n}$$

$$P_{m+1} = \frac{n-m}{m+1}P_m \quad sowie \quad f_m - f_{m+1} = -2\,\beta$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{n - 2m - 1}{m+1}\cdot\frac{P_m}{2\beta}$$

Die Rechnung soll durchgeführt werden für Fehler,
die klein sind gegen den maximalen Fehler, also

$f_m \ll n\,\beta$ und $m \gg 1$.

[$m = n/2 \; + \; f_m / 2\,\beta$]

Von der Binomial- zur Normalverteilung

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{n - 2m - 1}{m+1} \cdot \frac{P_m}{2\beta}$$

[$m = n/2 + f_m / 2\beta$]

$n - 2m - 1 \approx n - 2m = -f_m/\beta$

und der Nenner

$m + 1 \approx m = n/2 + f_m/2\beta \approx n/2$

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} \approx -\frac{P_m f_m}{n\beta^2} = -\frac{P f}{n\beta^2} = \frac{dP}{df}$$

Abkürzung : $n\beta^2 = \sigma^2$

$$\frac{dP}{df} = -\frac{P f}{\sigma^2} \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot f \cdot df \rightarrow \ln P = -\frac{1}{2\sigma^2} x^2 + const$$

$$\boxed{P = d \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}$$

Was fehlt ?

Wann ist $n \rightarrow \infty$ in der Praxis gut erfüllt?

FAUSTREGEL: $n \cdot p > 9$

d. h. *n* hinreichend groß und *p* nicht zu klein.

je asymmetrischer die Binomialverteilung, desto größer muss *n* sein um gut durch Normalverteilung genähert zu sein.

Was passiert, wenn *p* sehr klein ist?

Betrachten wir den Fall $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$,

mit der Nebenbedingung $n \cdot p = \mu$ konstant.

Verteilungsfunktionen III:

Wiederholung

Poissonverteilung

Chi-Quadrat-Verteilung

Von der Binomial- zur Poisson-Verteilung

Binomialverteilung $W(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$

<u>Gesucht:</u> $W(m)$ für $n \rightarrow \infty$ und $p = \mu/n$

$$\lim_{n\to\infty} W(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mu^m}{m!}\right)\left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-m}$$

$$= \left(\frac{\mu^m}{m!}\right) \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-m}}_{\to 1}$$

$$= \left(\frac{\mu^m}{m!}\right) \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

Von der Binomial- zur Poisson-Verteilung

$$\lim_{n\to\infty} W(m) = \left(\frac{\mu^m}{m!}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$$

Kurze Erinnerung: Euler‘sche Zahl und Näherungsformel Exponentialfunktion

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Damit:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} W(m) = \left(\frac{\mu^m}{m!}\right)e^{-\mu}}$$

Dies wird als Poisson`scher Grenzwertsatz oder als Gesetz seltener Ereignisse bezeichnet.

Poisson-Verteilung

Die Verteilung: $$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad wobei \;\; x = 0,1,2,3,\ldots.$$

heißt Poissonverteilung oder Verteilung seltener Ereignisse.

x ist die Anzahl von Ereignissen in einer bestimmten Zeit oder in einem bestimmten Volumen, wobei ein bestimmter Mittelwert μ solcher Ereignisse erwartet werden kann.

Die Ereignisse müssen zufällig und unabhängig voneinander sein.

Die Verteilung ist diskret und asymmetrisch.

Poisson-Verteilung

Konsistenz: Wie groß ist der Mittelwert (Erwartungswert)?

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Der erste Term der Summe ist Null.

Der Faktor x/x! kann durch 1/(x-1)! ersetzt werden.

$$\bar{x} = \mu e^{-\mu} \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}}_{1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\frac{\mu^3}{3!}+\ldots= e^{\mu}} = \mu$$

Das heißt der Parameter μ , der die Poisson-Verteilung charakterisiert,

ist gleich der mittleren Anzahl der gezählten Ereignisse, die erwartet wird,

wenn wir das Zählexperiment viele Male wiederholen.

Poisson-Verteilung

Wie groß ist die Standardabweichung ?

Zunächst Berechnung der Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right) \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\underbrace{-\sum_{x=0}^{\infty} 2\,x\,\mu \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}}_{-2\mu^2}$$

$$\underbrace{+\sum_{x=0}^{\infty} \mu^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}}_{+\mu^2}$$

Poisson-Verteilung

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Verschiebungssatz:

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

ersetzen von x^2 mit (x (x - 1) + x), führt zu

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(x(x-1) + x\right)\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\mu^x e^{-\mu}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\mu^x e^{-\mu}}{x!} + \mu - \mu^2$$

$$= \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2} e^{-\mu}}{(x-2)!} + \mu - \mu^2$$

Ersetzen von x-2 durch ν, summieren von $\nu = 0$
ergibt für die Summe den Wert eins und damit wird:

$$\sigma_\mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

$$\sigma_\mu = \sqrt{\mu}$$

Poisson-Verteilung

$$\sigma_\mu = \sqrt{\mu}$$

Die Standardabweichung ist somit gleich der Wurzel aus dem Mittelwert.

Der Fehler des Mittelwertes ist gegeben durch:

$$\sigma_{\overline{\mu}} = \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{n}}$$

wobei *n* die Anzahl der Messungen ist, die wir verwendet haben, um den Mittelwert zu bestimmen.

Der relative Fehler der Poisson-Verteilung ist somit:

$$\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{n}\mu} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}\mu} = \frac{1}{\sqrt{n\,\mu}}$$

Poisson-Verteilung

Die Anwendung der Poisson-Verteilung ist breit gefächert:

- Anzahl der Telefongespräche, die in einer bestimmten Zeit bei einer Firma eintreffen.
- Anzahl der Kunden an einem Bankschalter pro Zeiteinheit.
- Anzahl der Bakterien pro Liter Nährlösung.
- Anzahl der Verkehrsunfälle pro Zeiteinheit an einer Kreuzung.
- Anzahl der in einer bestimmten Zeit zerfallenden Atomkerne.

Poisson-Verteilung

Beispiel: An einer Kreuzung finden pro Woche zwei Verkehrsunfälle statt.
Die Häufigkeit der Verkehrsunfälle wird durch eine Poissonverteilung mit $\mu = 2$ beschrieben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Woche kein Unfall stattfindet ?

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0.135335$$

Poisson-Verteilung

Beispiel: An einer Kreuzung finden pro Woche zwei Verkehrsunfälle statt.
Die Häufigkeit der Verkehrsunfälle wird durch eine Poissonverteilung mit $\mu = 2$ beschrieben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
dass weniger als <u>vier</u> Verkehrsunfälle in <u>zwei</u> Wochen stattfinden ?

$P(\leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.4335$

$$P(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = 0.018316$$

$$P(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0.073264$$

$$P(2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 0.146528$$

$$P(3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0.195367$$

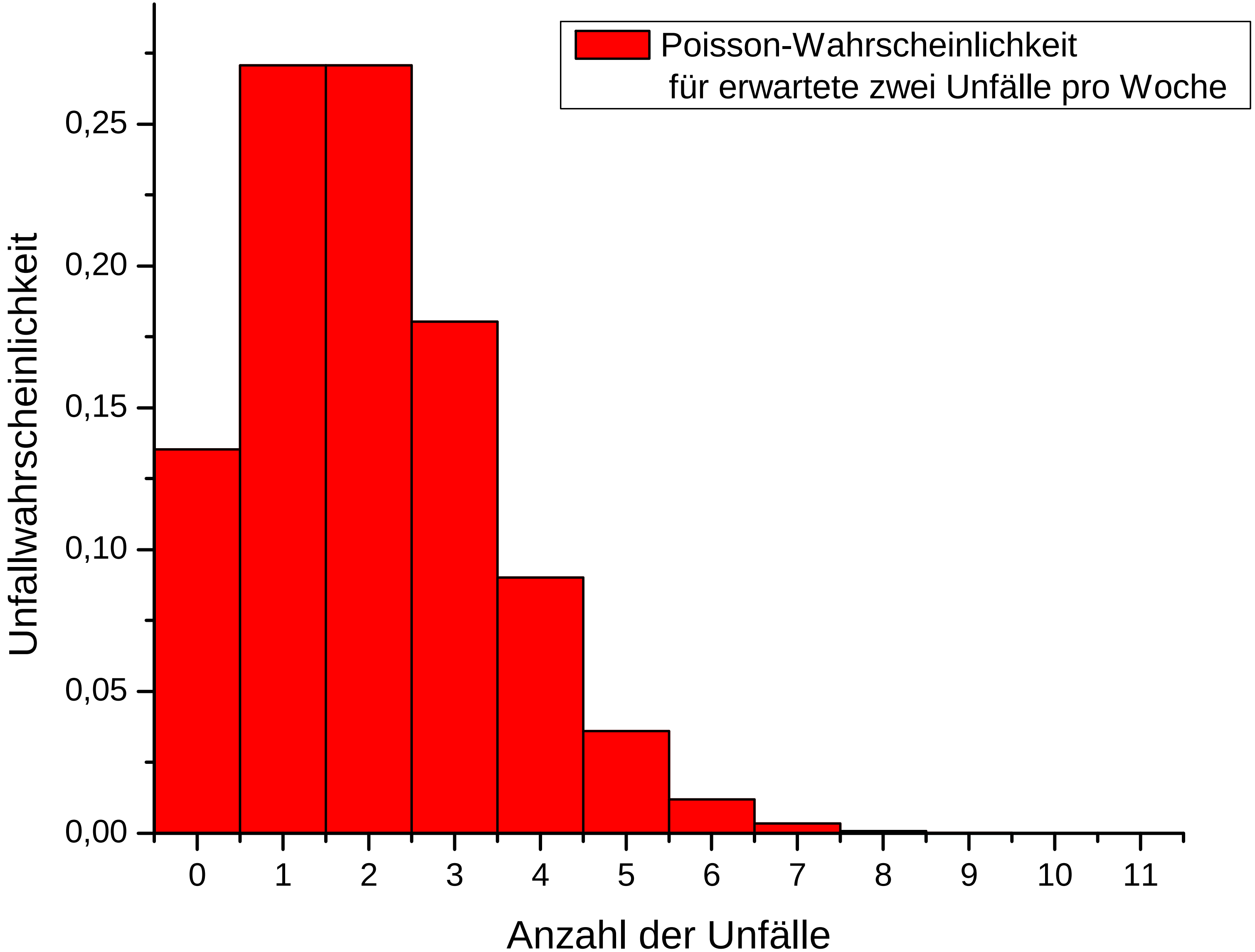
Ähnliche Fragen sind z. B. wie viele Kinder werden pro Tag in einem Krankenhaus geboren ?
(Jahreszeitliche Schwankungen) !!.

Liegt tatsächlich eine Poissonverteilung vor ?

Qualitativer graphischer Vergleich

Quantitativ mittels χ^2-Test

Poisson-Verteilung



Poisson-Verteilung

Betrachte die Anzahl der Unfälle an der Kreuzung über ein Jahr: Poissonverteilt?

Anzahl Unfälle	Häufigkeit	Relative Häufigkeit
0	7	0,13462
1	14	0,26923
2	16	0,30769
3	9	0,17308
4	4	0,07692
5	1	0,01923
6	0	0
7	1	0,01923
8	0	0

Wie groß ist der Mittelwert?

Poisson-Verteilung

Anzahl Unfälle	Häufigkeit	Relative Häufigkeit
0	7	0,13462
1	14	0,26923
2	16	0,30769
3	9	0,17308
4	4	0,07692
5	1	0,01923
6	0	0
7	1	0,01923
8	0	0

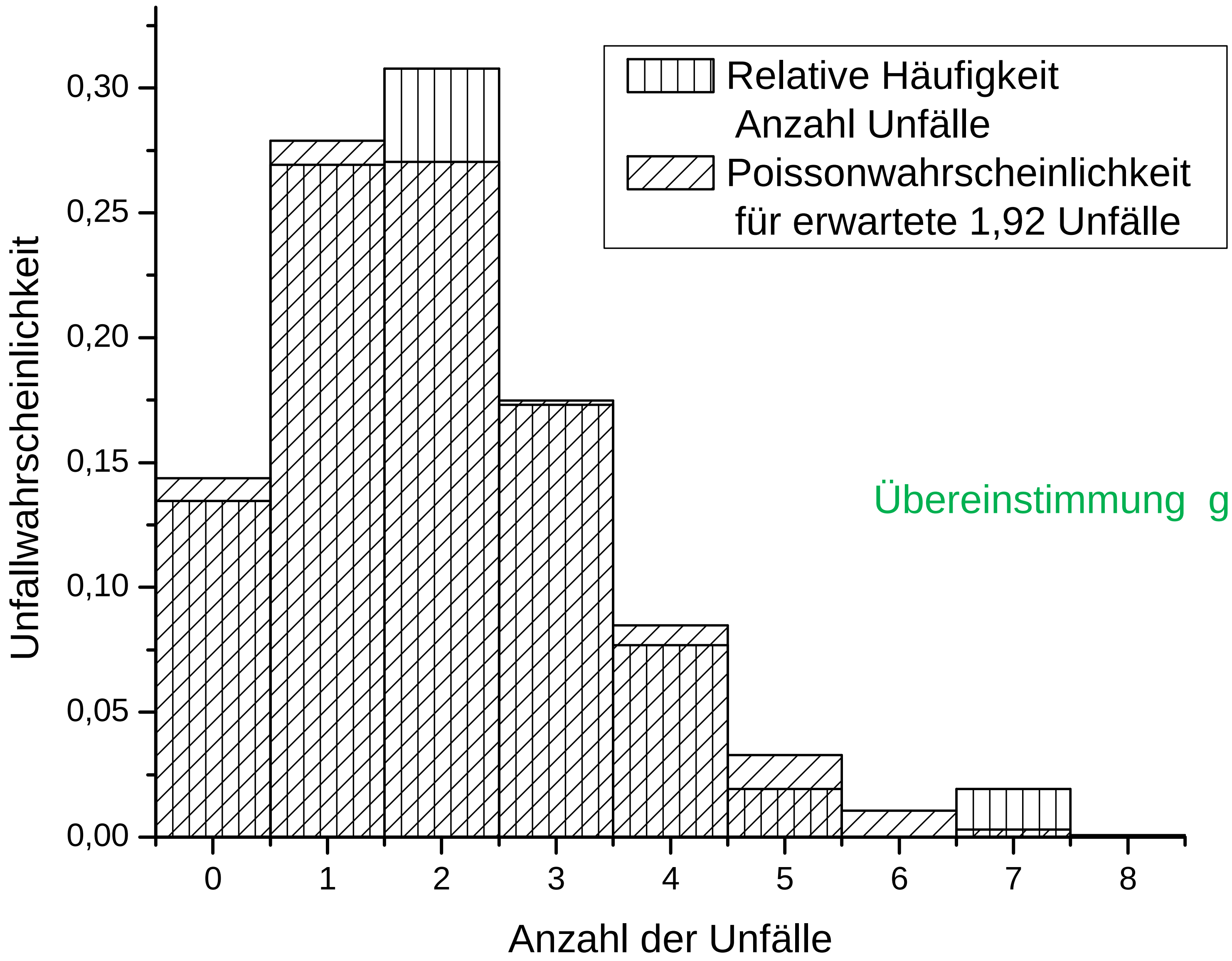
$$\mu = (0\cdot 7 + 1\cdot 14 + 2\cdot 16 + 3\cdot 9 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 + 7\cdot 1 + 8\cdot 0)/52 = 1{,}94$$

Poisson-Verteilung

Betrachte die Anzahl der Unfälle an der Kreuzung über ein Jahr: Poissonverteilt?

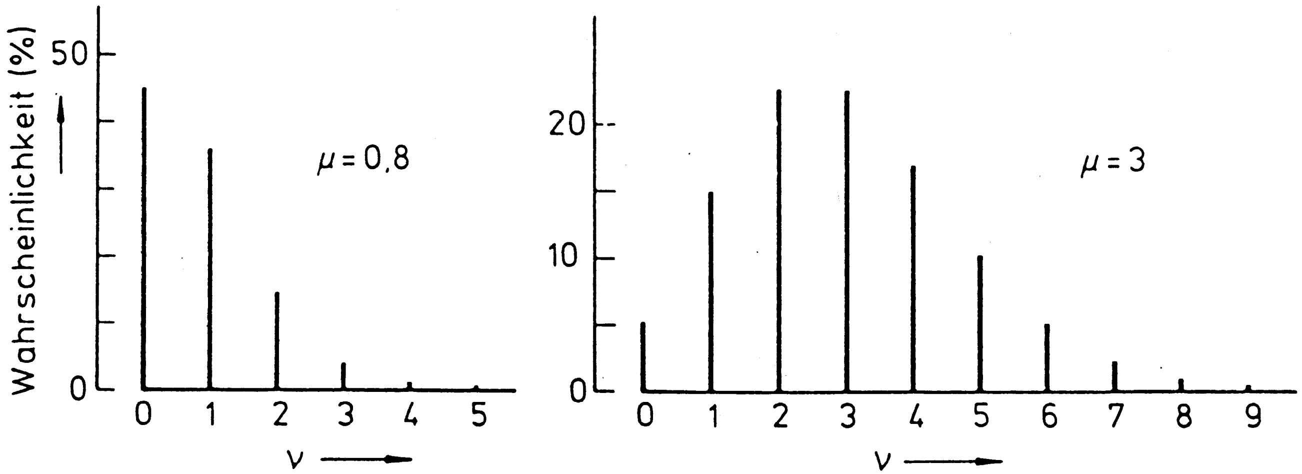
Anzahl Unfälle	Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Poissonwahr.
0	7	0,13462	0,144
1	14	0,26923	0,279
2	16	0,30769	0,270
3	9	0,17308	0,175
4	4	0,07692	0,085
5	1	0,01923	0,033
6	0	0	0,011
7	1	0,01923	0,003
8	0	0	0,001

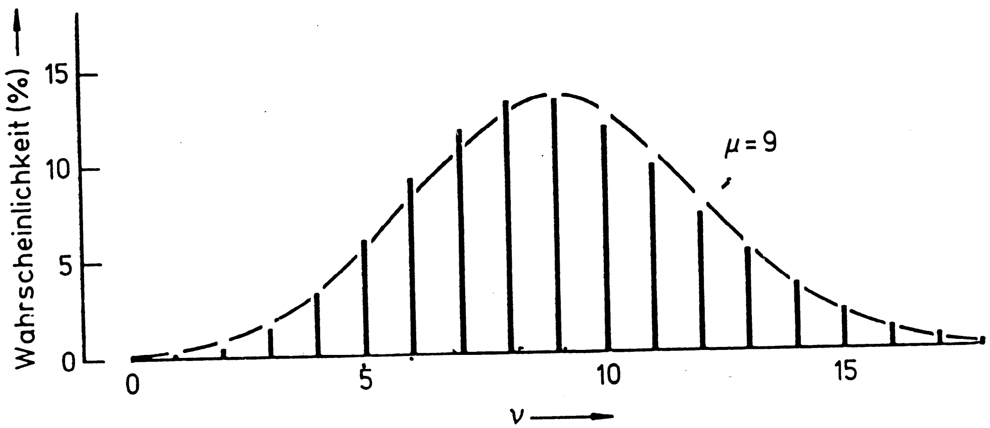
Poisson-Verteilung



Übereinstimmung gut?

Zusammenhang der Poisson- und Normalverteilung





Poisson-Verteilung

diskret

Parameter $\mu = \sigma^2$

P(x)

$\mu \rightarrow \infty$

$\mu = n p$

Gauss-Verteilung

Normal-Verteilung

kontinuierlich

Parameter: μ, σ

G (x)

Vorlesung 5 44

Zusammenhang der Verteilungen

Bernoulli - Verteilung

diskret

Parameter: $n=1$, p

$\downarrow$

Binomial-Verteilung

diskret

Parameter: n, p

Bi (x)

$n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow 0$

Poisson - Verteilung

diskret

Parameter $\mu = \sigma^2$

P(x)

$n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow$ const.

Gauß - Verteilung

Normal - Verteilung

kontinuierlich

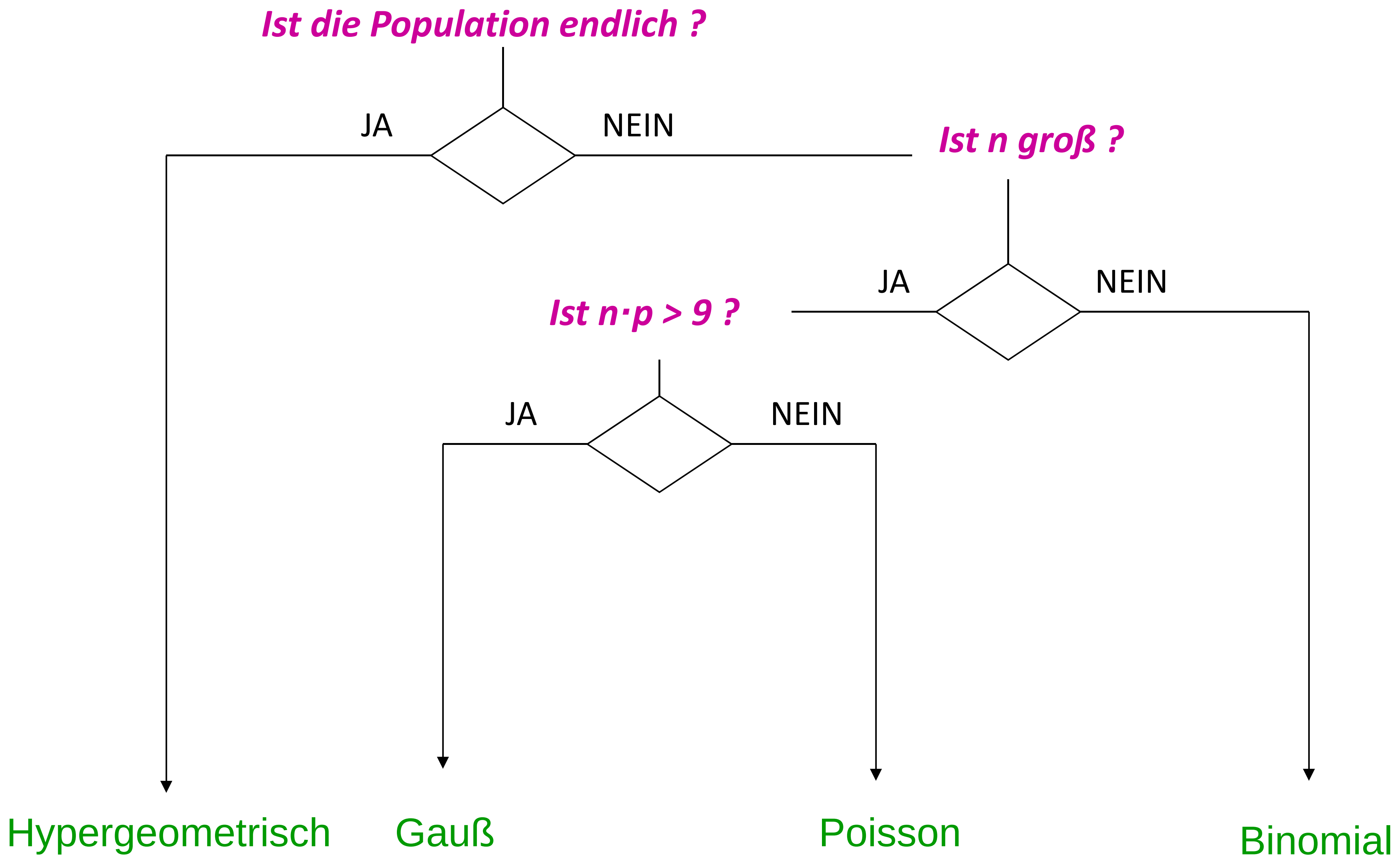
Parameter: μ, σ

G (x)

$\mu \rightarrow \infty$

$\mu = n\,p$

Zusammenhang der Verteilungen



Verteilungsfunktionen III:

Wiederholung

Poissonverteilung

Chi-Quadrat-Verteilung

Chi-Quadrat in der deskriptiven Statistik

Allgemeine Definition :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(E_k - T_k\right)^2}{T_k}$$

E_k ist die experimentelle Häufigkeit

T_k ist die theoretisch erwartete Häufigkeit

Wir wiederholen eine Messung viele (*N*) Male,

fassen die Messwerte in *n*-Klassen zusammen

und ermitteln die Anzahl der Beobachtungen E_k, die in die Klasse k fallen.

Beispiel: Siehe Übungsaufgabe zur Poisson-Verteilung

Unter der Voraussetzung,

dass die Messwerte der erwarteten Verteilung folgen, berechnen wir die theoretisch erwartete Zahl von Messwerten in der k-ten Klasse.

Chi-Quadrat in der deskriptiven Statistik

Allgemeine Definition :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(E_k - T_k)^2}{T_k}$$

E_k ist die experimentelle Häufigkeit

T_k ist die theoretisch erwartete Häufigkeit

Bei $\chi^2 = 0$ ist die Übereinstimmung vollkommen.

Dies ist praktisch nie der Fall, also wird $\chi^2 > 0$ sein.

Wir müssen daher wissen, welche Streuung hier erwartbar ist.

Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

Annahme: Wir betrachten Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ deren Wahrscheinlichkeitsdichte f_i (i = 1,2,…n) gegeben ist durch

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2 \right\}$$

Weiterhin:

$$\chi_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$$

Wie sieht die Verteilung / Wahrscheinlichkeitsdichte dieser Zufallsgröße aus?

Für die weiteren Überlegungen nur Zufallsvariablen Z_i mit $\mu_i = 0$ und $\sigma_i = 1$.

Das bezeichnet man als N(0,1)-verteilte Zufallsgröße.

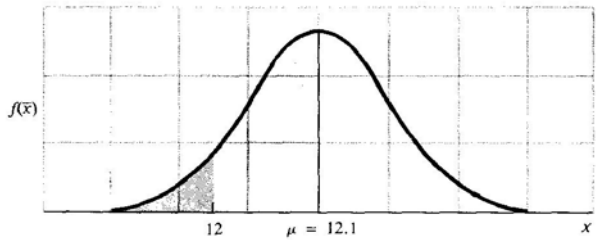
Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

Für N(0,1)-verteilte Zufallsgrößen vereinfacht sich die Dichte zu:

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\};$$

Erinnerung: Die zugehörige Verteilungsfunktion ist die bekannte Fehlerfunktion:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Sei nun $\chi_1^2 = Z_1^2$,dann ergibt sich für die Verteilungsfunktion $F_{\chi_1^2}(x)$:

$$F_{\chi_1^2}(x) = P(Z_1^2 < x) = P(-\sqrt{x} < Z_1 < \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \left(1 - \Phi(\sqrt{x})\right) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

und für die zugehörige Dichte:

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{d}{dx} F_{\chi_1^2}(x) = 2\varphi\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Betrachten wir als nächstes $\chi_2^2 = Z_1^2 + Z_2^2$:

$$f_{\chi_2^2}(x) = \int_0^x f_{\chi_1^2}(y) \cdot f_{\chi_1^2}(x-y)\,dy$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x-y)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x-y}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(x-y)}} dy$$

Substitution: $y = x(1-u^2)$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y(x-y)}} dy = \int_1^0 \frac{-2xu}{\sqrt{x^2u^2(1-u^2)}} du = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{(1-u^2)}} du = 2\arcsin u\Big|_0^1 = \pi$$

$$= \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\};$$

Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$f_{\chi_2^2}(x) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Betrachten wir weiter $\chi_3^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$:

$$f_{\chi_3^2}(x) = \int_0^x f_{\chi_1^2}(y) \cdot f_{\chi_2^2}(x-y)dy$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\} \cdot \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x-y}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$f_{\chi_2^2}(x) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$f_{\chi_3^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Und noch weiter $\chi_4^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$:

$$f_{\chi_4^2}(x) = \int_0^x f_{\chi_2^2}(y) \cdot f_{\chi_2^2}(x-y)dy$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\} \cdot \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x-y}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{4} x \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

Kleine Erinnerung: $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$

Damit erhält man schließlich für die Dichte nach *n* Schritten:

$$\boxed{f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}, \qquad x > 0}$$

Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\, x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}, \qquad x > 0$$