Uni Würzburg

Skript der Theoretischen Physik für Studierende des Lehramts

Elektrodynamik, spezielle Relativitätstheorie und Thermodynamik

Wolfgang Kinzel

26. Juli 2023

Gefördert von der



Dieses Skript entsteht gleichzeitig mit der Vorlesung und wird ständig überarbeitet. Skripte sind nie fehlerfrei. Bitte helfen Sie mit, das Skript zu verbessern. Kommentare, Verbesserungsvorschläge und Fehlermeldungen sind immer willkommen.

Besten Dank!

Wolfgang Kinzel

kinzel (at) physik uni-wuerzburg de

Danke für Korrekturhinweise:

Daniel Baur, Katja Gößmann, Christina Biedermann, Patrick Kasseckert, Georg Reents, Chris Dirker, Max Ernst, Maria Theresa Schnaus, Christian Clarkson, Stefanie Wellert, Sabine Rosenberger, Fabian Karle, Martin Bielecki, Michael Moutsios, Lukas Simon, Lukas Lackner, Amelie Roth, Rene Frenzel, Stefan Reinhard, Gabriel Freiherr von Eyb, Peter Helfrich, Philipp Vobornik, Florian Schwarz, Larissa Lazarov, Timo Wagenblast, Denise Wiesner, Katja Neder, Sonja Geißelsöder, Nico Griesler, Tim Friedrich, Sven Yang, Theresa Brandl, Robert Jawurek, Benjamin Schuhmann

Inhaltsverzeichnis

1	The	oretisc	he Physik für das Lehramt	6
	1.1	Warur	m Theoretische Physik?	6
	1.2	Postul	late der Theoretischen Physik	7
	1.3	Diese	Vorlesung	8
	1.4	Studiu	1m	9
2	Elek	trodyn	amik	11
	2.1	Maxw	ell-Gleichungen	12
		2.1.1	Physikalische Größen	12
		2.1.2	Mathematische Sätze	16
		2.1.3	Maxwell-Gleichungen in Materie	19
	2.2	Elektr	ostatik	20
		2.2.1	Coulomb-Gesetz	20
		2.2.2	Elektrisches Potenzial	22
		2.2.3	Grenzflächen	25
		2.2.4	Elektrostatische Energie	27
		2.2.5	Multipol-Entwicklung	30
		2.2.6	Randwert-Probleme	32
		2.2.7	Entwicklung nach orthonormalen Funktionen	36
	2.3	Magne	etostatik	40
		2.3.1	Stromdichte	41
		2.3.2	Vektorpotenzial	42
		2.3.3	Magnetfeld	43
		2.3.4	Kraft auf Leiterschleifen	44
		2.3.5	Analogien zwischen der Elektro- und Magnetostatik	46
	2.4	Zeitab	hängige Felder	48
		2.4.1	Ladungserhaltung	48
		2.4.2	Energiesatz	49
		2.4.3	Elektromagnetische Induktion	51
	2.5	Elektr	omagnetische Wellen	58
		2.5.1	Potenziale	58
		2.5.2	Ebenen Wellen im Vakuum	59
		2.5.3	Ebene Wellen in Materie	65
		2.5.4	Antennen	71

Inhaltsverzeichnis

3	Spe	Spezielle Relativitätstheorie 77				
	3.1	Konst	ante Lichtgeschwindigkeit	78		
	3.2	Lorent	z-Transformation	80		
	3.3	Konse	quenzen aus der Lorentz-Transformation	82		
		3.3.1	Galilei-Transformation	82		
		3.3.2	Maximale Geschwindigkeit des Beobachters	82		
		3.3.3	Gleichzeitigkeit	82		
		3.3.4	Zeitdilatation	83		
		3.3.5	Längenkontraktion	84		
		3.3.6	Maximale Signalgeschwindigkeit	85		
		3.3.7	Addition von Geschwindigkeiten	86		
		3.3.8	Relativistische Fotos	87		
		3.3.9	Zwillingsparadoxon	88		
		3.3.10	Ereignisse und Lichtkegel	91		
	3.4	Wirku	ng, Energie und Impuls	92		
		3.4.1	Kinetische und Ruheenergie	97		
	3.5	Vierer	-Vektoren	99		
		3.5.1	Definitionen	100		
		3.5.2	Eigenzeit	101		
		3.5.3	Vierer-Geschwindigkeit	102		
		3.5.4	Vierer-Kraft	102		
		3.5.5	Vierer-Impuls	103		
		3.5.6	Vierer-Strom	103		
		3.5.7	Vierer-Potential	104		
		3.5.8	Feldstärke-Tensor	105		
		3.5.9	Vierer-Wellenvektor	106		
4	The	rmodvr	namik	109		
•	4.1	Therm	nische Größen	113		
		4.1.1	Wärme	113		
		4.1.2	Entropie	114		
		4.1.3	Temperatur. Druck und chemisches Potenzial	118		
	4.2	Therm	nisches Gleichgewicht	120		
		4.2.1	Hauptsätze	120		
		4.2.2	Wärmefluss	120		
		4.2.3	Dimensionen von Entropie und Temperatur	122		
		4.2.4	Aufheben von Zwangsbedingungen	123		
	4.3	Funda	mentalgleichung $S(E, V, N)$	124		
		4.3.1	Ideales Gas	124		
		4.3.2	Mischungsentropie	126		
		4.3.3	Elektromagnetische Strahlung	128		
		4.3.4	Gummi	129		
	4.4	Therm	nodynamische Prozesse	131		
		4.4.1	Wärmekontakt	131		

Inhaltsverzeichnis

	4.4.2	Isotherme Expansion		
	4.4.3	Energie der Informationsverarbeitung		
	4.4.4	Wirkungsgrad		
	4.4.5	Kühlschrank und Wärmepumpe		
	4.4.6	Carnot-Prozess		
4.5	Therm	nodynamische Relationen		
	4.5.1	Thermische Messgrößen		
	4.5.2	Homogenität		
	4.5.3	Thermodynamische Potentiale		
	4.5.4	Maxwell-Relationen		
	4.5.5	Partielle Ableitungen		
	4.5.6	Anwendungen		
4.6	Phasenübergang			
	4.6.1	Koexistenzkurve		
	4.6.2	Van-der-Waals Gas		
	4.6.3	Kritische Phänomene		
4.7	Statist	tische Mechanik und Strahlungsgesetze		
	4.7.1	Postulate der Statistischen Mechanik		
	4.7.2	Photonen		
	4.7.3	Strahlungsgesetze		
4.8	Elektr	Elektromagnetische Strahlung der Erde		
	4.8.1	Entropiefluss durch die Erde		
	4.8.2	Temperatur der Erde		
	4.8.3	Treibhaus-Effekt		

1 Theoretische Physik für das Lehramt

1.1 Warum Theoretische Physik?

Muss ein Physiklehrer oder eine Physiklehrerin theoretische Physiklernen? Diese Frage wird mir gelegentlich von Studenten und Studentinnen des Lehramts gestellt. Meine Antwort ist ein eindeutiges Ja. Nur wer Physik verstanden hat, kann sie überzeugend vermitteln.

Die Physik sucht nach universellen quantitativen Gesetzen. Sie erklärt und beschreibt eine Vielzahl von Phänomenen und Experimenten durch einige wenige mathematische Grundgleichungen. Physik ist keine Datensammlung, sondern eine universelle Theorie, und die Sprache der Physik ist die Mathematik. Jeder Student und jede Studentin der Physik muss lernen, wie physikalische Aussagen aus den Grundgleichungen mathematisch hergeleitet werden können. Folglich müssen auch Lehramtsstudierende die Grundlagen der theoretischen Physik beherrschen.

Die experimentelle Physik zeigt, wie aus Experimenten quantitative Aussagen gewonnen werden. Diese Daten werden mithilfe der physikalischen Begriffe und Modelle analysiert. Die experimentelle Physik benötigt somit ebenfalls die Sprache der Mathematik, um die Daten aus den Experimenten zu beschreiben und zu erklären. Aus der Fülle dieser zahlreichen Experimente sind die physikalischen Grundgleichungen entstanden.

Die theoretische Physik dagegen geht von diesen Grundgleichungen aus. Sie versucht, daraus mithilfe mathematischer Methoden physikalische Aussagen herzuleiten. Die Menge dieser Aussagen, die aus den grundlegenden Gleichungen hergeleitet werden, bildet eine Theorie, die eine Vielzahl von Experimenten und Beobachtungen erklären kann. Aus mathematischer Sicht sind diese Grundgleichungen so etwas wie Axiome, also absolute Wahrheiten, die nicht infrage gestellt werden. Allerdings gibt es in der Physik keine absoluten Wahrheiten, sondern nur Hypothesen oder Postulate, die durch Experimente widerlegt werden können. Jede dieser Grundgleichungen hat deshalb nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Die klassische Mechanik von Isaac Newton wird bei extrem schnellen Bewegungen durch die Relativitätstheorie und im mikroskopisch Kleinen durch die Quantenmechanik erweitert. Die Theorie der elektromagnetischen Wellen von James Clerk Maxwell wird bei schwachen Intensitäten der Welle und bei der Wechselwirkung mit Atomen durch die Quantenelektrodynamik (Photonen) ergänzt. Die Quanten-

1 Theoretische Physik für das Lehramt

mechanik der Atome, Moleküle und Festkörper wird im subatomaren Bereich durch die Quantenfeldtheorie (Quarks, Gluonen) ersetzt. Jede dieser Theorien kann in ihrem entsprechenden Gültigkeitsbereich zahlreiche Experimente und Erscheinungen beschreiben und erklären.

1.2 Postulate der Theoretischen Physik

Im Rahmen der Lehramtsausbildung werden wir die fünf folgenden Grundgleichungen behandeln. Im vierten Semester führen wir in die klassische Mechanik und in die Quantenmechanik ein, und im siebten Semester studieren wir die Elektrodynamik, die spezielle Relativitätstheorie und die Thermodynamik.

Grundgleichungen der theoretischen Physik

• Klassische Mechanik

Newton-Gleichungen für ein Teilchen im Potenzial V

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = -\nabla V(\vec{r}(t), t)$$

• Quantenmechanik

Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Potenzial V

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t)$$

Abstrakte Formulierung im Hilbertraum

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle=\hat{H}|\Psi\rangle$$

• Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

• Spezielle Relativitätstheorie

Lorentz-Transformation für die Messung des Ortes x' und der Zeit t' eines Beobachters, der sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt.

$$x' = \gamma \left(x - vt \right)$$
$$t' = \gamma \left(t - \frac{x}{c} \frac{v}{c} \right)$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

• Thermodynamik

- Die Entropie S(E, V, N) beschreibt thermisches Gleichgewicht.

$$- dE = T dS - p dV + \mu dN$$

$$-\Delta S \ge 0$$

1.3 Diese Vorlesung

In dieser Vorlesung untersuchen wir drei dieser Grundgleichungen:

- Die Maxwell-Gleichungen, die die elektrischen und magnetischen Kräfte und die elektromagnetischen Wellen erklären,
- die Lorentztransformation, die Ort- und Zeit-Messungen für schnell bewegte Beobachter angeben,

1 Theoretische Physik für das Lehramt

• den Entropiesatz, der Prozesse beschreibt, die mit Wärme und Temperatur zu tun haben.

Aus diesen drei Grundgleichungen werden wir wichtige physikalische Aussagen herleiten. Solche Ergebnisse sind nicht nur für unser grundlegendes Verständnis der Natur wichtig, sondern sie haben auch weitreichende Anwendungen. Die Maxwell-Gleichungen sind die Grundlage für Fernsehen, Handy, Licht und Röntgenstrahlen, die Lorentzgleichungen führen zur nuklearen Energie und genauem GPS, und der Entropiesatz beschreibt den Wirkungsgrad von Wärmekraftwerken und Kühlschränken.

Dieses Skript enthält nur denjenigen Stoff, der in der Vorlesung behandelt wird. Ich empfehle Ihnen, mithilfe von Lehrbüchern die Vorlesung zu vertiefen und zu ergänzen. Dazu eignen sich:

- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 3+4
- Peter Schmüser, Theoretische Physik für das Lehramt 1-2, kostenlos über die Unibibliothek
- Torsten Fließbach, Lehrbuch zur Theoretischen Physik 1-4
- Siegfried Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Dieter Röß, Mathematik mit Simulationen lehren und lernen
- Weitere Lehrbücher in unserer Bibliothek unter UC,UH,...

1.4 Studium

Bitte nicht vergessen: Sie studieren! Das bedeutet, dass Sie Arbeit investieren müssen, um von einer Lehrveranstaltung profitieren zu können. Diese Vorlesung präsentiert neuen, umfangreichen und schwierigen Stoff in relativ kurzer Zeit. Sie müssen selbst daran arbeiten, den Vorlesungsstoff zu verstehen. Das gelingt nicht vollständig, denn Verstehen ist kein Ja-Nein-Prozess sondern ein Mehr-oder-Weniger. Erst wenn Sie etwas verstanden haben, können Sie versuchen, Aufgaben zur Vorlesung zu lösen.

Studium heißt:

- Sich Zeit für die Nacharbeitung der Vorlesung nehmen
- Den Inhalt der Vorlesung mit eigenen Worten formulieren

- Zusammenhänge erkennen
- Fragen formulieren und damit zum Dozenten und den Übungsleitern gehen
- Durch Wiederholen den Überblick behalten
- Über die Physik mit den Studienkollegen sprechen
- Den Inhalt der Vorlesung mithilfe von Lehrbüchern vertiefen
- Übungsaufgaben lösen und mit den Studienkollegen besprechen

An dieser Liste sehen Sie schon, dass sich Lehramtsstudierende mehr Zeit für das Verständnis der Physik als für das Lösen von Problemen nehmen sollten. Sie werden nicht als Forscher ausgebildet, sondern sie sollen später in der Klasse die Physik überzeugend und kompetent vermitteln und spannend gestalten.

Wir wollen Ihnen gern beim Studium helfen. Unser Ziel ist es nicht, Sie zu prüfen, sondern wir wollen Ihnen etwas beibringen und Sie vielleicht sogar für die Physik begeistern.

Elektrische und magnetische Erscheinungen waren schon in der Antike bekannt. Doch erst im 18. und 19. Jahrhundert wurden quantitative Gesetze dazu gefunden und neue Eigenschaften postuliert und experimentell bestätigt. Die Symmetrie zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern wurde erkannt, das führte schließlich zur Induktion und zur Entdeckung elektromagnetischer Wellen. Die Geschwindigkeit dieser Wellen stimmte mit derjenigen des Lichtes überein, sodass Licht und Radiowellen denselben mathematischen Gleichungen folgten.

Hier sind einige wichtige historische Daten:

- 1785: Kraft zwischen Ladungen: Coulomb-Gesetz
- 1820: Magnetische Kräfte von Strömen: Ampere-Gesetz
- 1830: Elektrische Kräfte durch Magnetfelder: Faraday-Induktion
- 1865: Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus, Vorhersage elektromagnetischer Wellen, Anwendung auf Licht: Maxwell-Gleichungen
- 1887: Experimentelle Bestätigung elektromagnetischer Wellen durch Heinrich Hertz
- 1905: Konstante Lichtgeschwindigkeit, es gibt keinen Äther als Medium: Spezielle Relativitätstheorie von Albert Einstein
- 1949: Quantenelektrodynamik von Richard Feynman

2.1 Maxwell-Gleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die Gleichungen untersuchen, die James Clerk Maxwell im Jahre 1865 aufgestellt hat. Sie beschreiben sowohl die elektrischen und magnetischen Kräfte als auch das gesamte Spektrum der elektromagnetischen Wellen, von den Radiowellen, Mobilfunk, Mikrowellen, Wärmestrahlung, Licht, Röntgenstrahlen bis hin zu den hochenergetischen Gammastrahlen.



Abbildung 2.1: Spektrum der elektromagnetischen Wellen. Quelle: Wikipedia

2.1.1 Physikalische Größen

Was bedeuten nun die obigen Maxwell-Gleichungen, die partiellen Differenzialgleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder? Zunächst wollen wir die physikalischen Größen betrachten. An jedem Ort \vec{x} und zu jeder Zeit t gibt es die beiden Vektoren \vec{E} und \vec{B} , die die elektrischen und magnetischen Kräfte auf ein geladenes Teilchen angeben. Die elektrische Feldstärke, oder kurz das **elektrische Feld** $\vec{E}(\vec{x},t)$, hat demnach drei Komponenten, die jeweils vom Ort und der Zeit abhängen. In kartesischen Koordinaten lautet dies:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{x},t) \\ E_y(\vec{x},t) \\ E_z(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$
(2.1)

Die Kraft auf eine winzige Probeladung q am Ort \vec{x} zur Zeit t ist gegeben durch

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.2}$$

Welche Dimension hat das elektrische Feld? Wir verwenden die SI Einheiten Kilogramm kg, Meter m, Sekunde s und Ampere A. Die Dimension der Ladung q ist das Coulomb C, die Amperesekunde, C=As . Daher ist die Dimension des elektrischen Feldes Newton N geteilt durch Coulomb C, dim $E = N/C = kg m/(s^2 As)$.



Abbildung 2.2: Elektrisches Feld eines Dipols. Quelle: Wikipedia

Bewegt sich die Probeladung q mit einer Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld, so gibt es einen zusätzlichen Beitrag zur Kraft. Die magnetische Induktion \vec{B} , oder kurz das **Magnetfeld**¹, ist ebenfalls ein Vektorfeld:

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} B_x(\vec{x},t) \\ B_y(\vec{x},t) \\ B_z(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$
(2.3)

 $^{^1 {\}rm In}$ Materie wird als Magnetfeld das Hilfsfeld \vec{H} bezeichnet, das noch den Einfluss der magnetischen Polarisation enthält

Die gesamte Kraft, die auf die bewegte Probeladung wirkt, hat die folgende Gestalt:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.4}$$

Diese Kraft wird *Lorentzkraft* genannt. Die Gleichung kann als Definition des elektrischen und des magnetischen Feldes aufgefasst werden. Der elektrische Teil der Kraft beschleunigt in Richtung des elektrischen Feldes während der magnetische Teil senkrecht zum Magnetfeld wirkt.

Die obige Gleichung zeigt die Dimension des Magnetfeldes. Wir finden dim $\vec{B} = Ns/Cm = N/Am = T$ (Tesla).

Die Maxwell-Gleichungen haben eine bemerkenswerte Symmetrie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld. Infolgedessen sollten beide Felder eigentlich dieselbe physikalische Dimension haben. In manchen Lehrbüchern finden Sie deshalb die folgende Form der Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$$
(2.5)

Nun wird die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Lichtgeschwindigkeit c skaliert, und beide Felder haben damit offenbar dieselbe Dimension. Diese Form der Lorentzkraft verwendet die so genannten Gauß'schen Einheiten (c,g,s), bei denen sogar die Ladung nicht durch Coulomb C sondern durch Zentimeter c, Gramm g und Sekunde s ausgedrückt wird. Die Maxwell-Gleichungen ändern sich entsprechend. Wir verwenden aber die **SI-Einheiten**, denn wer möchte schon auf die üblichen Einheiten Volt und Ampere verzichten?

1. Doppelstunde

Welche physikalischen Größen gibt es noch in den Maxwell-Gleichungen? Da ist zunächst die **Ladungsdichte** $\rho(\vec{x}, t)$, die Ladung pro Volumen. Die Gesamtladung in einem Volumen V erhält man durch Integration der Ladungsdichte:

$$Q(t) = \int_V d^3x \ \rho(\vec{x}, t) \tag{2.6}$$

Bei einer Punktladung q ist die Ladungsdichte überall null bis auf den Ort $\vec{r}(t)$ der Ladung, dort ist sie unendlich groß. Das wird mithilfe der Delta-Funktion folgendermaßen beschrieben:

$$\rho(\vec{x},t) = q \,\,\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \tag{2.7}$$

Integrieren wir nun diese Ladungsdichte einer Punktladung über ein Volumen, das den Ort \vec{r} des Teilchens enthält, so erhalten wir die Ladung q.

Erinnerung: Dirac-Delta-Funktion

Eine eindimensionale Rechteckfunktion $f_b(x)$ der Breite *b* um den Ort x_0 soll die Fläche eins haben, $S = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(x) dx = 1$. Wir betrachten nun den Grenzwert $b \to 0$, ohne die Fläche S zu verändern; die Höhe dieser Funktion nimmt also zu, bis sie zu einer ganz scharfen Spitze wird. Diesen Limes bezeichnet man als **Delta-Funktion** $\delta(x - x_0)$. Sie hat überall den Wert Null, bis auf die Stelle x_0 , dort scheint Sie unendlich groß zu sein. Mathematisch gesehen ist sie eigentlich gar keine Funktion, sondern eine Distribution. Da sie jedoch als Grenzwert von Funktionen aufgefasst werden kann, gelten für die Delta-Funktion fast alle bekannten Rechenregeln. Zum Beispiel gilt die Substitutionsregel

$$\delta(\phi(x)) = \sum_{i} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$
(2.8)

wobei die x_i einfache Nullstellen von $\phi(x)$ sind.²

Nun multiplizieren wir die Delta-Funktion mit einer stetigen Funktion g(x). Im Limes $b \to 0$ nimmt die Funktion g(x) den konstanten Wert $g(x_0)$ an, und das Integral wird zu

$$\int g(x)\delta(x-x_0) \, dx = g(x_0) \tag{2.9}$$

Dabei müssen wir nur um die Stelle x_0 integrieren, außen ist das Integral Null. Die Delta-Funktion bildet jede Funktion g(x) auf ihren Funktionswert $g(x_0)$ ab, solche Abbildungen werden als Distributionen oder lineare Funktionale bezeichnet.

In drei Dimensionen geht das genauso:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

$$\int_V \vec{g}(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3x = \vec{g}(\vec{x}_0)$$
(2.10)

Dabei liegt der Vektor \vec{x}_0 im Volumen V.

Eine weitere Größe in den Maxwell-Gleichungen ist die **Stromdichte** $\vec{j}(\vec{x},t)$, der Strom pro Fläche. Der Strom ist definiert als diejenige Ladung, die durch eine Fläche pro Zeit fließt. Die Stromdichte ist ein Vektor; um den Strom I durch eine Fläche S zur erhalten, muss das folgende Flächenintegral berechnet werden:

$$I(t) = \int_{S} \vec{j} \cdot d\vec{f}$$
(2.11)

Der **Strom** ist Ladung pro Zeit, seine physikalische Dimension ist das Ampere, A=C/s.

 $^{^2 \}mathrm{Weitere}$ Rechenregeln finden sie bei Großmann



Abbildung 2.3: Stromdichte \vec{j} , Flächenvektor $d\vec{f}$ und Fläche S.

Darüber hinaus gibt es noch zwei physikalische Konstanten ε_0, μ_0 , die **elek**trische bzw. magnetische Feldkonstante. ε_0 nennt man auch die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und μ_0 die Permeabilität des Vakuums oder die Induktionskonstante. Sie haben die Werte

$$\varepsilon_0 \simeq 8.8 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 s^2}{Nm^2}; \quad \mu_0 \simeq 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$$
(2.12)

Das Produkt $\varepsilon_0\mu_0$ hat offensichtlich die Dimension "inverse Geschwindigkeit zum Quadrat", $\frac{1}{c^2}$. Später werden wir zeigen, dass diese Geschwindigkeit cdie **Lichtgeschwindigkeit** ist, die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum. Es gilt

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458\,\frac{m}{s} \simeq 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s} \tag{2.13}$$

Seit 1983 ist die Lichtgeschwindigkeit exakt festgelegt worden, mit ihr wird die Einheit Meter m definiert.

2.1.2 Mathematische Sätze

Was bedeuten die mathematischen Symbole in den Maxwell-Gleichungen? $\nabla \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E}$ ist die **Divergenz** des elektrischen Feldes, sie beschreibt die Quellen und Senken des Feldes. Das Symbol $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ definiert einen lineare Operator, der dem Vektorfeld \vec{E} das skalare Feld div $\vec{E} =$

 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ zuordnet. Sämtliche Größen sind Funktionen von $\vec{x} = (x, y, z)$ und t.

Die *Rotation* beschreibt die Wirbel des Feldes.

$$\nabla \times \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{pmatrix}$$
(2.14)

Die folgende Abbildung zeigt zwei einfache Vektorfelder, \vec{x} und $\vec{\omega} \times \vec{x}$. Dabei soll der Vektor $\vec{\omega}$ konstant sein.

$\mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} \mathbf{x} $	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
****	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
****	KKKKKKK++XXXXXX
****	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A
KKKKKKKK I I I I I I I I I I I I I I I	
**************************************	↓↓↓↓↓↓↓ · · · · · · · · · · · · · · · ·
~~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
***************	* * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * / / / / / / / X X X X X	
*****	*****
K K K K K K K K K K K K K K K K K K K	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A
K K K K K K K K K K K K K K K K K K K	A A A X X X X X X X X X X X X X X X X X
	A A A X X X X X X X X X X X X X X X X X
	A A A A A A A A A A A A A A A A A A A

Abbildung 2.4: Vektorfelder \vec{x} (links) und $\vec{\omega} \times \vec{x}$ (rechts). Das linke Feld hat überall Quellen aber keine Wirbel, während das rechte Feld überall Wirbel aber keine Quellen hat.

Eine offensichtliche Rechnung gibt:

$$\operatorname{div} \vec{x} = 3; \operatorname{rot} \left(\vec{\omega} \times \vec{x} \right) = 3 \vec{\omega}; \operatorname{div} \left(\vec{\omega} \times \vec{x} \right) = 0; \operatorname{rot} \vec{x} = 0$$
(2.15)

Das Feld \vec{x} hat demnach nur Quellen und keine Wirbel, während das Feld $\vec{\omega} \times \vec{x}$ nur Wirbel und keine Quellen hat. Jedes Feld kann als ein Fluss aufgefasst werden. Wenn in ein Volumen mehr heraus als hinein fließt, dann hat das Feld in diesem Volumen Quellen. Das linke Feld hat demnach überall im Raum Quellen. Wenn dagegen das Wegintegral über eine Schleife von Null verschieden ist, dann hat das Feld im Inneren der Schleife Wirbel. Das rechte Feld hat überall Wirbel.

Dieses anschauliche Bild entsteht aus folgenden mathematischen Sätzen. Wir wollen diese Sätze hier nur skizzieren und später als Werkzeug verwenden,

eine präzise mathematische Formulierung finden Sie in den Lehrbüchern der Vektoranalysis. Anschauliche Beweise gibt es in den Lehrbüchern der theoretischen Physik.

Gauß'scher Satz

Das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen V ist identisch mit dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die Oberfläche S des Volumens V:

$$\int_{V} d^{3}x \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \int_{S} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$
(2.16)

Stokes'scher Satz

Das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes über eine Fläche S gibt das Wegintegral des Vektorfeldes über den Rand C der Fläche S.

$$\int_{S} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$
(2.17)

Zerlegungssatz von Helmholtz

Jedes Vektorfeld lässt sich als Summe eines quellen- und eines wirbelfreien Anteils zerlegen,

$$\vec{E} = \vec{E}_W + \vec{E}_Q;$$
 mit rot $\vec{E}_Q = 0;$ div $\vec{E}_W = 0.$ (2.18)

Insbesondere bestimmen die Divergenz und die Rotation eines Vektorfeldes eindeutig das gesamte Feld, denn es gilt

$$\vec{E}_{Q}(\vec{x}) = \text{grad} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int d^{3}x' \frac{\text{div} \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}$$
(2.19)
$$\vec{E}_{W}(\vec{x}) = \text{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int d^{3}x' \frac{\text{rot} \vec{E}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\}$$

Man kann zeigen (analog zu normalen Vektoren):

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \nabla \times \nabla = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}... = \nabla \cdot (\nabla \times ...) = 0$$
 (2.20)

Somit sagt uns der Zerlegungssatz:

- Ein wirbelfreies Vektorfeld ist ein Gradientenfeld.
- Ein quellenfreies Vektorfeld ist ein Rotationsfeld.

Mit diesem Satz werden wir die Potenziale des elektrischen und magnetischen Feldes aus den Maxwell-Gleichungen bestimmen können.

Wie alt sind eigentlich diese mathematischen Sätze? Im Jahr 1813 entdeckte Carl Friedrich Gauß den nach ihm benannten Satz, der allerdings schon 1762 von Joseph Louis Lagrange gefunden wurde. Gegen 1840 hat George Gabriel Stokes seine wichtigen Arbeiten zur Hydrodynamik veröffentlicht. Den Zusammenhang zwischen Flächen- und Wegintegralen oder zwischen Volumen- und Flächenintegralen, der ganz allgemein in beliebigen Dimensionen mit sogenannte Differentialformen formuliert werden kann, trägt seinen Namen. Hermann von Helmholtz formulierte um 1860 den Fundamentalsatz der Vektoranalysis, den Zerlegungssatz. Zu Maxwells Zeiten war die Mathematik der Vektorfelder demnach schon weit entwickelt. ³

2.1.3 Maxwell-Gleichungen in Materie

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Maxwell-Gleichungen in Materie an, ohne sie herzuleiten. Durch ein elektrisches/magnetisches Feld wird Materie elektrisch/magnetisch polarisiert. Das wird durch die Hilfsfelder \vec{D} und \vec{H} berücksichtigt, und die Maxwell-Gleichungen lauten damit

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{x}, t) \qquad (2.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

³Quelle: Wikipedia

Um diese Gleichungen abzuschließen, benötigen wir die Funktionen $\vec{D}(\vec{E})$ und $\vec{H}(\vec{B})$, welche die Antwort des Materials auf die Felder beschreiben. Wenn diese Relationen linear und isotrop sind, und wenn die Beziehung zwischen dem Strom und dem elektrischen Feld ebenfalls linear ist (Ohmsches Gesetz), so gilt

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$
 (2.22)

Dabei ist σ die *Leitfähigkeit*, ε die *Dielektrizitätskonstante* und μ die *Permeabilität*, die durch die elektrische und magnetische Polarisation der Atome und Moleküle entsteht.

2.2 Elektrostatik

Was sagen uns die Maxwell-Gleichungen, wenn die Ladungsdichte nicht von der Zeit abhängt und wenn es keine Ströme gibt? Dann ist offenbar die Divergenz und die Rotation des Magnetfeldes gleich Null, und nach dem Zerlegungssatz 2.19 gibt es kein Magnetfeld. Es gibt nur ein elektrisches Feld, und es bleiben nur die beiden Gleichungen

div
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$
 (2.23)
rot $\vec{E} = 0$

Überraschenderweise werden wir aus diesen beiden Gleichungen der Elektrostatik viel Physik ableiten können.

2.2.1 Coulomb-Gesetz

Zunächst sei die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ kugelsymmetrisch und beschränkt verteilt. Nun wenden wir den Gauß'schen Satz 2.16 auf die erste Maxwell-Gleichung an und integrieren über eine Kugel mit dem Radius r, die die gesamte Ladung enthält.

Der Gauß'sche Satz sagt uns nun



Abbildung 2.5: Kugelsymmetrische Ladungsdichte (grau) und Integrationsvolumen mit Radius r.

$$\int_{V} d^{3}x \,\nabla \cdot \vec{E} = \int_{S} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \int_{V} d^{3}x \,\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{\varepsilon_{0}} \tag{2.24}$$

Das Flächen
integral können wir aber leicht berechnen, denn aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld
 \vec{E} radialsymmetrisch sein. Es gilt demnach
 $\vec{E}(\vec{x}) = E(r) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ und damit $\vec{E} \cdot d\vec{f} = E(r) df$. Daraus folgt

$$\int_{S} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E(r) \int_{S} df = E(r) \, 4\pi r^2 \tag{2.25}$$

Mit Gleichung 2.24 erhalten wir daraus das Coulomb-Gesetz

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \tag{2.26}$$

oder

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$
(2.27)

Das elektrische Feld nimmt mit dem inversen Quadrat des Abstandes ab.

Die Kraft, die diese Ladungsdichte auf eine Probeladung q ausübt, ist $F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}.$

Dieses Gesetz erinnert an die Gravitationskraft, die wir in der klassischen Mechanik kennen gelernt haben. Dort war die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen geteilt durch das Quadrat deren Abstandes.

Das Coulomb-Gesetz 2.27 gilt nicht nur für eine ausgedehnte Ladung, sondern ebenfalls für eine Punktladung. Sind mehrere Punktladungen q_j an verschiedenen Orten \vec{x}_j lokalisiert, so ist wegen der Linearität der Maxwell-Gleichungen das gesamte elektrische Feld gegeben durch



Abbildung 2.6: Punktladung q_j am Ort \vec{x}_j , $E \sim \frac{1}{r^2}$

Die Abbildung 2.2 zeigt das elektrische Feld einer positiven und einer negativen Punktladung.

Historisch wurde das Coulomb Gesetz schon 1785, also 80 Jahre vor den Maxwell-Gleichungen gefunden. In dieser Vorlesung sind wir jedoch von den Maxwell-Gleichungen als Postulat ausgegangen und haben das Coulomb-Gesetz hergeleitet.

2.2.2 Elektrisches Potenzial

In der klassischen Mechanik haben wir kennen gelernt, dass oft Kräfte aus einem *Potenzial* hergeleitet werden können, das eine wichtige physikalische Bedeutung hat. Das gilt ebenso in der Elektrodynamik.

In der Elektrostatik hat das elektrische Feld keine Wirbel. Der Zerlegungssatz 2.19 sagt uns nun, dass sich das elektrische Feld als Gradient eines skalaren Feldes $\Phi(\vec{x})$ schreiben lässt: $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi$. Der Zerlegungssatz

gibt uns auch gleich die Form dieses Potenzials an. Zusammen mit der ersten Maxwell-Gleichung $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ erhalten wir

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \vec{E} = -\nabla\Phi$$
(2.29)

Bilden wir nun den Gradienten von $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}$, so erhalten wir das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \,\rho(\vec{x}') \,\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \tag{2.30}$$

in Analogie zum Ergebnis 2.28 für die Punktladungen.

Die erste Maxwell-Gleichung für das elektrische Feld liefert eine Differenzialgleichung für das Potenzial. Die Relation

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi = -\Delta \Phi \qquad (2.31)$$

liefert die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \tag{2.32}$$

Dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der *Laplace-Operator*. Anstelle der vier Differenzialgleichungen 1. Ordnung für das elektrische Feld 2.23 bleibt nur eine Differenzialgleichung 2. Ordnung für das Potenzial.

 Φ ist das *elektrostatische Potenzial*. Die Kraft auf eine Testladung ist $q\vec{E} = -q\nabla\Phi$. Falls die Kraft auf einem Weg von A nach B wirkt, leistet das Feld die Arbeit

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \int_{A}^{B} \underbrace{\nabla \Phi \cdot d\vec{r}}_{d\Phi} = -q \left[\Phi(\vec{x}_{B}) - \Phi(\vec{x}_{A})\right]$$
(2.33)

Diese Energie ist somit unabhängig vom Weg, auf dem die Ladung vom Punkt A zum Punkt B transportiert wurde, die Kraft ist konservativ.

Die Potenzialdifferenz $\Phi(\vec{x}_B) - \Phi(\vec{x}_A)$ ist die elektrische **Spannung**. Ihre physikalische Dimension ist das **Volt**, die Energie pro Ladung, Volt=J/C=Nm/As.

23

2. Doppelstunde

In der klassischen Mechanik haben wir den Begriff Potenzial für die potentielle Energie verwendet. In der Elektrodynamik dagegen muss das Potenzial mit der Ladung multipliziert werden, um die potentielle Energie zu erhalten.

Die Gleichung 2.29 gilt auch für Punktladungen. Wir hatten schon gesehen, dass die Ladungsdichte für eine Punktladung durch die Delta-Funktion darstellbar ist: $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$. Setzen wir dies in die Gleichung 2.29 ein, so erhalten wir das Potenzial einer Punktladung q am Ort \vec{x}_0 :



Abbildung 2.7: Potential einer positiven und einer negativen Ladung

Auch dieses Potenzial genügt der Poisson-Gleichung. Wenn wir
es in 2.32einsetzen, so erhalten wir

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{2.35}$$

Diese Gleichung ist ganz erstaunlich. Denn sie besagt dass die Funktion $g(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ überall den Wert Null hat, bis auf den Ursprung x = y = z = 0, dort ist sie unendlich groß. Wenn wir jedoch über eine winzig kleine Umgebung des Ursprungs integrieren, so erhalten wir das Ergebnis -4π . Die Delta-Funktion ist eben mathematisch gesehen gar keine Funktion, sondern eine Distribution, die erst durch das entsprechende Integral definiert ist.

Das Potenzial einer Punktladung fällt demnach mit dem inversen Abstand ab, während das entsprechende elektrische Feld mit dem inversen Abstandsquadrat abfällt. In den Übungen werden wir mithilfe des Gauß'schen Satzes herleiten:

$$\begin{array}{ll} \mbox{Punktladung:} & \Phi \sim \frac{1}{r} \Rightarrow E \sim \frac{1}{r^2} \\ \mbox{Homogen geladene Gerade:} & \Phi \sim \ln(r) \Rightarrow E \sim \frac{1}{r} \\ \mbox{Homogen geladene Ebene:} & \Phi \sim r \Rightarrow E = \mbox{konstant} \end{array}$$

2.2.3 Grenzflächen

Geladene Grenzfläche

Selbst wenn wir das elektrische Feld oder das Potenzial gar nicht berechnen können, so können wir doch Aussagen über den Sprung des elektrischen Feldes an Grenzflächen machen. Zunächst betrachten wir eine geladene Fläche. Mit $\sigma(\vec{x})$ bezeichnen wir die Ladung pro Fläche, die *Flächenladungsdichte*. Nun wenden wir den Gauß'schen Satz für ein kleines Volumen um diese Grenzfläche an und betrachten den Grenzwert, in dem der Rand dieser kleinen Dose mit dem Volumen V und der Deckelfläche S gegen Null geht. Über dieses Volumen bilden wir das Integral der ersten Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.



Abbildung 2.8: Integrationsvolumen an einer geladenen Grenzfläche

Das Volumenintegral über die Divergenz wird zum Flächenintegral über das Feld, und im Limes $h \to 0$ verschwinden die Randbeiträge. Wir erhalten für die linke Seite der Gleichung im Limes kleiner Deckelfläche S:

$$\int_{V} d^{3}x \, \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \int_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{E}_{1} \cdot \vec{n} \, S - \vec{E}_{2} \cdot \vec{n} \, S = S \, \vec{n} \cdot (\vec{E}_{1} - \vec{E}_{2})$$

Die rechte Seite wird zu:

$$\int_{V} d^{3}x \, \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_{0}} = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \sigma \, S$$

Damit erhalten wir

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$
(2.36)

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt somit um den Wert $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ändert sich dagegen nicht. Um das zu zeigen, wird der Stokes'sche Satz für eine kleine Wegschleife mit der Fläche S = Lh um die Grenzfläche im Limes $h \to 0$ angewendet. Integrieren wir die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{E} = 0$ über die Fläche S, so erhalten wir für eine kleine Länge L im Limes $h \to 0$ mit dem Einheitsvektor \vec{t} in Tangentialrichtung:

$$\int_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = \oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{r} \simeq \vec{E}_{1} \cdot \vec{t} \, L - \vec{E}_{2} \cdot \vec{t} \, L = 0 \qquad (2.37)$$

und damit



Abbildung 2.9: Integrationsweg an einer geladenen Grenzfläche.

Grenzfläche zwischen zwei Materialien

Nun betrachten wir keine geladene Grenzfläche, sondern eine Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten, $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$ und $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$. Aus den beiden Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0$ erhalten wir wie vorher mit den beiden Integrationstricks, dass die Normalkomponente des Vektors \vec{D} und die Tangentialkomponente des Vektors \vec{E} stetig sind. Daraus folgt

$$\vec{n} \cdot \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \vec{n} \cdot \varepsilon_2 \vec{E}_2 \tag{2.39}$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt also um den Faktor $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ beim Übergang von 1 nach 2, während die Tangentialkomponente stetig bleibt.

An jeder Grenzfläche gilt also:

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt, die Tangentialkomponente ist stetig.

Das Potenzial dagegen ist immer stetig, aber die Richtungsableitung senkrecht zur Grenzfläche macht einen Sprung, das Potenzial hat einen Knick.

2.2.4 Elektrostatische Energie

Die Energie ist eine wichtige physikalische Größe, denn sie ist eine Erhaltungsgröße. Das gilt auch für die Elektrodynamik. Kinetische Energie wird ständig in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt. Wie sieht die potentielle Energie einer Menge von Ladungen aus?

N Ladungen q_j sein an den Orten \vec{x}_j verteilt. Nach Gleichung 2.28 ist die potentielle Energie dieser N(N-1)/2 vielen Paare gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j,k,j\neq k}^{N} \frac{q_j q_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|}$$
(2.40)

Das ist die Arbeit, die benötigt wird, um sämtliche Ladungen aus dem Unendlichen an ihre entsprechenden Orte zu bringen. Analog kann das für kontinuierliche Ladungsdichten formuliert werden, indem die Ladungen $\Delta q_j = \rho(\vec{x}_j) \Delta V_j$ in dem infinitesimalen Volumen ΔV_j aufsummiert werden. Damit erhalten wir das Integral

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$
(2.41)

3. Doppelstunde

Nach Gleichung 2.29 ist aber das Integral über \vec{x}' gerade das Potenzial $\Phi(\vec{x})$, folglich gilt

$$W = \frac{1}{2} \int d^3 x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x})$$
 (2.42)

Dieses Integral können wir mithilfe der Poisson Gleichung noch umformen,

wir erhalten

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3x \, |\vec{E}|^2 = \int d^3x \, w(\vec{x}) \tag{2.43}$$

Die potentielle Energie ist also ein Integral über eine Energiedichte w, die durch den Betrag des elektrischen Feldes bestimmt wird:

$$w(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{x})|^2 \tag{2.44}$$

Erstaunlicherweise sind die Ladungen ganz aus diesem Ausdruck verschwunden. Nur deren elektrisches Feld bestimmt die potentielle Energie.

Das elektrische Feld hat eine eigene potentielle Energie, die *Feldenergie*.

Wir wollen die Gleichung 2.44 noch herleiten. Dazu benötigen wir die Poisson Gleichung 2.32 und die partielle Integration der Vektoranalysis. Wir setzen die Poisson Gleichung in das obige Integral 2.42 ein und erhalten mit $\Delta = \nabla \cdot \nabla$

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3 x \, (\nabla \cdot \nabla \Phi) \Phi \tag{2.45}$$

Mit der Formel

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi \ \Phi) = \Phi \nabla \cdot \nabla \Phi + (\nabla \Phi)^2 \tag{2.46}$$

erhalten wir

$$\int d^3x \,\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \int d^3x \,\Delta \Phi \,\Phi + \int d^3x \,(\nabla \Phi)^2 \tag{2.47}$$

Das ist die entsprechende Formel für die partielle Integration im gesamten Raum. Das erste Integral über die Divergenz können wir nach dem Gauß'schen Satz in ein Oberflächen
integral umwandeln, das jedoch den Wert Null hat, da das Potenzial im Un
endlichen hinreichend schnell verschwindet. Im letzten Integral ers
etzen wir $\nabla\Phi$ durch $-\vec{E}$ und erhalten das behauptete Ergebnis 2.44.

Ungelöstes Rätsel

Wie groß ist die Feldenergie einer Punktladung, beispielsweise eines Elektrons? Das elektrische Feld einer Punktladung fällt mit $1/r^2$ ab. Somit divergiert die Feldenergie am Ursprung wie $1/r^4$. Das Integral über eine Ladung mit Radius R ist deshalb proportional zu

$$W(R) = \int_{R}^{\infty} r^2 \frac{1}{r^4} dr = \frac{1}{R}$$
(2.48)

Im Limes $R \to 0$ divergiert dieses Integral; eine Punktladung hat also eine unendlich große Selbstenergie! Die klassische Elektrodynamik kann dieses Rätsel nicht lösen. Ob die Quantenelektrodynamik eine Antwort darauf findet, ist dem Autor nicht klar.

Plattenkondensator

Wir wollen die in einem Plattenkondensator gespeicherte Energie mithilfe der Feldenergie berechnen. Zwei Metallplatten mit der Fläche F seien im Abstand d mit einer Spannung U aufgeladen. Wieviel Energie W wird im Kondensator gespeichert? Für einen kleinen Plattenabstand d ist das elektrische Feld E im Inneren des Kondensators näherungsweise konstant. \vec{E} steht senkrecht auf den Platten und es gilt Ed = U. Mit Gleichung 2.44 kann daraus die Energie berechnet werden:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 F d = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{U^2}{d^2} F d = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{F}{d} U^2$$
(2.49)

Die Energie des Kondensators wächst somit mit dem Quadrat der Spannung, der Fläche und dem inversen Abstand zwischen den Platten.

Werden beispielsweise zwei Metallplatten mit der Fläche $1m^2$ im Abstand von $1\mu m$ zusammengefügt und mit 100 V aufgeladen, so liefert das die Energie

$$W \simeq \frac{9 \cdot 10^{-12}}{2} \frac{1}{10^{-6}} \, 100^2 \, \mathrm{J} = \frac{9}{2} 10^{-2} \, \mathrm{Ws}$$
 (2.50)

Das ist extrem wenig, gerade einmal eine hundertstel Wattsekunde. Ingenieure haben heutzutage Kondensatoren entwickelt, so genannte Superkondensatoren, die pro Kilogramm Kondensator etwa vier Wattstunden erreichen, also fast eine halbe Million mal so viel. Vielleicht wird es bald möglich sein, mit solchen Kondensatoren Autos anzutreiben und mit der Bremsenergie die Kondensatoren wieder teilweise aufzuladen.

Wieviel Ladung Q wird eigentlich in dem Kondensator gespeichert? Dazu wird die *Kapazität* C des Kondensator definiert als

$$CU = Q \tag{2.51}$$

Die Einheit von C ist offensichtlich Coulomb geteilt durch Volt C/V , auch Farad F genannt. Die Ladung können wir mithilfe der Ladungsdichte und des elektrischen Feldes nach Gleichung 2.36 berechnen, denn nach dem Gauß'schen Satz verschwindet das elektrische Feld außerhalb des Kondensators. Somit gilt

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{F} = \frac{U}{d}$$
(2.52)

und damit

$$C = \frac{\varepsilon_0 F}{d}; \quad W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C}$$
 (2.53)

Wenn wir demnach bei konstanter Ladung Q den Plattenabstand d verringern, so nimmt die gespeicherte Energie mit d ab. Die Energie ist also nicht auf den Platten, sondern im elektrischen Feld gespeichert. Natürlich kann man auch sagen: die Energie ist die potentielle Energie zwischen den positiven und negativen Ladungen auf den beiden Platten, die – wie wir berechnet haben – linear mit deren Abstand zunimmt.

2.2.5 Multipol-Entwicklung

Das Potenzial Φ einer komplexen Ladungsdichteverteilung ρ wird durch das Integral 2.29 beschrieben. Können wir dieses Integral vereinfachen? Falls der Abstand des Messgerätes von der Ladungsdichte sehr groß ist, lässt sich das Potenzial durch die Gesamtladung, durch ein Dipol- und durch ein Quadrupol-Moment ausdrücken.



Abbildung 2.10: Integrationsgebiet V über eine lokalisierte Ladungsdichte

Dazu muss im Integral $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\;\frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{r}-\vec{x}|}$ der Nenner nach dem kurzem Ortsvektor \vec{x} entwickelt werden. Es gilt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{r}}{r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$
(2.54)

Diese Entwicklung wird in das obige Integral eingesetzt, mit dem Ergebnis

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \dots \right]$$
(2.55)

Das ist die Multipolentwicklung des Potenzials. Für großen Abstand r genügen einige wenige Größen, die Momente der Ladungsdichte, um das Potenzial zu

berechnen. Dabei ist $q = \int d^3x \, \rho(\vec{x})$ die gesamte Ladung und das **Dipolmoment** \vec{p} ist definiert durch

$$\vec{p} = \int d^3x \, \vec{x} \rho(\vec{x}) \tag{2.56}$$

Der erste Term ist ein Skalar, die Gesamtladung q, und das Potenzial fällt wie bei einer Punktladung mit dem inversen Abstand 1/r ab. Der zweite Term ist ein Vektor, das Dipolmoment \vec{p} , und damit fällt das Potenzial mit dem inversen Abstandsquadrat $1/r^2$ ab. Diese Entwicklung kann natürlich fortgesetzt werden; der nächste Term ist eine Matrix, das **Quadrupol-Moment**, und damit fällt das Potenzial wie $1/r^3$ ab.



Abbildung 2.11: Gleichgroße entgegengesetzte Punktladungen

Die Multipol-Entwicklung gilt selbstverständlich auch für Punktladungen. Eine einzelne Punktladung gibt einen Monopol, zwei gleiche entgegengesetzte Ladungen geben einen Dipol und bei den gezeigten vier Ladungen hebt sich sogar das Dipolmoment weg, und es bleibt nur ein Quadrupol.

Das elektrische Feld wird durch den Gradienten des Potenzials berechnet. Wir erhalten für einen Dipol \vec{p}

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$
(2.57)

Das elektrische Feld eines Dipols fällt also wie $\frac{1}{r^3}$ ab. Die Abbildung 2.2 zeigt das elektrische Feld eines Dipols.

Wie groß ist die Energie eines Dipols in einem äußeren elektrischen Feld? Wie groß ist die Energie zweier miteinander wechselwirkender Dipole? Dazu betrachten wir die Energie einer Ladungsdichte ρ in einem äußeren Potenzial Φ_{ex} :

$$W = \int d^3x \,\rho(\vec{x}) \,\Phi_{ex}(\vec{x}) \tag{2.58}$$

Die Ausdehnung der Ladungsdichte sei klein gegenüber den Änderungen des

äußeren Potenzials. In diesem Fall kann das Potenzial nach einer Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$\Phi_{ex}(\vec{x}) = \Phi_{ex}(0) + \vec{x} \cdot \nabla_{\vec{x}=0} \Phi_{ex} + \dots$$
(2.59)

Der Gradient des Potenzials ist das elektrische Feld am Ort der Ladung, $\nabla_{\vec{x}=0}\Phi_{ex}(0) = -\vec{E}(0)$. Somit finden wir

$$W = q \Phi_{ex}(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) + \dots$$
 (2.60)

Die Gesamtladung wechselwirkt mit dem Potenzial, während das Dipolmoment mit dem elektrischen Feld wechselwirkt. Der folgende Term würde die Wechselwirkung des Quadrupolmomentes mit dem Feldgradienten ergeben.



Abbildung 2.12: Wechselwirkung zweier Dipole

Als Beispiel betrachten wir die Wechselwirkung zweier Dipole. Dazu setzen wir das elektrische Feld des zweiten Dipols $\vec{p_2}$ in die obige Gleichung für den ersten Dipol $\vec{p_1}$ ein. Mit Gleichung 2.57 finden wir

$$W = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_1)(\vec{r} \cdot \vec{p}_2)}{r^5} \right]$$
(2.61)

Diese Energie ist am niedrigsten, wenn die beiden Dipole und der Abstandsvektor zueinander parallel stehen.

4. Doppelstunde

2.2.6 Randwert-Probleme

Was geschieht, wenn wir eine elektrische Ladung in die Nähe eines Metalls bringen? Wir werden herleiten, dass dann die Elektronen des Metalls so verschoben werden, dass auf der Metalloberfläche eine Ladungsdichte entsteht,



Abbildung 2.13: Influenzierte Ladung in einer Metallkugel. (Quelle:Wikipedia)

die das elektrische Feld im Inneren kompensiert. Bei der Herleitung nutzen wir aus, dass das gesamte elektrische Feld innerhalb des Metalls verschwinden muss. Denn sonst würden die Elektronen bewegt werden und es würden Ströme entstehen. Daher muss im Inneren des Metalls das Potenzial konstant sein. Wird das Metall sogar geerdet, hat das Potenzial den Wert null. Das Potenzial setzt sich zusammen aus dem Potenzial der äußeren Ladung und dem der influenzierten Ladungen im Metall.

• Φ =konstant im Metall

• $\Phi = 0$ im geerdeten Metall

Wir können aber noch mehr sagen. Wie wir gezeigt haben, ist an der Metalloberfläche die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes stetig und die Normalkomponente springt um den Wert σ/ε_0 , wobei σ die Flächenladungsdichte ist. Da das Feld im Inneren verschwindet, muss also die Tangentialkomponente außen ebenfalls verschwinden; das elektrische Feld steht demnach immer senkrecht auf der Metalloberfläche. Innen verschwindet das Feld, außen dagegen nicht, somit wird eine Flächenladung σ erzeugt, die das elektrische Feld im Inneren kompensiert.

Die Berechnung des Potenzials ist ein interessantes mathematisches Problem. Das Potenzial genügt der partiellen Differenzialgleichung $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, der Poisson-Gleichung 2.32. Kennen wir die Ladungsdichte im gesamten Raum, so haben wir die Lösung 2.29 hergeleitet. Ist dagegen die Ladungsdichte nur in einem Volumen V bekannt, und kennen wir das Potenzial auf der Oberfläche von V, so ist das Potenzial in V eindeutig bestimmt. Das kann mathematisch hergeleitet werden, und diese Vorgabe des Potenzials auf der Oberfläche nennt man die Dirichlet-Randbedingungen.

Faraday-Käfig

Diese Überlegungen liefern eine wichtige Anwendung, den *Faraday-Käfig.* Betrachten wir einen Metallkäfig, beispielsweise ein Auto mit Fensterscheiben aus Metall. Wir wissen schon, dass das Potenzial des Metallkäfigs konstant sein muss. Im Inneren des Käfigs gibt es keine Ladungen, sodass das konstante Potenzial im Inneren ebenfalls eine Lösung der Poisson-Gleichung ist. Diese Lösung ist aber eindeutig. Daraus folgt, dass das Potenzial im Inneren des Autos konstant bleiben muss, das elektrische Feld verschwindet somit. Schlägt ein Blitz in das Auto ein, so schirmen die influenzierten Ladungen das elektrische Feld des Blitzes im Inneren des Autos völlig ab.



Abbildung 2.14: Der Blitz wird durch die influenzierten Ladungen abgeschirmt. Quelle:Wikipedia

Nun hat aber ein Auto keine Metallfenster. Dennoch reicht der Metallkäfig völlig aus, um Blitze abzuschirmen. Beim Cabrio bin ich mir da jedoch nicht sicher. Warum können wir im Auto telefonieren, wenn das Feld abgeschirmt wird? Dazu müssten wir das dynamische Problem lösen, die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen. Es stellt sich heraus, dass elektromagnetische Wellen durch die Fenster dringen können, wenn deren Wellenlänge kleiner als die Ausdehnung des Fensters ist. Das ist bei der Handystrahlung mit Wellenlängen von etwa 10-30 cm gerade noch gegeben.

Spiegelladung

Ein interessanter mathematischer Trick erlaubt es, für gewisse Geometrie des Metalls das Potenzial leicht zu berechnen. Wir wollen das am Beispiel der unendlich großen geerdeten Metallplatte demonstrieren, zu der wir im Abstand a eine Punktladung q anbringen. Auf der Platte muss das Potenzial

verschwinden. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung können wir nun ein äquivalentes Problem konstruieren, das zwar keine Metallplatte mehr, dafür aber $\Phi(\vec{x}) = 0$ auf der Plattenebene liefert. Das machen wir mit einer **Spiegelladung** -q, die wir auf der gegenüberliegenden Seite der Plattenebene im gleichen Abstand anbringen. Aus Symmetriegründen verschwindet das Potenzial des äquivalenten Systems auf der Ebene.



Abbildung 2.15: Identisches Potenzial im oberen Halbraum.

Für Punktladungen kennen wir jedoch dieses Potenzial:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{a}|} \right]$$
(2.62)

Für $z \geq 0$ ist dieses Potenzial die Lösung der Poisson-Gleichung für die Ladung vor der geerdeten Metallplatte.

Welchen Wert hat die induzierte Ladungsdichte σ ? Laut Gleichung 2.36 müssen wir dazu das elektrische Feld an der Platte berechnen. Das elektrische Feld erhalten wir durch den Gradienten des Potenzials, $\vec{E} = -\nabla \Phi$. Für Punktladungen haben wir den Gradienten schon ausgeführt, wir erhalten

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3} - \frac{\vec{x} + \vec{a}}{|\vec{x} + \vec{a}|^3} \right]$$
(2.63)

Auf der Platte z = 0 gilt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0\\0\\a \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x\\y\\0 \end{pmatrix}; \quad |\vec{x} - \vec{a}| = |\vec{x} + \vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$
(2.64)

Damit kann der Betrag des elektrischen Feldes und somit die Ladungsdichte berechnet werden:

$$E(x,y) = \frac{\sigma(x,y)}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$
(2.65)

Das elektrische Feld steht, wie schon hergeleitet, senkrecht auf den Platten.



Abbildung 2.16: Flächenladungsdichte der induzierten Ladung.

Die Abbildung 2.16 zeigt die Flächenladungsdichte für y = 0. Je größer der Abstand zur Punktladung, desto weniger Ladung wird induziert. Die gesamte induzierte Ladung ergibt sich durch das Integral der Flächenladungsdichte über die gesamte Platte; wir finden das erwartete Ergebnis, dass die gesamte induzierte Ladung gleich der negativen äußeren Punktladung ist.

Die Kraft auf die äußere Ladung kann durch die Kraft zwischen Ladung und Bildladung berechnet werden. Wir müssen also nur das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{a})$ der Bildladung mit der äußeren Punktladung q multiplizieren, um die Kraft zur erhalten:

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2a)^2} \vec{e}_z \tag{2.66}$$

Die Kraft ist negativ, die äußere Ladung wird demnach zur Metallplatte hingezogen.

2.2.7 Entwicklung nach orthonormalen Funktionen

Wie schon diskutiert, ist die Lösung Φ der Poisson-Gleichung eindeutig, wenn in einem Volumen V die Ladungsdichte gegeben ist, und wenn zusätzlich das Potenzial Φ auf der Oberfläche des Volumens bekannt ist. Betrachten wir nun einen Quader, der gar keine Ladungen enthält, bei dem aber das Potenzial auf seinen sechs Seitenflächen bekannt ist. Für diesen Fall zerfällt die dreidimensionale Poisson-Gleichung $\Delta \Phi = 0$ in drei eindimensionale Gleichungen, die relativ leicht zu lösen sind. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung
wird dann durch eine Überlagerung sämtlicher eindimensionaler Lösungen konstruiert.

Das ist eine wichtige Methode zur Lösung partieller Differenzialgleichungen, die uns ebenfalls in der Quantenmechanik und Hydrodynamik begegnet. Mathematisch gesehen, haben wir es hier mit einem Problem der Funktionalanalysis zu tun. Der Raum aller Lösungen ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum, der so genannte Hilbertraum. Und wir konstruieren eine Basis dieses Vektorraums, nach der sämtliche Lösungen entwickelt werden können.

In unserem Fall des Quaders machen wir für die Lösung der Poisson Gleichung den folgenden Separationsansatz:

$$\Phi(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$$
(2.67)

Mit diesem Ansatz erhalten wir drei eindimensionale Gleichungen für f, g, hMit jeweils unendlich vielen Lösungen $f_i(x), g_j(y), h_k(z)$. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist eine Überlagerung dieses **vollständigen Ortho***normalsystem*, dieser Basis:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} f_i(x) g_j(y) h_k(z)$$
(2.68)

Die Randbedingungen liefern die komplexwertigen Koeffizienten $c_{i,j,k}$.

Falls wir die Randbedingungen nicht auf einem Quader, sondern auf einem Zylinder oder einer Kugel vorgegeben haben, so machen wir den Separationsansatz in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten.

Als Beispiel wählen wir ein zweidimensionales Rechteck. Drei Seiten sollen geerdet sein, $\Phi = 0$ und auf der oberen Seite soll das Potenzial bekannt sein, $\Phi(x, y_0) = \varphi(x)$.



Abbildung 2.17: Potenzial unter zweidimensionalen Randbedingungen

Wie sieht damit die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \Phi = 0$ aus? Mit dem Separationsansatz $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$ müssen wir also die folgende Gleichung lösen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)g(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x)g(y) = 0$$
(2.69)

Durch Division mit fg erhalten wir

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$$
 (2.70)

Die linke Seite ist nur eine Funktion von x, die rechte Seite nur eine Funktion von y; deshalb müssen beide Seiten eine Konstante ergeben, die wir α^2 nennen:

$$-\frac{f''}{f} = \alpha^2 = \frac{g''}{g}$$
(2.71)

Beide Seiten können wir mit dem Exponenzialansatz leicht lösen, wir erhalten

$$f(x) = ae^{i\alpha x} + be^{-i\alpha x}; \quad g(y) = ce^{\alpha y} + de^{-\alpha y}$$
(2.72)

Aus den Randbedingungen f(0) = 0, g(0) = 0 folgt a = -b, c = -d und $f(x) = 2ia \sin(\alpha x)$, $g(y) = 2c \sinh(\alpha y)$. Die Randbedingung $f(x_0) = 0$ ist schon interessanter; aus $\sin(\alpha x_0) = 0$ folgt $\alpha x_0 = n\pi$ mit einer ganzen Zahl n. Die Konstante α kann also nicht beliebig gewählt werden, sondern sie ist durch die Randbedingungen in x-Richtung quantisiert:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{x_0} \tag{2.73}$$

Die Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha_n}$ muss in den Kasten passen, aber es passen immer noch abzählbar unendlich viele Wellenlängen in den Kasten. Unser Separationsansatz liefert demnach unendlich viele Lösungen $\Phi_n(x, y) = \sin(\alpha_n x) \sinh(\alpha_n y)$. Nun sagt uns die Funktionalanalysis, dass diese Lösungen ein vollständiges Funktionensystem sind, also eine Basis unseres Lösungsraumes. Infolgedessen kann die allgemeine Lösung nach dieser Basis entwickelt werden:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\pi \frac{x}{x_0}\right) \sinh\left(n\pi \frac{y}{x_0}\right)$$
(2.74)

Wie werden die Koeffizienten c_n berechnet? Dazu betrachten wir die Randbedingung bei $y = y_0$:

$$\varphi(x) = \Phi(x, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\pi \frac{x}{x_0}\right) \sinh\left(n\pi \frac{y_0}{x_0}\right)$$
(2.75)

Die Mathematik sagt uns, dass die Koeffizienten durch das Skalarprodukt aus der Funktion $\varphi(x)$ und der Funktion $\sin\left(n\pi\frac{x}{x_0}\right)$ berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Normierung erhalten wir

$$c_n = \frac{2}{x_0 \sinh(n\pi y_0/x_0)} \int_0^{x_0} dx \,\varphi(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{x_0}\right)$$
(2.76)

5. Doppelstunde



Abbildung 2.18: Die Basisfunktion mit n = 2 für den Kasten mit Randbedingungen.

Kugelkoordinaten

Für Randbedingungen auf einer Kugeloberfläche ist die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \Phi = 0$ etwas schwieriger. Dazu brauchen wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, den wir in entsprechenden Formelsammlungen finden. Die Poisson-Gleichung lautet damit:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right]\Phi(r,\theta,\varphi) = 0$$
(2.77)

Der Operator \hat{L} ist dabei der **Drehimpulsoperator**, den wir schon aus der Quantenmechanik kennen, $\hat{L} = \frac{\hbar}{i} (\vec{x} \times \nabla)$, mit der Eigenschaft

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
(2.78)

l ist eine ganze Zahl, l = 0, 1, 2, 3, ..., und Y_{lm} sind die **Kugelflächenfunk**tionen, ein vollständiges Funktionensystem auf der Kugeloberfläche. Diese Funktionen sind uns vom Wasserstoff-Elektron her bekannt; die Wellenfunktionen des Elektrons setzen sich zusammen aus einem Radialanteil und den Kugelflächenfunktionen. Hier ist das ähnlich. Mit dem Separationsansatz $\Phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ bleibt folgende Gleichung zu lösen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\phi(r) = 0$$
(2.79)

Die Funktionen $\phi(r) = r^l$ und $\phi(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$ lösen offensichtlich diese Gleichung. Somit erhalten wir die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung als Überlagerung aller dieser speziellen Lösungen:

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
(2.80)

Die Koeffizienten a_{lm}, b_{lm} werden aus den Randbedingungen berechnet.

Geerdete Metallkugel im homogenen Feld

Als Beispiel betrachten wir eine geerdete Metallkugel mit dem Radius Rim äußeren homogenen elektrischen Feld E_0 . Auf dem Rand der Kugel verschwindet das Potenzial $\Phi(R, \theta, \varphi) = 0$, und ohne Kugel, also auch in weitem Abstand von der Kugel lautet das Potenzial $\Phi_{ex} = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$.

Das Potenzial hängt nicht vom Winkel φ ab, daraus folgt m = 0 und damit

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) Y_{l0}(\theta)$$
(2.81)

Aus der Randbedingung $\Phi(R,\theta) = 0$ folgt

$$a_l R^l = -\frac{b_l}{R^{l+1}} \tag{2.82}$$

Für große Abstände r bleibt nur der Ausdruck $-E_0 r \cos \theta = -E_0 r Y_{10}(\theta) \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ übrig, sodass das Potenzial die folgende Form hat

$$\Phi(r,\theta) = \left(a_1r + \frac{b_1}{r^2}\right)Y_{10}(\theta) \tag{2.83}$$

Mit $a_1 Y_{10}(\theta) = -E_0 \cos \theta$ und $b_1 = -a_1 R^3$ folgt schließlich

$$\Phi(r,\theta) = -E_0 R\left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (2.84)$$

Auf der Metalloberfläche wird eine Ladung induziert. Die Flächenladungsdichte ist durch das elektrische Feld, also durch die Ableitung des Potenzials an der Oberfläche gegeben

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \qquad (2.85)$$

Die induzierte Flächenladung kompensiert das äußere elektrische Feld gerade so, dass das gesamte Feld im Inneren der Kugel verschwindet.

2.3 Magnetostatik

Magnetische Felder werden durch Ströme erzeugt. In diesem Kapitel betrachten wir den Fall, dass es nur statische Ströme und Magnetfelder gibt. Somit bleiben nur die beiden Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ übrig.



Abbildung 2.19: Potenzial einer geerdeten Metallkugel im äußeren Feld. In der Kugel und auf der x-Achse verschwindet das Potenzial.

2.3.1 Stromdichte

Was bedeutet der Vektor \vec{j} ? Es ist eine *Stromdichte*, ein Strom pro Fläche. Integrieren wir \vec{j} über eine Fläche, so erhalten wir einen Strom, also die Ladung, die pro Zeit durch die Fläche fließt,



Abbildung 2.20: Stromelement in einem dünnen Draht.

Oft betrachten wir dünne Drähte mit einer Querschnittsfläche S. Multiplizieren wir nun die räumlich konstante Stromdichte \vec{j} mit einem Volumenelement $d^3x = S dr$ des Drahtes, so erhalten wir

$$\vec{j} d^3 x = \vec{j} S dr = \frac{I}{S} S d\vec{r} = I d\vec{r}$$
 (2.87)

Analog zum *Ladungselement* $dq = \rho d^3x$ erhalten wir damit das *Stromelement*

$$\vec{j} d^3 x = I d\vec{r}$$

$$(2.88)$$

$$\vec{k} \qquad (2.88)$$

$$\vec{k} \qquad (2.88)$$

$$\vec{k} \qquad (2.88)$$

Abbildung 2.21: Strom durch einen Draht.

Die Ladungen fließen mit der mittleren Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x},t)$ durch den Draht. Nach der Zeit dt hat die Ladung ρdV die Strecke v dt zurückgelegt und dabei die Fläche S durchdrungen. Das liefert

$$I = \frac{\rho \, dV}{dt} = \frac{\rho v \, dtS}{dt} = \rho v S \tag{2.89}$$

Mit I = jS erhalten wir demnach

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$$
 (2.90)

Die Stromdichte ist das Produkt von Dichte und Geschwindigkeit der Ladungen. Beachte, dass die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen gemeint ist. Der Mittelwert der Geschwindigkeit beträgt etwa 10^{-4} m/s während die einzelnen Elektronen durch die thermische Bewegung sehr viel schneller sind, der Mittelwert des Betrages der Geschwindigkeit beträgt etwa $\langle |\vec{v}_i| \rangle \simeq 10^5$ m/s.

2.3.2 Vektorpotenzial

In der Elektrostatik haben wir schon gesehen, dass das Potenzial eine wichtige physikalische Größe ist. Die Ableitung des Potenzials, in diesem Fall der negative Gradient, liefert das elektrische Feld. Gibt es auch ein Potenzial für das magnetische Feld?

Die Antwort liefert der Zerlegungssatz 2.19. Das Magnetfeld ist quellenfrei $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, demnach ist es ein Rotationsfeld; und mit $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ liefert der Zerlegungssatz die Form dieses **Vektorpotenzials**:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A} \qquad (2.91)$$
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Im Gegensatz zum elektrischen Feld, das durch ein skalares Potenzial Φ beschrieben wird, wird beim magnetischen Feld ein *Vektorpotenzial* \vec{A} benötigt. Dennoch ist die Analogie zwischen den mathematischen Formulierungen erstaunlich:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}\,\Phi(\vec{x}) = -\nabla\Phi$$
$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Im magnetischen Fall wird der Gradient durch die Rotation, das Ladungselement $\rho d^3x'$ durch das Stromelement $\vec{j} d^3x'$ und ε_0 durch $1/\mu_0$ ersetzt.

2.3.3 Magnetfeld

Aus der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ entsteht mithilfe des Stockesschen Satzes das *Ampere-Gesetz*:

$$\int_{S} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{f} = \oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S} \vec{j} \cdot d\vec{f}$$
(2.92)

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_S \tag{2.93}$$

Das Ampere-Gesetz ist die integrale Form der Maxwell-Gleichung, analog zum Coulomb-Gesetz der Elektrostatik. Damit kann das Magnetfeld eines gestreckten Drahtes leicht berechnet werden. Wegen der Symmetrie kann das Magnetfeld nur vom Abstand abhängen, und weil es keine Quellen hat, muss es senkrecht zum Abstandsvektor stehen. Integrieren wir das Magnetfeld um einen Kreis mit dem Radius um den Draht, so finden wir damit das Amperegesetz

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)2\pi r \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
(2.94)

Das Magnetfeld nimmt demnach mit 1/r ab.



Abbildung 2.22: Magnetfeld eines Drahtes. Quelle: Wikipedia

In komplizierten Fällen kann das Magnetfeld aus dem Vektorpotenzial berechnet werden. Dazu muss die Rotation der Gleichung 2.92 gebildet werden. Nach einigen Rechnungen ergibt dies

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \tag{2.95}$$

Für eine LeiterschleifeCmit einem Strom I und mit der Beziehung $\vec{j}\,d^3x'=I\,d\vec{r}$ wird dieses Integral zu

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{r} \times \frac{\vec{x} - \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|^3}$$
(2.96)

Diese Gleichung wird auch *Biot-Savart-Gesetz* genannt.



Abbildung 2.23: Leiterschleife

6. Doppelstunde

2.3.4 Kraft auf Leiterschleifen

Bewegt sich eine einzelne Ladung in einem Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Daraus kann die Kraft auf ein Stromelement mit

der Ladung dq hergeleitet werden. Es gilt

$$I \, d\vec{r} = \vec{j} \, d^3 x = \rho \vec{v} \, d^3 x = \vec{v} \, dq \tag{2.97}$$

Daraus folgt die Kraft auf dieses kleine Drahtstück $d\vec{r}$:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{r}\times\vec{B} \tag{2.98}$$

Integrieren wir diese Gleichung über eine Leiterschleife C_1 , so erhalten wir die Kraft auf diesen Draht im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$:

$$\vec{F} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1)$$
 (2.99)

Wird das Magnetfeld durch eine zweite Leiterschleife C_2 mit dem Strom I_2 erzeugt, so kann das Biot-Savart-Gesetz 2.96 in die obige Gleichung eingesetzt werden, und es folgt die Kraft zwischen diesen beiden Leiterschleifen

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$
(2.100)

Diese Gleichung kann noch umgeformt werden, nach einiger Rechnung erhält man

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \; \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{2.101}$$

Die Kraft zwischen den beiden Leiterschleifen ist demnach proportional zum Produkt der beiden Ströme.

Kraft zwischen zwei gestreckten Drähten

Im Fall zweier gestreckter paralleler Drähte im Abstand d kann die Kraft einfacher berechnet werden. Auf ein kleines Stück $d\vec{r}$ des Drahtes Nummer zwei wirkt die Kraft $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{r} \times \vec{B}_1$, wobei das Magnetfeld \vec{B}_1 vom Draht Nummer eins erzeugt wird. Dieses Feld steht senkrecht auf $d\vec{r}$ und hat nach Gleichung 2.94 den Betrag $B_1 = \mu_0 I_1/2\pi d$. Damit erhalten wir die Kraft pro Länge

$$\frac{dF_2}{dr} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \tag{2.102}$$

Bei gleich gerichteten Strömen werden die beiden Drähte zueinander hingezogen.



Abbildung 2.24: Anziehende Kraft zwischen zwei Drähten mit gleich gerichteten Strömen.

2.3.5 Analogien zwischen der Elektro- und Magnetostatik

Wir hatten schon gesehen, dass die Elektro- und die Magnetostatik eine ähnliche mathematische Form haben. Es gibt noch weitere Ähnlichkeiten, beispielsweise beim Dipol Moment und der Feldenergie, die wir noch nicht diskutiert haben. Aus Zeitgründen fassen wir einige Analogien zwischen diesen beiden Gebieten in der folgenden Tabelle zusammen.

Elektrostatik

Magnetostatik

$$\begin{split} \mathrm{d}q &= \rho \cdot \mathrm{d}^3 x \quad \mathbf{Ladung/Strom} \quad I \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{j} \cdot \mathrm{d}^3 x \\ \mathrm{d}\vec{F} &= \mathrm{d}q \cdot \vec{E} & \mathbf{Kraft} & \mathrm{d}\vec{F} = I \cdot \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B} \\ \vec{F} &= q \cdot \vec{E} & \vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \\ \mathrm{d}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \mathrm{d}q \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} & \mathbf{Kraftgesetz} & \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \mathrm{d}\vec{r} \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ \mathrm{d}iv \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathbf{Feldgleichungen} & \mathrm{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \\ \mathrm{rot} \vec{E} &= 0 & \mathrm{d}iv \vec{B} = 0 \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \phi & \mathbf{Potenzial} & \vec{B} = \mathrm{rot} \vec{A} \\ \Delta \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & \Delta \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{j} \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \mathrm{d}^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} & \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \mathrm{d}^3 x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \vec{p} &= \int \mathrm{d}^3 x \ \vec{x} \cdot \rho(\vec{x}) & \mathbf{Dipolmoment} & \vec{m} = \int \mathrm{d}^3 x \left(\vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}) \right) \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \dots \\ W &= -\vec{p} \cdot \vec{E} & \mathbf{Dipolenergie} & W = -\vec{m} \cdot \vec{B} \\ w &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 & \mathbf{Energiedichte} & w = -\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} & \mathbf{Hilfsfelder} & \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \end{split}$$

2.4 Zeitabhängige Felder

Bisher haben wir Ladungen und Ströme betrachtet, die sich zeitlich nicht ändern. Wir bekamen den Eindruck, dass die elektrischen und magnetischen Kräfte auf eine Probeladung momentan wirken, und die elektrischen und magnetischen Felder sind nur Hilfsgrößen, die diese Kräfte beschreiben.

James Clerk Maxwell hat aber erkannt, dass dieses Bild falsch ist. Die elektrischen und magnetischen Felder können ein Eigenleben entwickeln; es entstehen *elektromagnetische Wellen*, die sich im Raum und in der Materie ausbreiten.⁴ Die Dynamik der elektromagnetischen Felder wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben, und wir können die Eigenschaften der Wellen verstehen, ohne deren Ursprung, ohne die Ströme und Ladungen zu betrachten.

Wie kam Maxwell auf die Gleichungen, die elektrische und magnetische Kräfte vereint haben und zum elektromagnetischen Eigenleben führten? Aus den Coulomb- und Ampere-Gesetzen hatte er Differenzialgleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder hergeleitet. Doch dann hat er erkannt, dass sowohl aus Symmetriegründen als auch wegen der Ladungserhaltung in diesen Gleichungen ein Ausdruck fehlte, der **Verschiebungsstrom** $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, der zur Stromdichte \vec{j} addiert werden musste. Dieser Ausdruck liefert die elektromagnetischen Wellen.

Im folgenden Abschnitt wollen wir einige allgemeine Gesetze aus den zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen herleiten, wie die Ladungserhaltung, die Energieerhaltung und die Potenziale. Dann betrachten wir die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen ohne den Verschiebungsstrom. Diese Näherung genügt, um die Faraday-Induktion und elektrische Schaltkreise zu beschreiben. Im darauffolgenden Kapitel dagegen untersuchen wir die elektromagnetischen Wellen und eine einfache Näherung für Antennen.

2.4.1 Ladungserhaltung

Wie können wir die Erhaltung der elektrischen Ladung aus den Maxwell-Gleichungen herleiten? Die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte \vec{j} können sich zeitlich ändern, dennoch ändert sich die gesamte elektrische Ladung nicht. Ladung kann nicht vernichtet oder erzeugt werden; ein Kondensator wird geladen, indem positive und negative Ladungen voneinander getrennt

⁴Als Theoretiker lege ich Wert auf die Feststellung, dass Maxwell die Wellen 22 Jahre vor deren experimenteller Bestätigung durch Heinrich Hertz im Jahr 1886 vorhergesagt hat :-)

werden.

Betrachten wir die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Nun bilden wir die Divergenz dieser Gleichung. Dabei nutzen wir aus, dass die Divergenz einer Rotation verschwindet, $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$. Somit erhalten wir

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
(2.103)

Wenn wir nun die zeitliche und räumliche Ableitung miteinander vertauschen und die erste Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \tag{2.104}$$

Diese Gleichung wird als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet. Sie bedeutet *Ladungserhaltung*. Denn wenn wir diese Gleichung über ein Volumen integrieren und den Gauß'schen Satz anwenden, finden wir

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho \, d^3 x = -\int_{S} \vec{j} \, d\vec{f} \tag{2.105}$$

Das linke Integral ist die gesamte Ladung im Volumen V, das rechte ist der Fluss durch die Oberfläche S von V. Ohne Ströme durch die Oberfläche bleibt die Ladung im Volumen konstant.

Der zusätzliche Strom, der Verschiebungsstrom, ist demnach notwendig, um den experimentellen Befund, die Ladungserhaltung, zu garantieren. Außerdem führt er zu einer bemerkenswerten Symmetrie zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern, denn ohne Ladungen und Ströme lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
 (2.106)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (2.107)

Bis auf den Faktor $\mu_0 \varepsilon_0$, der von den verwendeten Einheiten abhängt, sind diese Gleichungen symmetrisch in \vec{E} und \vec{B} . Mit Ladungen und Strömen gibt es diese Symmetrie jedoch nicht, denn es gibt keine magnetischen Monopole und damit ebenfalls keine magnetischen Ströme.

2.4.2 Energiesatz

Die Energie ist die wichtigste physikalische Größe in allen Bereichen der Physik. Energie ist eine Erhaltungsgröße. Sie kann weder erzeugt noch vernichtet

werden, sie kann nur in verschiedene Formen umgewandelt werden, beispielsweise in kinetische oder potentielle, in chemische oder thermische Energie, in Strahlungsenergie, Kernenergie usw.. Wir hatten schon hergeleitet, dass ein elektrisches Feld eine Energie besitzt. Wie sieht der Energiesatz der Elektrodynamik aus?

Nach der klassischen Mechanik ist die Leistung $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Daher vollbringt ein elektrisches Feld an einem Ladungselement $\rho d^3 x$, das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, die Leistung

$$dP = \rho(\vec{x}) \, d^3x \, \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) \tag{2.108}$$

Nach Gleichung 2.90 kann $\rho \vec{v}$ durch \vec{j} ersetzt werden, und es folgt

$$P = \int d^3x \, \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{2.109}$$

Das Magnetfeld leistet keine Arbeit, demnach ist die Dichte der **mechani**schen Leistung, also Arbeit pro Zeit pro Volumen, gegeben durch $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Woher kommt diese Energie?

Das sagen uns die Maxwell-Gleichungen. Es gilt

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \left(\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \vec{E}$$
(2.110)

Dieser Ausdruck sagt uns noch wenig, aber wir können ihn umformen zu

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$
(2.111)

Wie geht das? Dazu brauchen wir die Produktregel der Vektoranalysis, die wir aus den Lehrbüchern entnehmen:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$
(2.112)

Die Rotation des elektrischen Feldes entnehmen wir den Maxwell-Gleichungen, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Außerdem gilt mithilfe der Produktregel

$$\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} = 2\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
(2.113)

Wenn wir das alles in die Gleichung 2.110 einsetzen, so finden wir das behauptete Ergebnis 2.111.

Der Ausdruck \vec{E}^2 liefert die schon bekannte Energiedichte des elektrischen Feldes, deswegen definieren wir

Energiedichte
$$w_{feld} = \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{B}^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E} \right]$$

Poyntingvektor $\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$ (2.114)

Damit folgt schließlich

$$\frac{\partial w_{feld}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$
(2.115)

Das ist der Energiesatz der Elektrodynamik in differenzieller Form. Das Integral dieser Gleichung macht dieses Ergebnis deutlich. Mithilfe des Gauß'schen Satzes erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{V} d^{3}x \; w_{feld}(\vec{x}, t) + \int_{S} \vec{S} \cdot d\vec{f} = -\int_{V} d^{3}x \; \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) \tag{2.116}$$

Der erste Ausdruck gibt die zeitliche Änderung der Energie des elektromagnetischen Feldes im Volumen V an. Der zweite Ausdruck beschreibt den Fluss der elektromagnetischen Energie durch die Oberfläche S des Volumens. Die rechte Seite ist die schon diskutierte mechanische Leistung des elektrischen Feldes. Sämtliche Größen haben die Dimension Energie pro Zeit, also Leistung. Wenn demnach mechanische Arbeit im Volumen geleistet wird, so wird entweder die Feldenergie im Volumen geändert oder/und es wird durch elektromagnetische Strahlung Energie nach/von außen übertragen. Auf jeden Fall bleibt die Gesamtenergie konstant.

2.4.3 Elektromagnetische Induktion

Zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugen Magnetfeldfelder. Michael Faraday erkannte jedoch im Jahre 1830, dass auch das Umgekehrte gelten sollte: zeitlich veränderliche magnetische Felder erzeugen elektrische Spannungen. Das zeigt die Maxwell-Gleichung $\nabla\times\vec{E}=-\vec{B}$, die wir über eine FlächeSintegrieren wollen. Der Stokes'sche Satz liefert ein Wegintegral über den Rand C der Fläche:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{f}$$
(2.117)

Die linke Seite, Kraft mal Weg pro Ladung, liefert eine Potenzialdifferenz, eine elektrische Spannung U. Das Integral auf der rechten Seite ist der magnetische Fluss Φ , Magnetfeld mal Fläche. Das gibt

$$U = -\dot{\Phi} \tag{2.118}$$

Dieses *Faradaysche Induktionsgesetz* sagt demnach: Ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss induziert eine elektrische Spannung. Dieses Gesetz gilt übrigens auch, wenn sich nicht das Magnetfeld, sondern die Fläche ändert,

zum Beispiel indem eine Leiterschleife in einem konstanten Magnetfeld gedreht wird. 5

Das Faradaysche Induktionsgesetz ist die Grundlage der gesamten Elektrotechnik. Strom wird erzeugt, indem Magnete in Spulen gedreht werden. Großtechnische Drehstromgeneratoren, moderne Lichtmaschinen in Fahrzeugen und der Dynamo im Fahrrad wandeln so mechanische in elektrische Energie um. Das sich drehende Magnetfeld kann sowohl durch einen Permanent- als auch durch einen Elektromagneten (siehe Skizze)erzeugt werden.



Abbildung 2.25: Generator, Quelle: Wikipedia

Schon 1834, 13 Jahre nach der Entdeckung von Michael Faraday, baute Hermann Jacobi in Potsdam einen Elektromotor. 1866 ließ Werner von Siemens eine Dynamomaschine patentieren. Die erste Straßenbahn, 5 PS stark, fuhr 1881 in Berlin mit der damals beängstigenden Geschwindigkeit von 20 km/h. Sie nahm ihren Strom noch aus den beiden Schienen. Drei Jahre später fuhr in Frankfurt eine Straßenbahn mit Oberleitung. Die elektromagnetische Induktion beherrscht auch heute noch die gesamte Elektrotechnik.

7. Doppelstunde

Induktion von Leiterschleifen

Die elektromagnetische Induktion wollen wir nun am Beispiel zweier Leiterschleifen C_1, C_2 untersuchen, die gegenseitig aber auch bei sich selbst Span-

⁵Die Herleitung gibt es im Fließbach.

nungen durch zeitabhängige Ströme induzieren. Die zeitliche Änderung der beiden Ströme I_1, I_2 sei so gering, dass der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden kann, $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$. Somit gilt $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, und folglich kann das Magnetfeld wie in der Magnetostatik berechnet werden. Jeder Strom $I_k(t)$ mit der Stromdichte \vec{j}_k erzeugt ein Magnetfeld $\vec{B}_k = \nabla \times \vec{A}_k$. Das Vektorpotenzial lautet nach Gl. 2.92, mit $\vec{j} d^3x = I d\vec{r}$:

$$\vec{A}_{k}(\vec{x},t) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} I_{k}(t) \oint_{C_{k}} \frac{d\vec{r}}{|\vec{x} - \vec{r}|}$$
(2.119)

Das gesamte Magnetfeld ist die Überlagerung der beiden Felder von den



Abbildung 2.26: Induktion zweier Leiterschleifen

einzelnen Leiterschleifen, und somit erhalten wir den Fluss durch die Fläche der ersten Leiterschleife als

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \sum_k \int_{S_1} (\nabla \times \vec{A}_k) \cdot d\vec{f} = \sum_k \oint_{C_1} \vec{A}_k \cdot d\vec{r}$$
(2.120)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k I_k(t) \oint_{C_1} \oint_{C_k} \frac{d\vec{r'} \cdot d\vec{r}}{|\vec{r'} - \vec{r'}|} = \sum_k L_{1k} I_k(t)$$
(2.121)

Dabei haben wir den Stockesschen Satz verwendet und das Doppelintegral als *Induktivität* definiert:

$$L_{jk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{d\vec{r'} \cdot d\vec{r}}{|\vec{r'} - \vec{r}|} = L_{kj}$$
(2.122)

Die zeitliche Änderung des Flusses gibt die *induzierte Spannung*:

$$U_1(t) = -\sum_k L_{1k} \dot{I}_k(t)$$
 (2.123)

Die induzierte Spannung enthält demnach zwei Beiträge: erstens durch die Selbstinduktivität L_{11} und zweitens durch die Gegeninduktivität L_{12} zwischen den beiden Leiterschleifen. Ein Strom in einer Leiterschleife induziert

also sowohl eine Spannung in der eigenen Leiterschleife als auch eine Spannung in den anderen Leiterschleifen. Eine Leiterschleife entspricht einer Spule in einem elektrischen Schaltkreis und zwei Leiterschleifen entsprechen einem Transformator.

Selbstinduktivität einer Spule

Als Beispiel wollen wir die Selbstinduktivität einer Spule berechnen. Dazu integrieren wir die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ über die Fläche *S* in der Skizze. Mithilfe des Satzes von Stokes gibt dieses Flächenintegral erstens ein Wegintegral und zweitens den Strom *I* mal Anzahl *n* der Windungen der Spule:



Abbildung 2.27: Selbstinduktivität einer Spule.

Wenn die Streufelder am Rand der Spule vernachlässigt werden, dann zeigt das Magnetfeld in Richtung der z-Achse, $\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_z$. Das Wegintegral wird damit $B(\rho_i)l - B(\rho_a)l = \mu_0 In$. Dieses Ergebnis ändert sich nicht, wenn der äußere Weg ins Unendliche verschoben wird, $\rho_a \to \infty$. Dort verschwindet aber das Magnetfeld, und wir erhalten somit $B(\rho_a) = 0$. Außerhalb der Spule gibt es kein Magnetfeld. Damit haben wir das Magnetfeld im Inneren der Spule berechnet, $B = \mu_0 In/l$.

Nach dem Induktionsgesetz gibt jede Windung der Spule die Spannung $U = -\dot{B}\pi R^2 = -\frac{\mu_0 n \dot{I}}{l}\pi R^2$. Die gesamte Spule hat somit die Spannung

$$U_{ind} = -n \frac{\mu_0 n}{l} \pi R^2 \ \dot{I} = -L \dot{I} \tag{2.125}$$

Damit haben wir die Selbstinduktivität L der Spule berechnet:

$$L = \frac{\mu_0 n^2}{l} \pi R^2$$
 (2.126)

 ${\cal L}$ wächst mit dem Quadrat der Windungszahl und des Querschnittes der Spule.

RCL-Kreis

In elektrischen Schaltkreisen gibt es Widerstände, Kondensatoren und Spulen. Im einfachsten Fall haben wir einen Serienkreis mit einem Widerstand R, einer Kapazität C, einer Induktivität L und einer äußeren Spannung $U_e(t)$, wie in der Skizze gezeigt.



Abbildung 2.28: RCL-Kreis.

Wie können wir den Strom in diesem Schwingkreis berechnen? Dazu gibt es zwei Grundsätze:

- Die Spannungen an den einzelnen Bauteilen addieren sich zur äußeren Spannung.
- Die Ströme an den einzelnen Bauteilen sind identisch.

Die Spannung am Widerstand der Länge l und QuerschnittsflächeS berechnen wir mit $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ zu

$$U_R = \int_R \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \int_R \vec{j} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} l \frac{I}{S} = IR \qquad (2.127)$$

Für einen Kondensator mit einer Kapazität C und einer Ladung Q gilt $CU_C = Q$. Und eine Spule hat, wie vorher berechnet, die Spannung $U_L = -L\dot{I}$.

$$U_R = IR$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_L = -L\dot{I}$$
(2.128)

Diese Spannungen addieren sich, allerdings muss dabei das Vorzeichen beachtet werden. In der obigen Skizze nehmen wir an, dass der Strom in Richtung des skizzierten Pfeils läuft und ansteigt, $I > 0, \dot{I} > 0$. An jedem Bauelement fällt die Spannung in Richtung von Plus nach Minus ab. Am Widerstand fällt das Potenzial in der Richtung des Stromes ab. Nach der Lenz'schen Regel erzeugt die Induktivität eine Spannung, die dem ansteigenden Strom entgegenwirkt. Und der Kondensator wird in dieser Konfiguration aufgeladen, deshalb ist die Ladung Q auf der linken Platte positiv und es gilt $I = \dot{Q}$. Das ist natürlich ein Momentanzustand, denn wir betrachten eine Wechselspannung, die zu einem wechselnden Strom und zu wechselnden Potenzialdifferenzen an den vier Bauelementen führt.

Diese Spannungen addieren sich deshalb zu

$$U_e - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0 (2.129)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach der Zeit gibt

$$\dot{U}_e = R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{I}{C} \tag{2.130}$$

Hier finden wir einen interessanten Zusammenhang mit der klassischen Mechanik: die gleiche Differenzialgleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator mit Reibung und äußerem Antrieb:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega_0^2 x + F(t) \tag{2.131}$$

Deswegen erkennen wir sofort, dass es Schwingungen und Resonanzen gibt. Ohne Widerstand und ohne äußere Spannung schwingt der Strom mit der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.132}$$

Jeder reale Schwingkreis hat einen Widerstand, der diese Schwingungen abklingen lässt. Das kann entweder durch eine rückgekoppelte Verstärkung (Sender) oder durch einen äußeren Antrieb (Empfänger, Filter) kompensiert werden.

Wird dieser Schwingkreis durch eine äußere Wechselspannung mit der Frequenz ω angetrieben, so gibt es nach dem Einschwingen ein Maximum der Stromamplitude in der Nähe von $\omega \simeq \omega_0$. Diese Resonanz wird durch den Widerstand R gedämpft und verschwindet vollständig für große Widerstände. Analog zum mechanischen System gibt es eine Phasenverschiebung zwischen dem Antrieb und dem Strom, die sich mit der Antriebsfrequenz ändert.

Wie haben wir eine solche inhomogene lineare Differenzialgleichungen in der klassischen Mechanik gelöst? Zunächst lösen wir den Fall ohne Antrieb, die homogene Differenzialgleichung, und dann suchen wir eine spezielle Lösung für den Fall mit Antrieb. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wird zu der speziellen Lösung addiert, damit erhalten wir den vollständigen Lösungsraum. Die allgemeine Lösung enthält zwei Parameter, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Lösung der homogenen Gleichung beschreibt das Einschwingung, während die spezielle Lösung die stationären Fall schwingt das System mit der Antriebsfrequenz ω .

Die Gleichungen werden durch einen Exponenzialansatz gelöst, der aus Differenzialgleichungen algebraische Gleichungen macht.

Für kompliziertere Netzwerke, die durch eine äußere Wechselspannung angetrieben werden, ist die Lösung mit komplexen Zahlen sehr hilfreich. Nach dem Einschwingen gilt

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}; \quad I(t) = I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t}; \quad \dot{I} = i\omega I; \quad \ddot{I} = -\omega^2 I$$

Damit wird die Gleichung 2.130 zu

$$U = ZI$$
 mit $Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$ (2.133)

Z ist ein komplexwertiger Widerstand, die **Impedanz**. Seine Phase gibt an, wieweit der Strom hinter der Spannung herläuft. Sein Betrag, der **Schein**widerstand |Z|, bestimmt die Amplitude des Stromes:

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|} \quad \text{mit} \quad |Z|^2 = ZZ^* = R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2 \tag{2.134}$$

Den maximalen Strom gibt es bei minimalem |Z|, also bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Bei komplizierten Netzwerken kann der komplexe Widerstand einfach ausgerechnet werden. Denn es gilt für Reihenschaltung $Z = \sum_j Z_j$ und für Parallelschaltung $\frac{1}{Z} = \sum_j \frac{1}{Z_j}$, wobei die einzelnen Teile Z_j wiederum aus vielen Elementen bestehen können.

Widerstände wandeln elektrische Energie in Wärme um. Wieviel Leistung P verbraucht ein Netzwerk im zeitlichen Mittel? Das wird nicht durch den Scheinwiderstand |Z|, sondern durch den *Wirkwiderstand* ReZ beschrieben. Leistung ist Energie pro Zeit, und Energie ist Ladung mal Spannung, daher gilt P(t) = ReU(t)ReI(t). Beachte dass die komplexwertige Spannung

U nur eine mathematische Hilfsgröße ist, denn die physikalische Spannung ist der Realteil von U. Dasselbe gilt für den Strom I. Mit $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ erhalten wir $P(t) = |I_0|^2 (ReZ \cos^2 \omega t - ImZ \sin \omega t \cos \omega t)$. Das zeitliche Mittel von sin $\omega t \cos \omega t$ verschwindet, und dasjenige von $\cos^2 \omega t$ hat den Wert 1/2. Somit gilt

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} ReZ |I_0|^2 \tag{2.135}$$

Nur der Wirkwiderstand ReZ verbraucht Leistung, der **Blindwiderstand** ImZ dagegen nicht. Schaltet man allerdings zwei Stromkreise zusammen, so wird die Leistung optimal übertragen, wenn ihre Impedanzen gleich sind. Besonders bei Hochfrequenzkabeln ist die Impedanzanpassung wichtig.

8. Doppelstunde

2.5 Elektromagnetische Wellen

In diesem Kapitel vernachlässigen wir nicht mehr den Verschiebungsstrom, sondern studieren die vollständigen Maxwell-Gleichungen. Nun sind wir endlich bei der Elektrodynamik angelangt und können das Eigenleben der elektromagnetischen Felder untersuchen.

2.5.1 Potenziale

Im statischen Fall haben wir schon gesehen, dass das elektrische Feld durch den Gradienten eines skalaren Potenzials, und das Magnetfeld durch die Rotation eines Vektorpotenzials beschrieben werden kann. Wie sehen die Potenziale im dynamischen Fall aus?

Dazu betrachten wir die beiden Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Die erste sagt, dass das magnetische Feld keine Quellen hat, folglich kann es als Rotation eines Vektorpotenzials geschrieben werden, ebenso wie im statischen Fall:

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x},t)$$
(2.136)

Setzen wir diese Gleichung in die zweite Maxwell-Gleichung ein, so finden wir

 $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$. Das wiederum bedeutet, dass der Klammerausdruck keine Wirbel hat und somit als Gradientenfeld geschrieben werden kann. Es gibt demnach ein skalares Potenzial $\Phi(\vec{x}, t)$ mit

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
(2.137)

Im dynamischen Fall werden durch die zusätzliche Zeitableitung des Vektorpotenzials die elektrischen und magnetischen Felder miteinander gekoppelt.

Nur die Ableitungen der Potenziale bestimmen die physikalischen Größen, die elektrischen und magnetischen Felder. Daher gibt es gewisse Freiheiten, diese Potenziale zu wählen. Wir wollen hier nur feststellen, dass die beiden Potenziale so gewählt werden können (Lorenz-Eichung), dass folgende Gleichungen gelten:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$
(2.138)
$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Das sind 4 entkoppelte inhomogene **Wellengleichungen**. c ist offenbar eine Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s. Für gegebene zeitabhängige Ladungsdichten und Ströme liefern diese Gleichungen die Potenziale und damit die elektromagnetischen Wellen. Antennen werden damit ebenso beschrieben wie Glasfaserkabel. Die Lösung dieser Gleichungen kann allerdings sehr kompliziert sein. Schon einfache Antennen lassen sich nicht vollständig analytisch berechnen, sondern die Ingenieure sind auf Näherungen, Multipol-Entwicklungen oder numerische Rechnungen angewiesen. Weitere Randbedingungen (Hohlleiter, Glasfaser) oder induzierte Ströme (Antennen) machen die Lösung nicht einfacher.

2.5.2 Ebenen Wellen im Vakuum

Im Vakuum, ohne Ladungen und Ströme, können die Maxwell-Gleichungen jedoch analytisch gelöst werden. Die Gleichungen 2.138 für die Potenziale sind Wellengleichungen von der Form

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \tag{2.139}$$

Dieselbe Gleichung beschreibt nicht nur die Potenziale sondern ebenso jede Komponente des elektrischen und magnetischen Feldes, denn diese werden durch Ableitungen der Potenziale gebildet. Das können wir auch direkt aus

den Maxwell-Gleichungen herleiten. Aus den beiden Wirbelgleichungen $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
(2.140)

Mit der Formel aus der Vektoranalysis $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ und der Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ erhalten wir die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.141}$$

Das gleiche gilt für das magnetische Feld. Somit erfüllt jede der sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} die Wellengleichung 2.139.

Wie lösen wir diese Wellengleichung? Wie schon so oft versuchen wir einen Exponenzialansatz mit einer komplexwertigen Amplitude F_0 :

$$F(\vec{x},t) = F_0 e^{i(k \cdot \vec{x} - \omega t)}$$
(2.142)

Dieser Ansatz erfüllt offenbar die Wellengleichung, und wir erhalten

$$\omega = c |\vec{k}| \tag{2.143}$$

Die Differenzialgleichung gibt demnach eine Beziehung zwischen der Frequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} .

Die Quantenmechanik beschreibt die Bewegung eines freien Teilchens durch eine ähnliche Gleichung, die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \tag{2.144}$$

Allerdings gibt es zwei wichtige Unterschiede: die Ableitung nach der Zeit hat nur eine Ordnung und die komplexe Zahl i koppelt Real- und Imaginärteil der Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}, t)$. Aber der Exponenzialansatz funktioniert ebenso mit dem Ergebnis

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{2.145}$$

Die Frequenz wächst also mit dem Quadrat des Wellenvektors. Das hat wichtige Konsequenzen für die Ausbreitung eines Wellenpaketes. In der Quantenmechanik verbreitert sich ein Wellenpaket mit der Zeit, die Ortsunschärfe nimmt zu, wogegen das elektromagnetische Wellenpaket sich zeitlich nicht ändert.

Wir wollen kurz an die physikalische Bedeutung der ebenen Welle 2.142 erinnern. Die Funktion $F(\vec{x}, t)$ ist zwar komplex, aber die Physik wird nur durch ihren Realteil beschrieben. $F = |F_0| e^{i\varphi}$ enthält einen Betrag $|F_0|$ und eine



Abbildung 2.29: Punkte konstanter Phase der ebenen Welle.

Phase $\varphi = (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$. Die Orte konstanter Phase sind Ebenen, die senkrecht auf dem Vektor \vec{k} stehen. Diese Ebenen bewegen sich in \vec{k} -Richtung mit der Geschwindigkeit $v = \omega/k$. v ist demnach die **Phasengeschwindigkeit**, die im elektromagnetischen Fall gleich der Lichtgeschwindigkeit c und damit unabhängig von der Frequenz ω ist. Der Abstand zwischen den Ebenen mit derselben Phase ist die **Wellenlänge** $\lambda = 2\pi/k$. An jedem Punkt finden wir dieselbe Phase (modulo 2π) nach der **Schwingungsdauer** $T = 2\pi/\omega$.

All dies gilt für jede Komponente des elektrischen und magnetischen Feldes. Die elektromagnetische Welle bewegt sich demnach in \vec{k} -Richtung mit der Lichtgeschwindigkeit

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \simeq 3 \cdot 10^8 m/s$$
(2.146)

Allerdings sind die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes nicht unabhängig voneinander, denn sie sind durch die Maxwell-Gleichungen miteinander gekoppelt. Die entsprechenden ebenen Wellen haben die Form

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}; \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$
(2.147)

Wegen der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ sind die Wellenlängen und Frequenzen für das elektrische und magnetische Feld identisch. Die Rechnung mit dem Nabla Operator ist hier besonders einfach, denn es gilt

$$\nabla \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}; \quad \nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$$
(2.148)

Die Maxwell-Gleichungen liefern damit Relationen zwischen den beiden Amplituden-Vektoren und dem Wellenvektor:



Abbildung 2.30: Elektromagnetische Welle. Quelle: Wikipedia

Nicht nur die Richtungen sondern auch die Beträge sind miteinander verknüpft. Aus $kE_0 = \omega B_0 = ckB_0$ folgt

$$E_0 = cB_0$$
 (2.150)

Somit bestimmen die beiden Vektoren \vec{E}_0 und \vec{k} die gesamte elektromagnetische ebene Welle. Der Realteil liefert als Überlagerung zweier Lösungen die physikalische Lösung, $Re\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*)$.

Polarisation

Mit unserer komplexen Schreibweise können wir recht einfach linear oder zirkular polarisiertes Licht beschreiben. Die z-Koordinate soll in Richtung \vec{k} zeigen; die beiden Felder liegen also in der xy-Ebene, und es gilt

$$\vec{E}(x, y, z) = E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x + E_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_y$$
(2.151)

Die beiden Amplituden sind komplexe Zahlen $E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\varphi_x}$; $E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\varphi_x+\delta)}$, und damit erhalten wir für den Realteil des elektrischen Feldes, also für die physikalische Lösung

$$Re \ \vec{E} = |E_{0x}|\cos(kz - \omega t + \varphi_x) \ \vec{e_x} + |E_{0y}|\cos(kz - \omega t + \varphi_x + \delta) \ \vec{e_y} \ (2.152)$$

Die Phasenverschiebung δ zwischen der x und y-Komponente des elektrischen Feldes bestimmt nun die Polarisation. Dazu zeichnen wir die Bahn des elektrischen Feldes in der xy-Ebene. Für $\delta = 0$ gibt es eine Gerade, für $\delta = \pi/2$ dagegen eine Ellipse, wie die folgende Abbildung zeigt.



Abbildung 2.31: Polarisation der elektromagnetischen Welle: linear für $\delta = 0$ und elliptisch für $\delta = \pi/4$ und $\delta = \pi/2$.



Abbildung 2.32: Zirkular polarisierte Welle. Quelle: Wikipedia

Energiefluss

Wieviel Energie wird durch eine elektromagnetische ebene Welle transportiert? Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist nach Gleichung 2.114 durch $w = 1/2(B^2/\mu_0 + \varepsilon_0 E^2)$ gegeben. Mit B = E/c und $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ erhalten wir $w = \varepsilon_0 E^2$. Der physikalische Anteil des Feldes \vec{E} oszilliert mit $\cos \omega t$, deshalb liefert das zeitliche Mittel von \vec{E}^2 den Faktor 1/2. Somit ist die zeitlich gemittelte Energiedichte

$$\overline{w} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \tag{2.153}$$

Im Volumen V finden wir die Energie $\overline{w}V$. Im Zeitintervall t fließt demnach die Energie $ctF \ \overline{w}$ mit der Lichtgeschwindigkeit c durch die Fläche F, die senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} steht. Das liefert den mittleren Energiefluss

(= Energie pro Fläche pro Zeit)

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \, \frac{\vec{k}}{k} \tag{2.154}$$

Das war eher ein anschauliches Argument als eine exakte Rechnung, aber dasselbe Ergebnis erhalten wir durch den mittleren Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ der elektromagnetischen Welle, Gleichung 2.114.

Von der Sonne erhalten wir auf der Erdoberfläche im Durchschnitt ungefähr 165 $\frac{W}{m^2}$. Das ist mehr als 5000 mal größer als der Energiebedarf der Menschheit. Das meiste davon wird wieder in den Weltraum abgestrahlt.⁶

Wellenpakete

Die Welle $F(x,t)=F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ mit einer gegebenen Frequenz $\omega=ck$ ist nur eine Lösung der Wellengleichung $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$ F=0, eine monochromatische Welle in einer Raumdimension. Die Wellengleichung ist aber linear, d.h. eine Überlagerung von Lösungen ist ebenfalls eine Lösung. Wenn wir unendlich viele solcher Wellen überlagern, so erhalten wir ein Wellenpaket von der Form

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} dk \qquad (2.155)$$

Jede Teilwelle wird mit einer Amplitude a(k) gewichtet. Dieses Wellenpaket ist eine Funktion von x - ct, es bewegt sich somit mit der Lichtgeschwindigkeit c auf der x-Achse. Ein ganzes Spektrum von Frequenzen ist in dem Wellenpaket enthalten, aber alle Anteile bewegen sich in derselben Phasengeschwindigkeit v = c. Im Vakuum wird sich die Form des Paketes nicht ändern.

Ein freies Teilchen wurde in der Quantenmechanik ebenfalls durch ein Wellenpaket beschrieben. Allerdings haben wir in diesem Fall schon gesehen, dass die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenzahl wächst, $v = \frac{\hbar k}{m}$. Deshalb haben alle Teilwellen eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit, und das Wellenpaket verbreitert sich mit der Zeit.

Die Mathematik der Fourier-Transformation sagt uns, dass ein breites Frequenzspektrum zu einem kurzen Wellen-Puls führt. Laserlicht mit kurzen Pulsen ist ein aktuelles Forschungsgebiet, denn mit ihnen können elektronische Zustände überlagert werden. Solche Zustände bewegen sich mit der Zeit, und mit einem weiteren Puls kann man deren zeitliche Änderung messen. 9. Doppelstunde

⁶Quelle: Sonnenenergie, Wikipedia, 10/2014



Abbildung 2.33: Wellenpakt mit einer Gaußfunktion a(k).

Außerdem lassen sich mit kurzen Laserpulsen chemische Reaktionen gezielt steuern. Zurzeit schaffen es die experimentellen Physiker, Lichtpulse mit einer Zeitdauer kürzer als Femtosekunden $10^{-15}s$ zu erzeugen. In dieser kurzen Zeit kann sogar die Polarisation des Lichtes gezielt verändert werden.⁷

2.5.3 Ebene Wellen in Materie

Auch in einem Material gibt es elektromagnetische Wellen. Im einfachsten Fall wird die Antwort des Materials einfach durch eine relative Dielektrizitätskonstante und eine relative Permeabilität beschrieben

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0; \quad \mu = \mu_r \mu_0$$
 (2.156)

Wasser hat beispielsweise im sichtbaren Bereich den Faktor $\varepsilon_r \simeq 1.77$ und bei Frequenzen bis 1 GHz $\varepsilon_r \simeq 88$. In der Materie haben damit die Maxwell-Gleichungen dieselbe Form wie im Vakuum, nur müssen die Konstanten ε_0, μ_0 durch ε, μ ersetzt werden. Wir erhalten also wie vorher elektromagnetische ebene Wellen mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{n}$$
(2.157)

wobei c_0 nun die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n der **Brechungs**index ist,

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{2.158}$$

⁷Siehe www.physik.uni-wuerzburg.de/femto-welt

Der Brechungsindex n hängt ebenso wie die Dielektrizitätskonstante demnach von der Frequenz $\omega = ck = \frac{c_0}{n(\omega)}k$ ab. Diese Eigenschaft wird **Disper**sion genannt. Die Lichtgeschwindigkeit verringert sich zu der des Vakuums um den Faktor 1/n. Licht hat im Wasser einen Brechungsindex $n \simeq 1.33$ und Fensterglas $n \simeq 1.52$. Im Glas ist Licht daher ein Drittel langsamer als im Vakuum.

Wellenpakete

Auch in der Materie sind die Maxwell-Gleichungen linear, deshalb gibt es auch dort Wellenpakete mit überlagerten ebenen Wellen. Aber es gibt einen wichtigen Unterschied: die Lichtgeschwindigkeit hängt von der Frequenz ab, es gibt eine nichtlineare Funktion $\omega(k)$. In einer Dimension sieht das Wellenpaket für jede Komponente des elektrischen und magnetischen Feldes demnach folgendermaßen aus

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)} \, dk \tag{2.159}$$

Nun betrachten wir den Fall, dass die Amplitude a(k) nur in einem engen Bereich um k_0 beiträgt. Das Wellenpaket soll also recht breit sein. In diesem Fall können wir die Frequenz um die Stelle k_0 entwickeln:

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}_{|k_0|} + \dots$$
(2.160)

Wir definieren die Geschwindigkeit

$$v = \frac{d\omega}{dk}_{|k_0|} \tag{2.161}$$

Ohne Dispersion ist v = c die Phasengeschwindigkeit für jede Teilwelle. Mit Dispersion und der Abkürzung $q = k - k_0$ erhalten wir

$$F(x,t) \simeq e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} a(k_0 + q) e^{iq(x - vt)} dq}_{H(x - vt)}$$
(2.162)

Die ebene Welle mit der Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$ wird demnach moduliert mit einer einhüllenden Funktion H, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt. Energie und Information werden offensichtlich mit der Geschwindigkeit keit v transportiert, deshalb wird v die **Gruppengeschwindigkeit** genannt.

Unter der einhüllenden Funktion bewegt sich die Welle mit einer ganz anderen Geschwindigkeit, der Phasengeschwindigkeit c des Hauptbeitrages.

Nach der Relativitätstheorie kann die Gruppengeschwindigkeit v, also die Geschwindigkeit der Informationsübertragung, nie größer als die Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum sein. Für die Phasengeschwindigkeit c dagegen gilt dieses Verbot nicht.

Wellen im Leiter

Was geschieht, wenn eine elektromagnetische Welle versucht, in einen elektrischen Leiter einzudringen? Im ungeladenen Leiter gilt $\rho = 0$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Wie schon vorher beim Vakuum bilden wir die Rotation der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{E} = -\vec{B}$ und verwenden $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E} = -\nabla \times \dot{\vec{B}} = -\mu \sigma \dot{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} \qquad (2.163)$$

Damit erhalten wir die so genannte Telegraphengleichung

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec{E}(\vec{x}, t) = 0$$
(2.164)

Nun ist eine zusätzliche Ableitung erster Ordnung in der Zeit zur Wellengleichung hinzugekommen. Lineare partielle Differenzialgleichungen lösen wir immer mit einem Exponenzialansatz, wobei der Vektor \vec{k} in x-Richtung zeigen soll: $E(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$. Damit wird die partielle Differenzialgleichung zur algebraischen Gleichung

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \mathrm{i}\omega\mu\sigma = 0 \tag{2.165}$$

Hier ist nun etwas Interessantes geschehen: der Wellenvektor ist eine komplexe Zahl $k = \alpha + i\beta$. Wenn wir Real- und Imaginärteil trennen, besteht nun das elektrisches Feld aus einem Wellenanteil und einer exponenziellen Dämpfung:

$$E(x,t) = E_0 \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x - \omega t)}}_{\text{Welle}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\beta x}}_{\text{Dämpfung}}$$
(2.166)

Die Welle läuft zwar noch mit der Phasengeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{\alpha}$ in das Metall hinein, aber sie kann im wesentlichen nur bis zur Eindringtiefe $\delta = \frac{1}{\beta}$ hineinkommen. Das wird mit **Skineffekt** bezeichnet: Wellen mit hohen

Frequenzen dringen nur in die Oberfläche eines Leiters hinein. Für Kupfer misst man bei UHF-Frequenzen $\omega \simeq 10^9 Hz$ eine Eindringtiefe von etwa $\delta \simeq 10^{-4} cm$.



Abbildung 2.34: Eine ebene Welle dringt in ein Metall ein.

Oder umgekehrt: Hochfrequente Ströme werden an den Rand eines Leiters gedrängt. In einem Leiter werden Wirbelströme induziert, die sich mit dem angelegten Wechselstrom überlagern und den Gesamtstrom an den Rand des Leiters schieben.



Abbildung 2.35: Hochfrequente Stromdichte in einem Leiter. Quelle: Wikipedia

Reflexion und Brechung

Was geschieht, wenn eine ebene elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien trifft? Wir betrachten dazu zwei Isolatoren $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ mit den Brechungsindizes n_1, n_2 . Das Licht, das vom ersten Material mit der Geschwindigkeit $c_1 = \frac{c_0}{n_1}$ auf die Grenzfläche trifft, hat im zweiten Material die Geschwindigkeit $c_2 = \frac{c_0}{n_2}$. Die einfallende Welle hat die Form

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(k_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t)}$$
 (2.167)

Das einfallende Licht wird an der Grenzfläche teilweise reflektiert und gebrochen.



Abbildung 2.36: Die einfallende Welle wird reflektiert und gebrochen.

Wie im statischen Fall können wir ebenso für zeitabhängige Felder mithilfe der Maxwell-Gleichungen herleiten:

Die Normalkomponente von \vec{E} und die Tangentialkomponenten von \vec{B} springen, die anderen Komponenten sind stetig.

Daraus können wir schließen, dass sämtliche Frequenzen denselben Wert haben, $\omega_1 = \omega_{1r} = \omega_2 = \omega$. Die Beträge der Wellenvektoren sind damit bekannt, $k_{1r} = \frac{\omega}{c_1} = k_1, \ k_2 = \frac{\omega}{c_2}$. An der Grenzfläche müssen alle drei Phasen $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ denselben Wert haben. Daraus folgt $\vec{k}_1 \cdot \vec{x} = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{x} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x}$ für alle \vec{x} auf der Grenzfläche. Das kann nur erfüllt werden, wenn die drei Vektoren $\vec{k}_1, \vec{k}_{1r}, \vec{k}_2$ in einer Ebene liegen. Wir legen die Koordinaten x, z in diese Ebene, und betrachten den Fall, dass das Medium 2 optisch dichter ist, $n_2 > n_1$.

Mit $\vec{x} = \vec{e}_x$ folgt nun

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{e}_x = \vec{k}_{1r} \cdot \vec{e}_x = \vec{k}_2 \cdot \vec{e}_x \Rightarrow k_1 \sin \theta_1 = \underbrace{k_{1r}}_{k_1} \sin \theta_{1r} = k_2 \sin \theta_2 \qquad (2.168)$$

Wir erhalten somit zwei wichtige Gesetze:

- Einfalls- gleich Ausfallswinkel: $\theta_1 = \theta_{1r}$
- Brechungsgesetz von Snellius: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$



Abbildung 2.37: Reflexion und Brechung.

Da der Sinus von θ_1 nicht größer als 1 werden kann, erhalten wir den maximalen Brechungswinkel mit

$$\sin\theta_{2max} = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.169}$$



Abbildung 2.38: Relexion des Matterhorns im Riffelsee. Quelle: Wikipedia

Wir können den Lichtstrahl aber auch umkehren, vom optisch dichteren Medium her einfallen lassen. Dann gelten die gleichen Gesetze. Was passiert aber, wenn der Winkel θ_2 nun größer als der Maximalwinkel θ_{2max} ist? Dann erhalten wir **Totalreflexion**. Der Lichtstrahl wird vollständig an der Grenzfläche reflektiert. Dennoch kann er ein wenig in das Medium n_1 eindringen. 10. Doppelstunde

Überraschenderweise können wir formal so rechnen, als ob $\sin \theta_1 > 1$ wäre. Mit Snellius gilt damit

$$e^{i\vec{k}_{1}\cdot\vec{x}} = e^{i(k_{1}x\sin\theta_{1}+k_{1}z\cos\theta_{1})} = e^{i(k_{1}x\frac{\sin\theta_{2}}{\sin\theta_{2}max})} e^{ik_{1}\cos\theta_{1}z}$$
(2.170)

Welchen Wert hat aber der Kosinus, wenn der Sinus größer als eins ist? Dazu schreiben wir

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_1} = i \sqrt{\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_{2max}}\right)^2 - 1}$$
(2.171)

D.h., der Kosinus ist eine imaginäre Zahl, und folglich wird die Welle exponenziell gedämpft:

$$e^{ik_1\cos\theta_1 z} = e^{-k_1\sqrt{\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_{2max}}\right)^2 - 1}z}$$
 (2.172)

Die Eindringtiefe ist damit

$$\delta = \frac{1}{k_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_{2max}}\right)^2 - 1}}$$
(2.173)

Bei der Totalreflexion kann demnach das Licht noch einige Wellenlängen weit in das optisch dünnere Medium eindringen. Das gilt natürlich nicht nur für Licht, sondern für jede elektromagnetische Strahlung.

Die Totalreflexion wird für Lichtleiter verwendet. In der Faseroptik sind viele dünne lichtleitende Fasern gebündelt, und das Licht wird an deren inneren Schichten mit unterschiedlichen Brechungsindizes perfekt eingesperrt und geleitet. Glasfasern als Lichtwellenleiter werden immer öfter in der Nachrichtentechnik angewendet, beispielsweise in Ihrem Audiosystem, und ersetzen dort die Kupferkabel. Übrigens: Wenn Sie unter Wasser nach oben schauen, so können Sie nur innerhalb eines Kegels von $\theta_{2max} = 49$ Grad nach außen schauen, $\sin \theta_{2max} = \frac{1}{1.33}$. Bei größeren Winkeln sehen Sie nur den Boden des Sees.

Wird innerhalb der Eindringtiefe wieder das dichtere Medium n_2 angebracht, wie in der Abbildung, so kann die Welle in abgeschwächter Form doch noch weiterlaufen. Das erinnert an den Tunneleffekt der Quantenmechanik.

2.5.4 Antennen

Bisher haben wir nur das Eigenleben der elektromagnetischen Felder berechnet. Aber wie wurden diese Felder erzeugt? Die Maxwell-Gleichungen sagen



Abbildung 2.39: Links: Eindringen der Welle bei der Totalreflexion. Rechts: Tunneln, frustrierte Totalreflexion. Quelle: Wikipedia

uns, dass durch zeitabhängige Ladungen $\rho(\vec{x}, t)$ und Ströme $\vec{j}(\vec{x}, t)$ elektromagnetische Wellen entstehen. Die entsprechenden Gleichungen haben wir schon kennen gelernt. Jede Komponente des skalaren Φ und des Vektorpotenzials \vec{A} gehorcht einer inhomogenen Wellengleichung.

Wie lösen wir lineare inhomogene Differenzialgleichungen? Da gibt es ein allgemeines Rezept: Suche die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, und addiere eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die homogene Gleichung haben wir schon gelöst, das sind die ebenen elektromagnetischen Wellen, die wir in den vorigen Abschnitten diskutiert haben. Es bleibt also die Suche nach einer speziellen Lösung.

Die Herleitung der speziellen Lösung ist mathematisch recht anspruchsvoll. Das Ergebnis dagegen hätten Sie fast raten können, jedenfalls wenn Sie sich an die statischen Ergebnisse 2.29, 2.92 erinnern und die Ausbreitung der elektromagnetischen Wirkung berücksichtigen. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}',t_{ret})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$
(2.174)
$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}',t_{ret})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$
$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$
2 Elektrodynamik

Wir haben also jeweils die statischen Ergebnisse genommen und dort die zeitabhängigen Größen eingesetzt. Allerdings nicht zur gleichen Zeit, denn die Wirkung am Ort \vec{x}' , die die Ladung oder der Strom in einem Abstand $|\vec{x} - \vec{x}'|$ hervorruft, breitet sich mit der Lichtgeschwindigkeit c aus und kommt deshalb mit der Zeitverzögerung $\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ am Ort \vec{x} an. Deshalb müssen wir die retardierte Zeit t_{ret} in die Quellen einsetzen.



Abbildung 2.40: Ausbreitung der Wirkung von Ladungen und Strömen.

Das elektrische und magnetische Feld wird durch die beiden Gleichungen $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \ \vec{E} = -\text{grad}\Phi - \dot{\vec{A}}$ berechnet. Die Ausdrücke dafür sind jedoch kompliziert, sodass wir hier nur auf die entsprechenden Lehrbücher verweisen.

Antenne

Wie werden die Integrale in den Gleichungen 2.174 berechnet? Wir wollen dazu eine Antenne mit einer Stromdichte betrachten, die mit einer Frequenz ω oszilliert: $\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t}$. Die Stromdichte im Integral wird damit zu

$$\vec{j}(\vec{x}', t_{ret}) = \vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}$$
 (2.175)

Folglich oszilliert das Vektorpotenzial mit derselben Frequenz wie die Stromdichte, $\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$. Wir können demnach im Integral den Zeitfaktor kürzen, und mit $k = \frac{\omega}{c}$ erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \, \vec{j}(\vec{x}') \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{2.176}$$

Der Integral faltet eine Kugelwelle mit der Stromdichte. Überraschenderweise benötigen wir das skalare Potenzial Φ gar nicht mehr, denn die Felder werden im Vakuum schon durch den räumlichen Anteil des Vektorpotenzials $\vec{A}(\vec{x})$

bestimmt:

$$\begin{split} \vec{B}(\vec{x},t) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{x},t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \Rightarrow \\ \dot{\vec{E}} &= c^2 e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \quad \text{Integriven} \Rightarrow \\ \vec{E}(\vec{x},t) &= \frac{ic^2}{\omega} e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \end{split}$$

Das Magnetfeld und seine Wirbel liefern in diesem Fall das elektrische Feld.

Dipolstrahlung

Im statischen Fall haben wir schon gesehen, dass sich die Potenziale vereinfachen, wenn wir die Quellen in weitem Abstand betrachten. Das gilt ebenso für Antennen. Wenn zusätzlich die Wellenlänge der Strahlung sehr viel größer ist als die Ausdehnung der Antenne, dann kann das Vektorpotenzial sogar durch das Dipolmoment der Antenne beschrieben werden.



Abbildung 2.41: Links: Elektromagnetisches Feld einer Dipolantenne. Rechts: Strahlungsrichtungen bei verschiedenen Stromverteilungen in der Antenne. Quelle: Wikipedia

Für große Abstände $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ und große Wellenlängen $k|\vec{x}| \gg 1$ gilt näherungsweise

$$\frac{\mathrm{e}^{ik|x-x'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \simeq \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x}| \tag{2.177}$$

2 Elektrodynamik

Damit vereinfacht sich das integral 2.176 zu

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu}{4\pi} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}}_{\mathrm{Kugelwelle}} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \tag{2.178}$$

Das Vektorpotenzial ist eine einfache Kugelwelle, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = \omega/k$ in alle Richtungen ausbreitet. Allerdings liefert das Integral über die Stromdichte eine Winkelabhängigkeit des Vektorpotenzials und damit ebenfalls für die elektrischen und magnetischen Felder und die abgestrahlte Leistung. Mithilfe der Kontinuitätsgleichung 2.104 kann das verbliebene Integral durch das Dipolmoment \vec{p} ausgedrückt werden, mit dem Ergebnis

$$\vec{A}(\vec{x},t) = i\omega \frac{\mu}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \qquad (2.179)$$
$$\vec{p} = \int d^3 x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

Das ist das Vektorpotenzial des *Hertz'schen Dipols*. Damit kann der Poynting-Vektor und die abgestrahlte Leistung P pro Raumwinkel Ω berechnet werden. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 p^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^3 \varepsilon} \tag{2.180}$$

Die abgestrahlte Leistung wächst demnach mit der vierten Potenz der Frequenz. Sie ist am stärksten senkrecht zur Antenne und verschwindet in Richtung des Dipolmomentes. Die Abbildung 2.41 zeigt rechts oben die Winkelabhängigkeit der abgestrahlten Leistung des Dipols. Je nach Verteilung des Stromes auf der Antenne ist allerdings die Richtcharakteristik sehr unterschiedlich, wie ebenfalls in der Abbildung für ein Vielfaches der halben Wellenlänge gezeigt wird.

Die vorige Gleichung ist verantwortlich für den blauen Himmel und die rote Abendsonne. Licht regt die Moleküle der Atmosphäre zur Dipolstrahlung an, und blaues Licht hat eine höhere Frequenz als rotes. Wegen des ω^4 Terms wird es deshalb wesentlich stärker gestreut als rotes. An einem Sonnentag sehen wir das gestreute blaue Licht am Himmel. Aus der Abendsonne dagegen wird auf ihrem langen Weg durch die Atmosphäre das blaue Licht heraus gestreut.

2 Elektrodynamik

Beschleunigte Punktladung

Eine beschleunigte Punktladungen strahlt ebenfalls elektromagnetische Energie ab. Durch das Abbremsen von Elektronen entsteht Röntgenstrahlung, ein ringförmiger Beschleuniger liefert Synchrotronstrahlung. Beide Arten der elektromagnetischen Wellen haben wichtige Anwendungen, sowohl in der Grundlagenforschung als auch in der Medizin und Technik.



Abbildung 2.42: Eine Punktladung schwingt mit der Frequenz ω und strahlt elektromagnetische Wellen ab.

Allerdings sind die mathematischen Herleitungen dieser Strahlung sehr anspruchsvoll. Wir wollen hier nur kurz deutlich machen, warum eine beschleunigte Ladung Energie abstrahlt. Wir betrachten eine Ladung q, die mit der Frequenz ω hin und her schwingt, $\vec{r}(t) = \vec{r_0} \cos \omega t$. Ihre Beschleunigung ist demnach $\vec{a} = -\vec{r_0}\omega^2 \cos \omega t$. Die Ladung hat das oszillierende Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{r_0}\cos\omega t$, deshalb strahlt sie elektromagnetische Wellen ab. Nach Gleichung 2.180 ist die abgestrahlte Leistung proportional zum Quadrat der mittleren Beschleunigung,

$$P \propto \omega^4 q^2 r_0^2 \propto q^2 \,\overline{\vec{a}^2} \tag{2.181}$$

Das gilt ebenfalls für eine kreisförmige Beschleunigung wie im Synchrotron.

Im Atom kreist nach der klassischen Vorstellung das Elektronen um den Atomkern. Deshalb sollte es ständig Energie abstrahlen und schließlich in den Atomkern fallen, was jedoch offensichtlich nicht geschieht. Dieses klassisch falsche Bild wurde durch die Quantenmechanik korrigiert. Die stationären Zustände des Elektrons haben eine feste Energie und strahlen nicht. Zwar kann ein angeregtes Elektron in einen energetisch niedrigeren Zustand springen und dabei ein Lichtquant, ein Photonen, abstrahlen; da das Elektron aber nur diskrete Energiewerte annehmen kann, bleibt es stabil im Zustand mit der niedrigsten möglichen Energie.

11. Doppelstunde

Wellen werden durch ein Medium transportiert. Schall, eine Wasseroberfläche, ein Seil, bei all dem können wir Wellen beobachten, die von dem entsprechenden Material ausgehen. So ist es nicht verwunderlich, dass im 19. Jahrhundert die Physiker nach einem Medium zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen suchten, den so genannten Äther. Auch Maxwell konstruierte ein mechanisches Modell, das die Übertragung elektromagnetischer Wellen durch gekoppelte Rollen beschrieb. Die Erde sollte sich demnach im Äther bewegen, und deshalb sollte die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen einen unterschiedlichen Wert haben. Allerdings gab es Experimente, die das widerlegten. Albert A. Michelson und Edward W. Morley haben 1887 experimentell gezeigt, dass das Licht in allen Richtungen dieselbe Geschwindigkeit hat. Entweder rotiert der Äther mit der Erde um die Sonne, oder es gibt gar keinen Äther.

Aber selbst berühmte Denker wie Hendrik Antoon Lorentz und Henri Poincare hielten am Äther als absoluten Raum fest. Gegen 1900 entwickelten sie eine Theorie, die bewegte Längen schrumpfen und bewegte Uhren langsamer gehen ließ. Die entsprechenden mathematischen Gleichungen sind die *Lorentz-Transformation*. Erst Albert Einstein verabschiedete sich 1905 vollständig vom Äther. Längenmaßstäbe werden nicht kürzer, Uhren werden nicht langsamer, sondern Raum und Zeit sind miteinander verkoppelt und müssen völlig neu interpretiert werden. Die physikalischen Gesetze gelten in allen unbeschleunigten Bezugssystemen; es gibt keinen absoluten Raum und keine absolute Zeit, alles ist relativ. Elektromagnetische Wellen werden durch kein Medium transportiert. Diese Einsicht änderte das physikalische Weltbild radikal.

Im Jahr 1905 veröffentlichte Albert Einstein – im Alter von 26 Jahren, als Angestellter im Patentamt – seine Theorie zur Elektrodynamik bewegter Körper. Diese Theorie wird **Spezielle Relativitätstheorie** genannt. Zehn Jahre später erweiterte er seine Theorie, indem er die Gravitation zusätzlich berücksichtigte. Materie krümmt den Raum, das wird **Allgemeine Rela***tivitätstheorie* genannt. In dieser Vorlesung werden wir nur die spezielle Relativitätstheorie behandeln, denn die allgemeine benötigt eine sehr anspruchsvolle Mathematik, die Differenzialgeometrie in gekrümmten Räumen,

die eine eigene Vorlesung erfordert.

Die Relativitätstheorie von Einstein konnte sich nur langsam durchsetzen. Denn wer ist schon bereit, ein Weltbild zu stürzen, das sich über Jahrhunderte bewährt hat. So hat Einstein im Jahr 1922 den Nobelpreis nicht für die Relativitätstheorie, sondern für den Photoeffekt erhalten. Aber die Relativitätstheorie wurde und wird in zahllosen Experimenten präzise bestätigt, sodass es heute keinerlei wissenschaftlichen Zweifel mehr daran gibt. Das schließt jedoch nicht aus, dass immer noch Widerlegungen der Theorie Einsteins in nicht-wissenschaftlichen Zeitschriften publiziert werden.

3.1 Konstante Lichtgeschwindigkeit

Für jeden gleichförmig bewegten Beobachter ist die Lichtgeschwindigkeit konstant. Dieses experimentelle Resultat widerspricht völlig unserer Anschauung. Betrachte zwei *Inertialsysteme*, also zwei Beobachter, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v > 0 zueinander in gleicher x-Richtung bewegen. Jeder der beiden Beobachter hat sein Bezugssystem K und K' mit Längenmessgeräten und Uhren ausgestattet, und für t = 0 soll x = x', y = y'gelten. Für ein Ereignis, beispielsweise ein Lichtblitz, am Ort \vec{x} zur Zeit t gilt offensichtlich die Galilei-Transformation

$$y = y', \quad x = x' + vt \tag{3.1}$$

Wenn sich ein Ereignis – Lichtwelle, Schallwelle, Auto – mit der Geschwindigkeit w in K bewegt gilt demnach

$$w = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \quad \Rightarrow \quad \frac{dx'}{dt} = w' = w - v \tag{3.2}$$

Das stimmt für das Auto und den Schall, aber für das Licht gilt

$$w' = w = c \tag{3.3}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c hängt nicht vom Beobachter ab!

Was ist die Lösung dieses Rätsels? Einstein hat geschlossen, dass der Beobachter K' für ein Ereignis nicht nur einen anderen Ort x' sondern ebenfalls eine andere Zeit t' misst:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \tag{3.4}$$

Physiker sollen nur über das reden, was sie messen können. Und keiner kann von vornherein schließen, dass die Zeit eine absolute Größe ist, die denselben Wert für beide Beobachter hat. Es gilt $t' \neq t$ für dasselbe Ereignis. Vor



Abbildung 3.1: Zwei Beobachter messen ein Ereignis mit jeweils ihren Koordinaten.

Einstein war t' = t so selbstverständlich, dass kein Wissenschaftler das jemals bezweifelt hat. Aber das Experiment ließ keine andere Wahl, als den Zeitbegriff zu revolutionieren. Im bewegten Bezugssystem müssen die Uhren anders gehen.

Betrachten wir einen Lichtblitz bei x = y = z = x' = y' = z' = 0, t = t' = 0. Der Beobachter K sieht eine Kugelwelle, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreitet

$$c^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{3.5}$$

Der Beobachter K' sieht jedoch das Gleiche, allerdings mit seinen Koordinaten:

$$x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2} = c^2 t^{\prime 2} \quad \Rightarrow \quad c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^{\prime 2} - x^{\prime 2} - y^{\prime 2} - z^{\prime 2} \quad (3.6)$$

Der Beobachter K stellt nun an den Ort x_2 einen Detektor auf, der zur Zeit t_2 den Lichtblitz anzeigt. Für den Beobachter K' steht der Detektor am Ort x'_2 und zeigt bei der Zeit t'_2 den Lichtblitz an. Es gibt also zwei *Ereignisse*, die von den beiden Beobachtern bei ihren jeweiligen Koordinaten gemessen werden:

• E_1 : Lichtblitz wird erzeugt: Ereignis $(x_1, t_1), (x'_1, t'_1)$

3

• E_2 : Detektor zeigt den Lichtblitz an: Ereignis $(x_2, t_2), (x'_2, t'_2)$

Für den Lichtblitz gilt demnach

$$s_{12}^{2} = (ct_{2} - ct_{1})^{2} - (x_{2} - x_{1})^{2} = (ct_{2}' - ct_{1}')^{2} - (x_{2}' - x_{1}')^{2} = s'_{12}^{2}$$
(3.7)

Einstein hat nun postuliert, dass diese Beziehung nicht nur für Licht, sondern für sämtliche Ereignisse E_1, E_2 gilt, auch für die langsamen. Die Größe s_{12}^2

nennt man auch das Quadrat des relativistischen *Abstandes zweier Zeit-Raum-Vierervektoren*. Diese Vektoren sind definiert als

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(3.8)

und der relativistische Abstand zweier Ereignisse ist definiert als

$$s_{12}^{2} = (ct_{2} - ct_{1})^{2} - (x_{2} - x_{1})^{2} - (y_{2} - y_{1})^{2} - (z_{2} - z_{1})^{2}$$
(3.9)

Das wichtige Postulat der Relativitätstheorie lautet damit

Für sämtliche Ereignisse E_1, E_2 ändert sich der Wert von s_{12}^2 nicht beim Wechsel des Inertialsystems, $s'_{12}^2 = s_{12}^2$.

Beachten Sie, dass die Relativitätstheorie nur von Ereignissen redet, also Ergebnissen von Experimenten. Wir werden später sehen, dass der relativistische Abstand zweier Ereignisse zur Längenkontraktion und zur Zeitdilatation führt. Längen werden nicht kürzer und Uhren gehen nicht langsamer, sondern der Abstand zweier Ereignisse führt zu diesen bekannten Konsequenzen.

3.2 Lorentz-Transformation

Der relativistische Abstand 3.7 zwischen zwei Ereignissen kann nur dann invariant bleiben, wenn der Beobachter K' andere Koordinaten als der Beobachter K für ein Ereignis misst. Wie sieht eine Abbildung zwischen (x', t')und (x, t) aus, die s_{12} unverändert lässt? Die Abbildung sollte linear sein, denn wenn ein Beobachter doppelte Längen und Zeitintervalle misst, sollte das auch ein bewegter Beobachter messen. Wir suchen demnach eine lineare Abbildung, eine (4x4)-Matrix \hat{L} , die s_{12} nicht ändert.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(3.10)

Gegen 1900 entwickelten Hendrik Antoon Lorentz und Henri Poincare eine solche Abbildung, die *Lorentz-Transformation*. Falls der Beobachter K'

sich in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegt, so lautet diese Matrix

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0\\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(3.11)

oder komponentenweise

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad (3.12)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c}\frac{x}{c})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

Für den Ort x erhält demnach die Galilei-Transformation x' = x - vt den zusätzlichen Faktor γ , der divergiert wenn sich der Beobachter mit der Lichtgeschwindigkeit bewegt, $v \to c$. Die Zeit t' transformiert sich dagegen komplizierter, sie hängt auch vom Ort x ab, an dem der Beobachter K das Ereignis misst. Zur Kontrolle rechnen wir damit die beiden Raum-Zeit-Abstände des Lichtblitzes aus, der am Ursprung erzeugt wird und bei (x, t) bzw. (x', t') am Detektor gemessen wird.

$$c^{2}t'^{2} = c^{2}\gamma^{2}(t - \frac{v}{c}\frac{x}{c})^{2} = \frac{(ct - \frac{v}{c}x)^{2}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}$$
$$x'^{2} = \gamma^{2}(x - vt)^{2} = \frac{(x - vt)^{2}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} \Rightarrow$$
$$c^{2}t'^{2} - x'^{2} = \frac{1}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}[c^{2}t^{2} + \frac{v^{2}}{c^{2}}x^{2} - 2vtx - (x^{2} + v^{2}t^{2} - 2xvt)] =$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}[(c^{2}t^{2} - x^{2})(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}})] = c^{2}t^{2} - x^{2} \quad \text{qed}$$

Die Lorentz-Transformation ist ein wichtiges Postulat der speziellen Relativitätstheorie. Damit können wir viele Gesetze für die Bewegung schneller Teilchen oder die Messung mit schnellen Beobachtern herleiten.

3.3 Konsequenzen aus der Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation koppelt Raum und Zeit miteinander, x'(x,t), t'(x,t), mit unanschaulichen Ergebnissen. Sie erweitert die Gesetze der klassischen Mechanik für die Bewegung extrem schneller Teilchen. Aber sie gilt ebenfalls für geringe Geschwindigkeiten v.

3.3.1 Galilei-Transformation

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ erhalten wir $\gamma \simeq 1$ und $\frac{v}{c} \simeq 0$. Damit folgt aus der Gleichung 3.12 die Galilei Transformation

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$
 (3.13)

Das bedeutet, die klassische Mechanik ist nicht falsch, sondern hat einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Das gleiche gilt für die Quantenmechanik, die wir ebenfalls relativistisch erweitern können.

3.3.2 Maximale Geschwindigkeit des Beobachters

Der Beobachter K' kann sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Denn für v > c wird der Faktor γ in Gleichung 3.12 imaginär und damit sind x', t' ebenfalls imaginär. Das ist unphysikalisch, die Lorentz-Transformation erlaubt nur

$$v < c \tag{3.14}$$

3.3.3 Gleichzeitigkeit

Nehmen wir an, K beobachtet, dass zwei Detektoren D_1, D_2 an den Orten x_1, x_2 und zur gleichen Zeit $t_1 = t_2$ ansprechen. Dann gilt mit Gleichung 3.12

$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c}\frac{x_1}{c})$$
$$t_2' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c}\frac{x_2}{c})$$
$$\Rightarrow t_2' - t_1' = \gamma \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)$$

Überraschenderweise sprechen die beiden Detektoren für K' keinesfalls gleichzeitig an! Für $x_2 > x_1$, v > 0 beobachtet K', dass D_1 nach D_2 anspricht. Würde er sich in die entgegengesetzte Richtung bewegen, würde D_1 vor D_2 ansprechen. Gleichzeitigkeit ist demnach kein sinnvoller Begriff mehr. Vorher und nachher hängt vom Beobachter ab. Allerdings ist es mit auch der Lorentz-Transformation nicht möglich, Ursache und Wirkung zu vertauschen.

Sie sehen: die Relativitätstheorie, die Konsequenzen aus der Mathematik, sind anschaulich nicht mehr zu verstehen. In unserem Leben finden zwei Ereignisse, die zur gleichen Zeit geschehen, immer gleichzeitig statt, egal ob wir sie vom Auto oder vom Flugzeug aus beobachten.

12. Doppelstunde

3.3.4 Zeitdilatation

Im vorigen Abschnitt hat der Beobachter K zwei Ereignisse zur gleichen Zeit, aber an verschiedenen Orten gemessen. Nun soll K am selben Ort x zwei verschiedene Ereignisse im zeitlichen Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$ erzeugen, beispielsweise zwei Lichtblitze. Was wird im Koordinatensystem K' gemessen? Die Lorentz-Transformation sagt uns $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma [t_2 - \frac{v}{c} \frac{x}{c} - (t_1 - \frac{v}{c} \frac{x}{c})].$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t \tag{3.15}$$

Das Zeitintervall, das der bewegte Beobachter K' misst, ist demnach länger als das Zeitintervall des ruhenden Systems. Das wird **Zeitdilatation** genannt. Das Zeitintervall Δt des ruhenden Systems wird auch **Eigenzeit** genannt, die Zeit, die für Ereignisse am selben Ort vergeht.

Lebensdauer von Myonen

Die Zeitdilatation wurde eindrucksvoll bei Myonen gemessen, die in der Atmosphäre in 10 km Höhe durch kosmische Strahlung erzeugt werden. Diese Teilchen leben aber nur kurz, sie zerfallen im Mittel nach etwa $\tau \simeq 2.2 \mu s$. In dieser Zeit können Sie nur maximal 600 m Flugstrecke zurücklegen. Dennoch können wir sie auf der Erde messen, sie fliegen demnach 10 km weit. Woran liegt das?

Für den Beobachter K' auf der Erde vergeht eben nicht die Zeit τ , sondern nach Gleichung 3.15 die Zeit $\tau_B = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Im entsprechenden Experiment wurden nur Myonen mit einer Geschwindigkeit $v \simeq 0.994c$ herausgefiltert, damit ergibt sich $\tau_B \simeq 9\tau$. Ein Myon lebt demnach für den Beobachter auf der Erde neunmal länger, es selbst hat aber nichts davon.

3.3.5 Längenkontraktion

Wie lang ist ein Stab? Dazu müssen wir seine Länge messen, und dafür benötigen wir zwei Ereignisse. Der Beobachter K registriert zur gleichen Zeit $t_2 = t_1$ den Anfang x_1 und das Ende x_2 des für ihn ruhenden Stabes. Er findet $L = x_2 - x_1$. Der Beobachter K' macht das Gleiche: er misst zur gleichen Zeit $t'_2 = t'_1$ die beiden Orte x'_2, x'_1 und findet $L' = x'_2 - x'_1$. Sind die beiden Längen gleich groß?

Mit der Lorentz-Transformation 3.12 erhalten wir $L' = \gamma(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1) = \gamma[L - v(t_2 - t_1)]$. Wegen $t_2 = t_1$ sollte also $L' = \gamma L$ folgen, demnach ist L' größer als L. Das ist falsch!

Wo liegt der Fehler? Wir müssen beachten, dass die Zeiten t_2, t_1 die transformierten Zeiten von $t'_2 = t'_1$ sind, nicht die obigen Zeiten, bei denen die beiden Ereignisse für K stattgefunden haben. Mit der Lorentz-Transformationen finden wir für $t'_2 = t'_1$

$$t_2 - \frac{v}{c}\frac{x_2}{c} = t_1 - \frac{v}{c}\frac{x_1}{c} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) = \frac{v}{c^2}L \tag{3.16}$$

Die transformierten Zeiten sind also nicht identisch. Daraus folgt

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma (L - \frac{v^2}{c^2}L) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}L$$
(3.17)

und damit

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L < L \tag{3.18}$$

K' misst demnach einen kürzeren Stab. Ein bewegter Stab scheint kürzer zu sein als ein ruhender. Das wird *Längenkontraktion* genannt.

Zu diesem Phänomen gibt es eine nette Scherzfrage: Ihr Auto ist etwas zu lang für Ihre Garage. Wie schnell muss das Auto fahren, damit es in die Garage passt? Für den Hausbesitzer, der die Garage beobachtet, scheint das bewegte Auto wirklich kürzer zu sein. Für den Fahrer allerdings ist die Garage nun etwas kürzer und das Auto passt überhaupt nicht mehr hinein. Die beiden Ereignisse – Bug trifft auf die Garagenrückwand und Heck befindet sich am Tor der Garage – finden zu jeweils unterschiedlichen Zeiten statt, sodass dieser Widerspruch entsteht.

Ist der bewegte Stab nun wirklich kürzer geworden? Dazu sagt Albert Einstein

"Die Frage, ob die Lorentz-Verkürzung wirklich besteht oder nicht, ist irreführend. Sie besteht nämlich nicht "wirklich", insofern sie für einen mitbewegten Beobachter nicht existiert; sie besteht aber "wirklich", d. h. in solcher Weise, daß sie prinzipiell durch physikalische Mittel nachgewiesen werden könnte, für einen nicht mitbewegten Beobachter."¹

Die physikalischen Prozesse ändern sich nicht, wenn wir ein Material schnell bewegen. Ein außen stehender Beobachter misst jedoch andere Längen und Zeiten. Ein Myon bewegt sich 600 m weit, bevor es zerfällt. Es sieht jedoch eine Atmosphäre, die nicht 10 km dick ist sondern nur einige hundert Meter, sodass es die Erdoberfläche erreichen kann.

3.3.6 Maximale Signalgeschwindigkeit

Wenn die Geschwindigkeit v des Beobachters K' größer ist als die Lichtgeschwindigkeit, so liefert die Lorentz-Transformation 3.12 unphysikalische Ergebnisse; das haben wir schon behandelt. Kann es aber dennoch Signale geben, die sich schneller als mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten? Das ist nicht möglich.

Dazu fordern wir, dass eine Ursache vor ihrer Wirkung stattfinden muss. Der Autor kann sich jedenfalls nicht vorstellen, dass ein Student eine Klausur besteht, bevor er die entsprechende Vorlesung gehört und studiert hat. Wir betrachten zwei Ereignisse:

- Ereignis 1: Ursache bei x_1, t_1
- Ereignis 2: Wirkung bei x_2, t_2
- Signalgeschwindigkeit: $v_s = \frac{x_2 x_1}{t_2 t_1}$

In jedem Bezugssystem muss die Ursache vor der Wirkung kommen, also muss $t'_2 > t'_1$ für jeden Beobachter gelten. Mit der Lorentz-Transformation folgt daraus

$$t_{2}' - t_{1}' = \gamma \left[t_{2} - t_{1} - \frac{v}{c} \frac{x_{2} - x_{1}}{c} \right] = \gamma \left[(t_{2} - t_{1})(1 - \frac{v}{c} \frac{v_{s}}{c}) \right]$$
(3.19)

Da beide Zeitintervalle positiv sein müssen, folgt daraus

$$1 - \frac{v}{c}\frac{v_s}{c} > 0 \tag{3.20}$$

¹Einstein, Albert: Physikalische Zeitschrift. 12, 1911, S. 509-510.

Nehmen wir nun an, es gäbe ein Signal mit $|v_s| > c$. Dann gäbe es ein Bezugssystem mit |v| < c, sodass die vorige Ungleichung nicht erfüllt wäre. Daraus würde $t'_2 < t'_1$ folgen, ein Widerspruch zur Kausalität.

Die Kausalität erzwingt, dass sich Signale höchstens mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können, $|v_s| < c$.

3.3.7 Addition von Geschwindigkeiten

Vielleicht gibt es doch noch einen Trick, Raketen schneller als mit der Lichtgeschwindigkeit zu bewegen. Betrachten Sie dazu eine Rakete, die sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt. Sie feuert einer weitere Rakete ab, die sich relativ zu ihr mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Die zweite Rakete feuert wiederum eine weitere Rakete ab, und das soll so lange fortgesetzt werden, bis schließlich die Lichtgeschwindigkeit überschritten ist. Funktioniert das?

Um das zu beantworten, müssen wir wieder die Lorentz-Transformation fragen. Das Labor auf der Erde misst die Geschwindigkeit v_1 der ersten Rakete und v_{2k} der zweiten. Die Gleichungen (Übg.) sagen uns nun

$$\frac{v_{2k}}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} < 1$$
(3.21)

Das ist das Additionstheorem der Geschwindigkeiten, die Summe von Geschwindigkeiten kann nie die Lichtgeschwindigkeit überschreiten. Die Gleichung gilt auch für Lichtblitze, die von der ersten Rakete aus gesendet werden. In diesem Fall gilt

$$\frac{v_2}{c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{2k}}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + 1}{1 + \frac{v_1}{c}} = 1 \tag{3.22}$$

Hier finden wir natürlich das Postulat der Relativitätstheorie wieder: die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, egal ob wir sie von der Erde oder von der Rakete aus messen.

Beispiel: ICE

Kann die relativistische Geschwindigkeitsaddition in unserem Alltagsleben gemessen werden? Betrachten wir dazu einen ICE, der sich mit w = 300 km/h bewegt. Ein Auto fährt parallel dazu mit der Geschwindigkeit v = 100 km/h. Nach Galilei beobachtet der Fahrer des Autos eine Geschwindigkeit des Zuges von w - v = 200 km/h.

Relativistisch gesehen misst das Auto jedoch eine Geschwindigkeit

$$w' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{\gamma [x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)]}{\gamma [t_2 - t_1 - \frac{v}{c} \frac{x_2 - x_1}{c}]} = \frac{w - v}{1 - \frac{vw}{c^2}} \simeq (w - v)(1 + 2 \cdot 10^{-14})$$
(3.23)

Diese extrem geringe Abweichung vom Galilei-Ergebnis kann man nicht messen.

13. Doppelstunde

3.3.8 Relativistische Fotos

Ein mit hoher Geschwindigkeit bewegter Stab sieht für einen ruhenden Beobachter kürzer aus, was wir bei der Diskussion der Längenkontraktion festgestellt haben. Wenn wir allerdings den Stab fotografieren, dann sieht das ganz anders aus. Denn das Licht benötigt je nach Abstand des Objektes eine unterschiedliche Zeit, um zur Kamera zu gelangen. Das liefert interessante Verzerrungen. Dazu gibt es Filme und Bilder, beispielsweise die Fahrt mit relativistischen Geschwindigkeiten durch die Altstadt von Tübingen, die den Schulen und Universitäten auf folgenden Webseiten zur Verfügung gestellt werden.

http://www.einsteinmobil.de/index.html http://www.we-heraeus-stiftung.de/ http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/



Abbildung 3.2: Foto der Altstadt von Hildesheim. So würde es aussehen, wenn es von einer fast lichtschnell bewegten Kamera aufgenommen würde. Quelle: Corvin Zahn, Ute Kraus, Universität Hildesheim

Betrachten wir das Beispiel eines Stabes, der schräg von vorn fotografiert wird.

Abbildung 3.3: Ein bewegter Stab wird fotographiert.

Der Stab der Länge l habe die Geschwindigkeit v zur Kamera hin. Ein Lichtblitz vom Stabende benötigt die Zeit Δt , um zum Anfang des Stabes zu gelangen. In diesem Zeitintervall hat sich der Stab allerdings um die Strecke $v\Delta t$ bewegt. Der Lichtblitz hat demnach die Länge $L = c\Delta t = v\Delta t + l$ zurückgelegt, um zum Anfang des Stabes zu kommen. Danach laufen beide Informationen, Licht vom Anfang und vom Ende des Stabes, auf die Kamera zu und werden später fotografiert. Auf dem Foto sieht es so aus als ob der Stab die Länge L hätte. Wie groß ist die scheinbare Länge L?

l ist die Länge des bewegten Stabes. Nach der Lorentzkontraktion ist seine Ruhelänge $l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Der Fotograf misst demnach einen kürzeren Stab. Nun gilt

$$\Delta t = \frac{l}{c - v} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{vl}{c - v} + l = \frac{l}{1 - \frac{v}{c}} = l' \frac{\sqrt{(1 - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c})}}{1 - \frac{v}{c}}$$
$$\Rightarrow \quad L = l' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Der Fotograf misst zwar einen kürzeren Stab, aber auf dem Foto sieht der Stab länger aus!

Dreidimensionale Objekte oder eine schnell bewegte Kamera liefern natürlich kompliziert verzerrte Fotos, die nur numerisch berechnet werden können.

3.3.9 Zwillingsparadoxon

Maria und Johanna sind Zwillinge. Maria macht eine Reise in einem Raumschiff mit der Geschwindigkeit v = 0.6c zu einem drei Lichtjahre entferntem

Ziel und kehrt nach zehn Jahren zurück. Verblüfft stellen beide fest: Johanna ist schneller gealtert als Maria. Wegen der relativistischen Zeitstreckung geht die Uhr von Maria langsamer als die von Johanna, sie zeigt nur acht Jahre an, somit ist Maria nun jünger als Johanna.

Das kann aber nicht sein. Denn von Maria aus gesehen bewegt sich Johanna. Also geht Johannas Uhr langsamer als diejenige von Maria und somit ist Maria älter als Johanna. Das ist das Zwillingsparadoxon. Dennoch stellen beide durch Uhrenvergleich nach der Reise fest: Johanna ist älter geworden. Für Marias Uhr und somit ebenfalls für die Alterung ihrer Körperzellen sind nur 8 Jahre vergangen, für Johanna dagegen 10 Jahre. Reisen hält jung!

Das wollen wir nun berechnen. Zunächst untersuchen wie die Reise mithilfe eines Diagramms. Üblicherweise wird in der Relativitätstheorie die Zeit vertikal und der Weg horizontal aufgetragen, beispielsweise die Zeit t in Jahren und der Weg x in Lichtjahren geteilt durch c. Die Steigung einer Bahn gibt somit die inverse skalierte Geschwindigkeit c/v.



Johanna (K) beobachtet: nach der Zeit t befindet sich Maria am Ort x = vt. Maria (K') dagegen stellt fest: an meinem Ort zeigt meine Uhr eine kürzere Zeit t' an,

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c}\frac{x}{c}) = \gamma(t - \frac{v}{c}\frac{v}{c}t) = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.8t < t$$

Demnach ist Johanna älter als Maria. Johanna beobachtet also, dass Maria ihr drei Lichtjahre entferntes Ziel B nach fünf Jahren erreicht hat. Maria dagegen hat ihr Ziel auf ihrer Uhr schon nach vier Jahren erreicht.

Am Ziel B angelangt dreht Maria um und kehrt mit der Geschwindigkeit -vzu Johanna zurück. Dazu muss das Raumschiff abbremsen und danach wieder beschleunigen, und wir gehen davon aus, dass dieses Manöver in beliebig kurzer Zeit stattfindet. Aber nun hat Maria das Inertialsystem gewechselt. Die Änderung der Raumzeit wird wieder durch die Lorentztransformation beschrieben:

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \frac{-v}{c} \frac{\Delta x}{c}) = \gamma (\Delta t - \frac{-v}{c} \frac{-v}{c} \Delta t) = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.8 \Delta t < \Delta t$$

Johanna beobachtet, dass Maria vom Ziel B bis nach Hause A wieder die Zeit $\Delta t = 5$ Jahre benötigt. Maria dagegen liest an ihrer Uhr ab: Sie war nur $\Delta t' = 4$ Jahre unterwegs. Nach der Rückkehr können sie nun ihre Uhren direkt vergleichen und stellen fest: Für Maria sind acht Jahre vergangen und in dieser Zeit ist Johanna um zehn Jahre älter geworden.

Woran liegt das? Es gibt hier drei verschiedene Inertialsysteme: die Erde E, der Hinflug H und der Rückflug R. Zwischen E und H und zwischen E und R gilt jeweils das Relativitätsprinzip und die Lorentztransformation. Von E aus gesehen ist die Eigenzeit von H und die Eigenzeit von R kürzer als die eigene Zeit. Von H oder von R aus gesehen ist dagegen die Eigenzeit von E kürzer. Letzteres zeigt wieder die Lorentztransformation:

$$\Delta t = \gamma (\Delta t' - \frac{\pm v}{c} \frac{\Delta x'}{c}) = \gamma (\Delta t' - \frac{\pm v}{c} \frac{\pm v}{c} \Delta t') = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.8 \Delta t' < \Delta t'$$

Sowohl beim Hinflug als auch beim Rückflug stellt Maria fest: für sie selbst sind 4 Jahre vergangen, aber die Uhr von Johanna zeigt nur ein Intervall von 3,2 Jahren an. Insgesamt ist die Uhr von Maria 8 Jahre gelaufen, und sie meint, dass Johanna nur 6,4 Jahre älter geworden ist. Aber nach der Rückkehr stellt sie verblüfft fest: Johanna ist zehn Jahre älter geworden.

Das liegt daran, dass Maria das Inertialsystem gewechselt hat. Im Prinzip kann sie die Uhr von Johanna an jedem Ort ablesen, denn jedes Inertialsystem ist an jedem Ort mit Uhren und Längenmaßstäben ausgestattet. Im obigen Diagramm ist die Zeit t von Johanna an jedem Ort x für konstante Zeit t' von Maria skizziert. Durch den Wechsel des Inertialsystems zeigen diese Geraden plötzlich nach oben. Somit scheint es, als ob Johanna beim Wechsel spontan um 3,6 Jahre gealtert ist. Aber Johanna merkt natürlich nichts davon, und der abschließende Uhrenvergleich zeigt: Johanna ist doch älter geworden als Maria.

Die Transformation der Raumzeit durch die Relativitätstheorie kann man nicht anschaulich verstehen, man muss sie berechnen. Aber nach zahlreichen experimentellen Bestätigungen dieser Theorie gibt es keinen Zweifel daran.

3.3.10 Ereignisse und Lichtkegel

Gleichzeitigkeit ist kein sinnvoller Begriff mehr in der Relativitätstheorie. Das hatten wir schon gesehen. Zwei Ereignisse, die für den einen Beobachter gleichzeitig geschehen, finden für ein anderes Inertialsystem zu unterschiedlichen Zeiten statt. Dennoch waren wir nicht bereit, die Kausalität aufzugeben, denn eine Ursache muss immer vor ihrer Wirkung geschehen. Der Raum zweier Ereignisse zerfällt demnach in zwei unterschiedliche Teilräume. Wie sieht das genau aus?

Der Beobachter K betrachtet zwei Ereignisse, eins bei x = 0, t = 0 und eins bei (x, t). Der relativistische Raumzeit-Abstand $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ bleibt beim Wechsel des Beobachters konstant. Wir definieren nun folgende Arten von Ereignissen

- zeitartige: $s^2 > 0$
- lichtartige: $s^2 = 0$
- raumartige: $s^2 < 0$

Ein Lichtblitz bewegt sich mit $s^2 = 0$, deshalb der Name *lichtartig*. Wenn die beiden Ereignisse am selben Ort x = 0 geschehen, gilt $s^2 > 0$, deshalb sind die beiden Ereignisse *zeitartig*: Vergangenheit und Zukunft oder Ursache und Wirkung. Wenn dagegen beide Ereignisse zur selben Zeit t = 0 stattfinden ist $s^2 < 0$ negativ, dann befinden sie sich an unterschiedlichen Orten und deshalb der Name *raumartig*.

Die Menge aller Ereignispaare kann in einem Raum-Zeit-Diagramm dargestellt werden. Üblicherweise wird die Zeit als Länge y = ct zur y-Achse. Die lichtartigen Ereignisse liegen damit auf den Diagonalen des Diagramms. In einem vierdimensionalen Raum bilden die zeitartigen Ereignisse einen dreidimensionalen Kegel, deshalb der Name *Lichtkegel*. Die Mantelfläche des Lichtkegels teilt nun die Menge aller Ereignisse in zeitartige (oben und unten) und raumartige (rechts und links) auf. Unten liegt die Vergangenheit oder die Ursache, oben die Zukunft oder die Wirkung. Raumartige Ereignisse dagegen können keine kausalen Korrelationen haben, denn für sie gilt immer $\frac{x}{t} > c$. Das ist aber verboten, wie wir vorher bei der Berechnung der Signalgeschwindigkeit gesehen haben.



Abbildung 3.4: Raum- und zeitartige Ereignisse. Die Bahn x(t) eines Teilchens bewegt sich innerhalb des Lichtkegels $s^2 > 0$.

Die Bahnen x(t) eines Teilchens sind zeitartig, denn der Ort zu einer späteren Zeit hängt immer vom Ort zu einer früheren Zeit ab. Diese Bahnen werden als **Weltlinien** bezeichnet, sie bewegen sich innerhalb des Lichtkegels von unten nach oben.

Bei den raumartigen Ereignissen gibt es keine Vergangenheit und keine Zukunft, denn sie können durch Wechsel des Beobachters gleichzeitig stattfinden. Bei einem solchen Wechsel ändert sich die Größe $s^2 = c^2t^2 - x^2 < 0$ nicht. D.h., die Menge aller Beobachter, die das gleiche Ereignis messen, liegt auf der Kurve

$$ct = \pm \sqrt{x^2 + s^2} \tag{3.24}$$

Diese Kurve liegt im Sektor der raumartigen Ereignisse, und sie enthält den Punkt t = 0. Somit gibt es einen Beobachter, der die beiden Ereignisse bei x = 0 und $x = \sqrt{-s^2}$ und gleichzeitig misst.

Raumartige Ereignisse können durch einen Wechsel des Beobachters gleichzeitig stattfinden.

3.4 Wirkung, Energie und Impuls

Bisher haben wir uns nur mit den Transformationen der Raumzeit zwischen verschiedenen Inertialystemen beschäftigt. Als Konsequenz der konstanten Lichtgeschwindigkeit wurde die Lorentz-Transformation entwickelt,



Abbildung 3.5: Die Menge aller Beobachter, die die beiden Ereignisse E_1 und E_2 messen. Für K findet E_2 später als E_1 statt, für K 'gleichzeitig und für K'' vorher.

die zur Relativität der Zeit, zur Längenkontraktion, Zeitdilatation, Aufgabe der Gleichzeitigkeit und maximalen Signalgeschwindigkeit führt.

Nun wollen wir uns der Frage widmen: was sagt die Relativitätstheorie zur Bewegung eines Teilchens? Das beantwortet ein weiteres Postulat von Albert Einstein:

Die physikalischen Gesetze gelten in allen Inertialsystemen, allerdings mit transformierten physikalischen Größen.

Dazu müssen die physikalischen Gesetze in eine Form gebracht werden, aus der die Lorentzinvarianz ersichtlich wird.

Betrachten wir zunächst ein freies Teilchen. In der klassischen Mechanik konnten wir die Bewegungsgleichungen aus einem Minimalprinzip herleiten, der Variation der Wirkung $S = \int_{1}^{2} L(x(t), \dot{x}(t)) dt$.

Erinnerung:

In der klassischen Mechanik haben wir die Lagrange-Funktion definiert als Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie, $L(x, \dot{x}, t) = T - V$. Damit haben wir eine Wirkung definiert, indem wir eine Bahn x(t) in L eingesetzt haben und diese Funktion über die Zeit integriert haben,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), v(t), t) dt$$
(3.25)

Diese Wirkung haben wir minimiert. Wir haben sämtliche Bahnen betrachtet, die zwischen zwei festen Punkten laufen, und haben im Raum dieser Bahnen das Minimum durch Variation gesucht, $\delta S = 0$. Das gab die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$
(3.26)

Daraus konnten wir Erhaltungsgrößen ableiten. Falls die Lagrange-Funktion nicht von x abhängt, ist der Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ eine Erhaltungsgröße, falls L nicht von t abhängt ist die Hamilton-Funktion $H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial v} - L$ zeitlich konstant. Für kartesischen Koordinaten ist die Hamilton-Funktion die Energie, H = E, für ein freies Teilchen natürlich nur die kinetische Energie, $E = \frac{m_0}{2}v^2$.

Für ein freies Teilchen ist dieser Formalismus offenbar übertrieben, aber in der klassischen Mechanik können wir die Gleichungen im Fall von Zwangsbedingungen ebenso für verallgemeinerte Koordinaten anwenden. Das vereinfacht die Berechnungen wesentlich.

Wir suchen also eine relativistisch invariante Wirkung S eines freien Teilchens mit der Bahn x(t). Welche invariante Größe kennen wir schon für eine Bahn?

Dazu betrachten wir zwei Ereignisse, die einen infinitesimal kleinen Abstand voneinander haben, x(t) und x(t+dt) = x(t) + dx. Deren Raumzeit Abstand $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2$ ist konstant beim Wechsel des Beobachters. Außerdem sind die beiden Ereignisse zeitartig, $(ds)^2 > 0$, deshalb ist die Größe ds reell.

Für die Bahnen eines Teilchens gibt es also die relativistisch invariante Größe $\int_1^2 ds$. Ist das schon die gesuchte Wirkung? Das können wir beantworten, wenn wir im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten die Newton'sche Mechanik erhalten.

Wir betrachten also die relativistische Wirkung $S = -\alpha \int_1^2 ds$ mit einer Konstanten α . Damit gilt

$$S = -\alpha \int_{1}^{2} ds = -\alpha \int_{1}^{2} \sqrt{c^{2}(dt)^{2} - (dx)^{2}}$$
$$= -\alpha \int_{1}^{2} c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^{2}} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{2}} = \int_{1}^{2} dt L(x, \dot{x}, t)$$
$$\Rightarrow \quad L(v) = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}$$
$$\Rightarrow \quad L \simeq -\alpha c + \frac{\alpha v^{2}}{2c} = \frac{m_{0}}{2}v^{2} + konst.$$

Im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten muss die Lagrange-Funktion L(v) bis

auf eine Konstante die bekannte kinetische Energie des Teilchens werden. Das ist der Fall, und damit haben wir auch den Faktor α bestimmt.

Wir erhalten schließlich

$$L(v) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
(3.27)

Die Größe m_0 wird **Ruhemasse** genannt, sie ist die Masse der Newton'schen Mechanik. Was bringt nun diese Lagrange-Funktion? Sie liefert den Impuls und die Energie des Teilchens. Denn die physikalischen Gesetze, hier die Lagrange-Gleichungen, bleiben auch in der Relativitätstheorie gültig:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3.28}$$

14. Doppelstunde

Die Lagrange-Funktion des freien Teilchens ändert sich nicht bei einer Translation, somit ist der *Impuls* $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ eine Erhaltungsgröße. Die Ableitung gibt

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m v \tag{3.29}$$

mit der *relativistischen Masse*

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \tag{3.30}$$

Es gibt Wissenschaftler, auch selbst Einstein, die die Größe m nicht als Masse bezeichnen wollen, denn sie hängt offensichtlich vom Beobachter ab. Oft wird nur die Ruhemasse m_0 als Masse bezeichnet, denn sie ist eine Größe, die nicht vom Beobachter abhängt, sie ist lorentzinvariant. In der klassischen Mechanik haben wir Masse als Widerstand gegen eine Beschleunigung eingeführt. In gewissem Sinn gilt das auch für die relativistische Masse. Denn auch in der Relativitätstheorie gilt das Kraftgesetz

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Allerdings hängt nun die Größe m(v) selbst von der Zeit ab, daher gilt

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m_0\gamma^3\frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\vec{v}$$

Wenn daher die Beschleunigung senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, so erhält man das Kraftgesetz

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

In diesem Fall ist somit die träge Masse gerade die relativistische Masse. Wenn jedoch die Beschleunigung in Richtung der Geschwindigkeit zeigt, so folgt

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Die träge Masse hängt somit vom Winkel zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung ab. In jedem Fall divergiert die träge Masse, wenn sich die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähert, $v \rightarrow c$. Deshalb kann ein Teilchen nicht die Lichtgeschwindigkeit überschreiten,

$$v < c \tag{3.31}$$

Das haben wir schon vorher gesehen, denn mit Teilchen lassen sich Signale übertragen, und die Signalgeschwindigkeit ist immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

Die Energie ist die Erhaltungsgröße, die mit der zeitlichen Invarianz verknüpft ist. Für ein freies Teilchen erhalten wir

$$E = v\frac{\partial L}{\partial v} - L = mv^2 - \frac{-m_0c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mv^2 + mc^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$$
(3.32)

und damit schließlich die berühmte Gleichung

$$E = mc^2 \tag{3.33}$$

Die Energie wächst proportional mit der relativistischen Masse. Insbesondere hat ein ruhendes Teilchen eine hohe Energie, im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik. Diese harmlos aussehende Gleichung hat immens wichtige Konsequenzen. Sie sagt uns, dass Energie und Masse physikalisch dasselbe bedeuten, sie sind äquivalent. Masse kann in Energie umgewandelt werden und umgekehrt. Das ist die Grundlage für Kernreaktoren, Atombomben und die Kernfusion in der Sonne, und viele Prozesse der Elementarteilchenphysik können damit verstanden werden.



Abbildung 3.6: 100 Jahre SRT im Jahr 2005

3.4.1 Kinetische und Ruheenergie

Um die Energie besser zu verstehen, betrachten wir ein Teilchen mit der Ruhemasse m_0 , das mit einer konstanten Kraft F beschleunigt wird. Für $v \to c$ kann die Geschwindigkeit nicht zunehmen. Wohin geht dann die zugeführte Energie?

Die physikalischen Gesetze gelten auch in der Relativitätstheorie:

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad T = \int Fv \, dt = \int v \, dp \tag{3.34}$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$T = \int v \, dp = vp - \int p \, dv = v \, \gamma m_0 v - \int \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \, dv$$
$$= \gamma m_0 v^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} |_0^v = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2$$
$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = E - m_0 c^2$$
Die Gesamtenergie $E = mc^2$ setzt sich zusammen aus kinetischer Energie T und Ruheenergie $m_0 c^2$.

Ein ruhendes Teilchen besitzt demnach ebenfalls Energie, seine Ruheenergie. Bei Prozessen mit mehreren Teilchen gilt der Energiesatz: Die Summe der Energien bleibt konstant. Das bedeutet, dass auch kinetische in Ruheenergie umgewandelt werden kann oder umgekehrt. Beim Zerfall von Uran-Atomenkernen geht Ruhemasse verloren. Sie geht in die kinetische Energie

der Bruchteile über und bewirkt dort weitere Spaltungen von Urankernen, eine Kettenreaktion, die riesige Mengen von Energie umwandelt. Das findet in Kernreaktoren und Atombomben statt. In der Sonne geht ebenfalls Ruhemasse verloren, wenn Wasserstoff zu Helium verschmilzt. In jeder Sekunde werden 564 Millionen Tonnen Wasserstoff zu 560 Millionen Tonnen Helium verschmolzen, 4 Millionen Tonnen Massendefekt werden somit von der Sonne abgestrahlt.² Chemische Reaktionen dagegen haben nur einen winzigen Massendefekt.

Paarerzeugung

Ein Photon hat die Energie $\hbar\omega$. Wenn seine Energie größer ist als $2m_0c^2$ von einem Elektron plus einem Positron, kann es nach Gl. 3.33 in diese Teilchen umgewandelt werden. Eine solche Paarerzeugung wird gemessen. Zusätzlich zur Energie und der Ladung muss bei diesem Prozess aber auch der relativistische Impuls erhalten bleiben, dazu braucht es zusätzliche Atomkerne.

Mit $m_0 \simeq 9 \cdot 10^{-31}$ kg und $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s berechnen wir $E \simeq 1.6 \cdot 10^{-13} J \simeq 1$ MeV. Das Photon muss demnach eine Energie größer als 1 MeV haben. Wir benötigen also hochenergetische Gammastrahlen.

Der umgekehrte Prozess, die Annihilation, ist ebenfalls möglich: ein Teilchen kann mit seinem Antiteilchen zu einem Photon verschmelzen.

Energie-Impuls Beziehung

In der klassischen Mechanik hängt die Energie eines freien Teilchens mit seinem Impuls zusammen, $E = \frac{p^2}{2m_0}$. Wie sieht diese Beziehung in der relativistischen Mechanik aus?

Dazu schreiben wir $E = mc^2$ um:

$$E^{2} = \frac{m_{0}^{2}c^{4}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} = m_{0}^{2}c^{4} \left(1 - \frac{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} + \frac{1}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}\right) = m_{0}^{2}c^{4} + m^{2}v^{2}c^{2}$$
$$\Rightarrow \qquad E^{2} = m_{0}^{2}c^{4} + c^{2}p^{2}$$

Interessanterweise liefert diese Gleichung auch eine Energie, wenn es gar keine

²Quelle: Wasserstoffbrennen, Wikipedia

Ruhemasse mehr gibt! Für Photonen mit $m_0 = 0$ erhalten wir

$$E = c |\vec{p}| \tag{3.35}$$

Wenn wir das mit der Energie eines Photons $E = \hbar \omega = \hbar ck$ vergleichen, erhalten wir den Impuls eines Photons mit $p = \hbar k$.

- Teilchen mit Ruhemasse $m_0: E = mc^2, \ \vec{p} = m\vec{v}, \ m = \gamma m_0$
- Photon: $E = c |\vec{p}|, \ \vec{p} = \hbar \vec{k}$

Beachte dass die Größe

$$\frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 = m_0^2 c^2 \tag{3.36}$$

lorentzinvariant ist, analog zu $c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (ds)^2$. Beides kann als relativistisches Längenquadrat von Vierervektoren aufgefasst werden:

$$\begin{pmatrix} c \ dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$
(3.37)

Die Größe E/c ist demnach die erste Komponente eines Vierer-Impulses.

3.5 Vierer-Vektoren

In diesem Abschnitt wollen wir einen mathematischen Formalismus vorstellen, der es erlaubt, physikalische Größen für verschiedene zueinander bewegte Beobachter zu transformieren. Diese Methode verwendet Vektoren mit vier Komponenten, so genannte Vierer-Vektoren. Einen solchen Vektor kennen wir schon, den Raumzeit-Vektor.

Zeit und Raum sind nicht mehr unabhängig voneinander, sondern sie bilden eine Einheit, einen Vierer-Vektor. In jedem Inertialsystem hat jedes Ereignis einen solchen Vierer-Vektor, und die Lorentz-Transformation ist eine Abbildung dieser Vektoren für zueinander bewegte Bezugssysteme:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(3.38)

Mathematisch betrachtet, bilden die Lorentz-Transformationen eine Gruppe mit einem Eins-Element und zu jeder Matrix \hat{L} einem inversen Element $\hat{L^{-1}}$.

3.5.1 Definitionen

Nun wollen wir alle physikalischen Größen mit vier Komponenten *Vierer-Vektor* nennen, wenn sie sich mit der Lorentz-Transformation ineinander abbilden lassen. In der Literatur ist folgende Schreibweise üblich:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x'^{\mu} = L_{\mu\lambda} x^{\lambda}$$
 (3.39)

Dabei wird über doppelt auftretende Indizes summiert, hier also über $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

Skalare

Physikalische Größen, die sich beim Wechsel des Bezugssystems nicht ändern, nennt man *Skalare*. Ein Beispiel ist der relativistische Raumzeit-Abstand zweier Ereignisse

$$s_{12}^{2} = c^{2}(t_{2} - t_{1})^{2} - (x_{2} - x_{1})^{2} - (y_{2} - y_{1})^{2} - (z_{2} - z_{1})^{2}$$
(3.40)

15. Doppelstunde

Skalarprodukt

Wir hatten schon das Längenquadrat s^2 eines Raum-Zeit-Vektors eingeführt. Das können wir ebenso als das übliche Skalarprodukt zweier vierdimensionaler Vektoren schreiben:

$$s^{2} = (ct, -x, -y, -z) \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c^{2}t^{2} - x^{2} - y^{2} - z^{2}$$
(3.41)

Dieses Skalarprodukt ist invariant beim Wechsel des Bezugssystems. Auch hier wird wieder die Kurzschreibweise eingeführt:

• Kontravarianter Vektor: $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x'^{\mu} = L_{\mu\lambda} x^{\lambda}$

- Kovarianter Vektor: $x_{\mu} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3), \quad x'_{\mu} = (L^{-1})_{\lambda\mu} x^{\lambda}$
- Invariantes Skalarprodukt: $s^2 = x_\mu x^\mu$

Der kovariante Vektor wird aus dem kontravarianten erzeugt, indem die drei raumartigen Komponenten ein negatives Vorzeichen erhalten. Er transformiert sich mit der inversen Matrix \hat{L}^{-1} .

Tensoren

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch Vierer-Matrizen erwähnen, so genannte *Tensoren*. Das sind (4x4)-Matrizen mit physikalischen Größen, die sich mit der Lorentz-Transformation folgendermaßen transformieren

$$F'^{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.42}$$

Da über doppelt auftretende Indizes summiert wird, enthält diese Gleichung 16 Summanden.

3.5.2 Eigenzeit

Nachdem wir nun Skalare und Vierer-Vektoren kennen gelernt haben, wollen wir damit die Bahn eines Teilchens untersuchen. In Vierer-Schreibweise lautet die Bahn $x^{\mu} = (ct, x(t), y(t), z(t))$. Diese Weltlinie, die durch den Ursprung der Koordinaten gehen soll, bewegt sich im Lichtkegel. Die differenzielle Änderung längs der Weltlinie ist $dx^{\mu} = (c dt, dx, dy, dz)$. Wir wissen schon, dass der differenzielle Raum-Zeit-Abstand ein Lorentz-Skalar ist, sein Wert ist unabhängig vom Beobachter. Weil die Bahn zeitartig ist, muss diese Größe positiv sein:

$$ds^{2} = dx_{\mu} dx^{\mu} = c^{2}dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2} > 0$$
$$d\tau^{2} = \frac{ds^{2}}{c^{2}} = dt^{2} - \frac{1}{c^{2}}(d\vec{r})^{2}$$

Dabei haben wir das winzige Zeitintervall $d\tau$ definiert. Das wollen wir nun im momentan ruhenden Bezugssystem des Teilchens berechnen:

$$dx^{\mu} = (c \, dt', 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad d\tau^2 = dt'^2$$
 (3.43)

Aus der invarianten Größe $d\tau^2 = dt^2(1-\frac{1}{c^2}\vec{v}^2)$ folgt

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \ d\tau > d\tau \tag{3.44}$$

Die Größe $d\tau$ ist das Zeitintervall der mitbewegten Uhr, die differenzielle *Eigenzeit*. In der vorigen Gleichung erkennen wir die Zeitdilatation wieder, die Eigenzeit geht nach.

3.5.3 Vierer-Geschwindigkeit

Wie können wir die Geschwindigkeit des Teilchens so formulieren, dass ihr Transformationsverhalten sofort sichtbar wird? Wir wissen jedoch, dass dx^{μ} ein Vierervektor und $d\tau$ ein Skalar ist. Deshalb ist die Geschwindigkeit $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ ein Vierervektor und transformiert sich dem entsprechend nach Gleichung 3.39. Sie ist jedoch nicht die Geschwindigkeit, die wir beobachten; denn wir dividieren durch die Eigenzeit und nicht durch die Zeit, die der Beobachter an seinen Uhren abliest. Es gilt

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad u^{\mu} = \gamma(v)(c, \vec{v}) \tag{3.45}$$

Das ist die *Vierer-Geschwindigkeit*. Die gemessene Geschwindigkeit \vec{v} wird mit dem relativistischen Faktor γ multipliziert, und die erste Komponente ist die Lichtgeschwindigkeit. Mit dieser Formulierung können wir nun mit Der Lorentz-Transformation 3.39 die Geschwindigkeit in jedem Inertialsystem sofort berechnen.

3.5.4 Vierer-Kraft

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen gelten in allen Bezugssystemen. Wie können wir sie form-invariant schreiben, sodass ihr Transformationverhalten sofort sichtbar wird? Dazu müssen wir Masse mal Beschleunigung als Vierervektor schreiben. du^{μ} Ist ein Vierervektor, und die Ruhemasse m_0 und die Eigenzeit $d\tau$ sind Skalare. Deshalb schreiben wir Kraft ist gleich Ruhemasse mal **Vierer-Beschleunigung**

$$F^{\mu} = m_0 \frac{du^{\mu}}{d\tau} \tag{3.46}$$

Man kann nun zeigen, dass sich die Vierer-Kraft aus der Leistung $\vec{F} \cdot \vec{v}$ und der Newton-Kraft \vec{F} zusammensetzt:

$$F^{\mu} = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, F_x, F_y, F_z\right)$$
(3.47)

3.5.5 Vierer-Impuls

Den Impuls eines Teilchens haben wir schon kennen gelernt: $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = m \vec{v}$. Damit können wir nun einen *Vierer-Impuls* definieren.

$$p^{\mu} = m_0 u^{\mu} = m_0 \gamma(c, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, m\vec{v}\right)$$
 (3.48)

Dabei haben wir $E = mc^2$ verwendet. Das Längenquadrat eines Vierer-Vektors ist ein Skalar. Das wollen wir überprüfen:

$$p_{\mu}p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - m^2 v^2 = m_0^2 u_{\mu} u^{\mu} = m_0^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow \quad E^2 = c^2 \underbrace{\gamma^2 m_0^2 v^2}_{p^2} + m_0^2 c^4$$

Wir erhalten also das Ergebnis, dass wir schon vorher hergeleitet haben. Der Vierer-Impuls setzt sich zusammen aus der Energie und dem Impuls eines Teilchens. Deshalb gilt für ihn der Erhaltungssatz: bei der Bewegung von wechselwirkenden Teilchen bleibt der gesamte Vierer-Impuls erhalten.

3.5.6 Vierer-Strom

Nun wollen wir die lorentzinvariante Form der Elektrodynamik untersuchen. Dazu benötigen wir das Transformationsverhalten der Ladungs- und Stromdichte, ρ, \vec{j} . Welche Werte misst ein Beobachter, der sich in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegt? Man kann zeigen, dass sich die folgende raumzeitliche Ableitung wie ein Vierer-Vektor transformiert:

$$\partial^{\alpha} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{3.49}$$

Damit kann die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \text{div}\vec{j} = 0$ als vierdimensionales Skalarprodukt geschrieben werden,

$$\partial_{\alpha}j^{\alpha} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^{0} + \frac{\partial}{\partial x}j^{1} + \frac{\partial}{\partial y}j^{2} + \frac{\partial}{\partial z}j^{3} = 0 \quad \text{mit}$$
(3.50)

$$j^{\alpha} = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \tag{3.51}$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Erhaltung der elektrischen Ladung und gilt somit in sämtlichen Bezugssystemen. Das Skalarprodukt $\partial_{\alpha} j^{\alpha}$ hat deshalb in allen Bezugssystemen den Wert Null, es ist ein Lorentz-Skalar. Nun kann man zeigen: wenn das Skalarprodukt eines Vierer-Vektors mit einem vierdimensionalen Vektor ein Lorentz-Skalar ist, dann muss dieser Vektor ebenfalls ein Vierer-Vektor sein. Deshalb nennen wir den Vektor j^{α} einen *Vierer-Strom*, beim Wechsel des Inertialsystems wird er mit der Lorentz-Matrix 3.12 transformiert.

Ladungserhaltung

Als Beispiel betrachten wir eine Ladungsdichte, die im Bezugssystem K ruht, $j^{\alpha} = (c\rho, 0)$. Der Beobachter K' misst nach Gleichung 3.12

$$j^{\prime \alpha} = \begin{pmatrix} c\rho'\\ j' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c}\\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho\\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c\rho\\ -\frac{v}{c}c\rho \end{pmatrix}$$
(3.52)

Die Ladungsdichte und die Stromdichte transformieren sich also wie

$$\rho' = \gamma \rho, \quad j' = -\gamma \rho v \tag{3.53}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $\gamma \to 1$ bleibt die Ladungsdichte konstant, und durch die Bewegung des Beobachters entsteht eine Stromdichte nach Gleichung 2.90. Für relativistische Geschwindigkeiten dagegen werden Ladungsund Stromdichten verstärkt. Das liegt natürlich an der Längenkontraktion. K' beobachtet ein kleineres Volumen $dV' = dx'dy'dz' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dV$, woraus folgt

$$\rho' = \frac{dq'}{dV'} = \gamma \frac{dq}{dV} = \gamma \frac{dq}{\gamma dV'}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{dq' = dq} \qquad (3.54)$$

Die Ladung dq im Volumen dV bleibt demnach konstant, sie ist lorentzinvariant. Dieses Ergebnis wurde experimentell bestätigt.

3.5.7 Vierer-Potential

Das Skalarprodukt zweier Vierer-Vektoren ist ein Lorentz-Skalar. Das gilt auch für die Ableitungen

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{3.55}$$

Wir haben schon die Wellengleichungen für das Vektor- und skalare Potenzial kennen gelernt

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\frac{\Phi}{c} = \frac{1}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0(c\rho)$$

Die vier rechten Seiten dieser Gleichungen bilden den Vierer-Strom

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$
(3.56)

Rechts steht also ein Vierer-Vektor, links wird ein Skalar mit einem Vektor multipliziert; daraus kann man folgern, dass dieser Vektor ebenfalls ein Vierer-Vektor ist, das *Vierer-Potenzial*.

$$A^{\mu} = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right) \tag{3.57}$$

Damit kennen wir das gesamte Potenzial in jedem bewegten Bezugssystem, und daraus können wir das elektromagnetische Feld berechnen.

16. Doppelstunde

3.5.8 Feldstärke-Tensor

Die beiden Felder lassen sich jedoch nicht als Vierer-Vektoren schreiben. Aber die sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} bilden einen Tensor, den **Feldstärke-Tensor**

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$
(3.58)

Wir verzichten hier auf die Herleitung und wollen auch nicht zeigen, dass diese Matrix die schon erwähnte Tänzer Eigenschaft hat,

$$F'^{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.59}$$

Damit können wir das elektrische und magnetische Feld im bewegten Bezugssystem berechnen, auch wenn wir für jede Komponente 16 Summanden erhalten. Durch die Lorentz-Transformation werden die beiden Felder miteinander vermischt.

Mit dem Feldstärke-Tensor kann man sowohl die Maxwell-Gleichungen als auch die Lorentzkraft in eine Lorentz-invariante Form bringen. Die Einzelheiten dazu finden Sie in den Lehrbüchern der theoretischen Physik.

3.5.9 Vierer-Wellenvektor

Wie transformiert sich eine elektromagnetische ebene Welle beim Wechsel des Beobachters? Das elektrische Feld dieser Welle hat die Form $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ mit $\omega = ck$. Die Phase dieser Welle kann nun als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = k^{\alpha} x_{\alpha} \quad \text{mit} \quad x_{\alpha} = (ct, -\vec{x}); \quad k^{\alpha} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$$
(3.60)

Die Phase muss Lorentz-invariant sein, denn sie beschreibt in jedem Bezugssystem Wellenberge und -täler. x_{α} ist ein Vierer-Vektor, daraus folgt:

$$k^{\alpha} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$
 ist ein Vierer-Vektor (3.61)

Der vierdimensionale Wellenvektor k^{α} transformiert sich also mit der Lorentztransformation 3.12. Sein Längenquadrat ist ein Skalar, es ändert sich nicht beim Wechsel des Bezugssystems. Daher gilt

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 = k'_{\alpha}k'^{\alpha} = \frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2$$
(3.62)

Somit gilt die Beziehung $\omega' = ck'$ zwischen der Frequenz und der Wellenlänge jedem Bezugssystem.

Doppler-Effekt

Als Beispiel betrachten wir eine Lichtquelle, die sich für einen Beobachter K mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegt. Im Ruhesystem K' der Quelle soll das Licht die Frequenz ω' haben. Der Beobachter K misst die Frequenz ω . Die Lorentz-Transformation 3.12 sagt nun

$$k^{\prime 0} = \frac{\omega'}{c} = \frac{k^0 - \frac{v}{c}k^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \omega' = \gamma(\omega - vk^1) \tag{3.63}$$



Abbildung 3.7: Rotverschiebung von Spektrallinien im optischen Spektrum des weit entfernten Superhaufens BAS11 (rechts) im Vergleich mit dem Sonnenspektrum (links). Quelle: Wikipedia

Wenn der Wellenvektor \vec{k} sich im Winkel φ zur x-Achse bewegt, so gilt $vk^1 = v\vec{e}_x \cdot \vec{k} = vk\cos\varphi = v\frac{\omega}{c}\cos\varphi$. Damit erhalten wir schließlich

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}$$

Diese Frequenzverschiebung nennt man den **Dopplereffekt**. Der Zähler ist ein rein relativistischer Effekt, den Nenner dagegen erhalten wir auch ohne Relativitätstheorie, beispielsweise beim hupenden Auto oder bei der Radarmessung der Geschwindigkeiten im Straßenverkehr.

Wenn sich die Quelle auf uns zu bewegt, $\varphi=0$, so gilt

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{(1 - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c})}}{1 - \frac{v}{c}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$
(3.64)

Die Frequenz der Quelle wird also höher, sie divergiert sogar für relativistische Objekte $v \to c$. Läuft die Quelle dagegen von uns weg, $\varphi = \pi$, so gilt

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{3.65}$$

Die Raumzeit unseres Universums dehnt sich ständig aus. Deshalb entfernen sich Galaxien von uns, und wir beobachten eine Rotverschiebung: im sichtbaren Bereich werden die Spektrallinien der Moleküle der Galaxie zum Roten hin verschoben.



Abbildung 3.8: Das Spektrum einer bewegten Lichtquelle wird je nach Bewegungsrichtung zum Roten oder zum Blauen hin verschoben. Quelle: Wikipedia

Bei einer Radarkontrolle erhalten wir mit $\omega' = 2\pi \ 10^{10}$ Hz und einer Geschwindigkeit von v = 50 km/h eine Frequenzverschiebung von $\frac{\Delta\omega}{2\pi} \simeq 10^3$ Hz, das liegt im messbaren Bereich.
In Ihrem Physikstudium haben Sie bisher kennen gelernt, wie die Bewegung einzelner Teilchen beschrieben und berechnet wird. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sagen uns, wie die Planeten um die Sonne kreisen und wie sich Elektronen in elektromagnetischen Feldern bewegen. Sie haben erfahren, wie man die Dynamik elektromagnetischer Felder beschreibt, und wie die Newton-Gleichungen in Atomen und Molekülen durch die Quantenmechanik erweitert werden müssen.

Im Prinzip können Sie damit auch die Bewegung von sehr vielen Teilchen beschreiben, beispielsweise die Bewegung von etwa 10^{24} Teilchen in einem Mol eines Stoffes. Das ist allerdings hoffnungslos. Denn schon die Bewegung von drei Teilchen kann chaotisch sein, es gibt keine analytische Lösung und selbst numerische Rechnungen können nur statistische Aussagen machen.

Andererseits zeigen Systeme mit vielen wechselwirkenden Teilchen interessante neue Eigenschaften. Ein Gas wird bei tiefen Temperaturen zu einer Flüssigkeit und bei noch tieferen zu einem Festkörper. Einige Metalle verlieren bei sehr tiefen Temperaturen ihren elektrischen Widerstand, sie werden zu Supraleitern. Andere Festkörper dagegen werden bei tiefen Temperaturen magnetisch. Legierungen von verschiedenen Materialien entmischen sich oder bilden Kristallstrukturen.

Die Eigenschaften von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern führen zu wichtigen technischen Anwendungen. Ein Automotor wandelt chemische Energie in mechanische um, ein Kraftwerk erzeugt elektrische Energie aus Verbrennungswärme, und ein Kühlschrank verringert seine Temperatur durch elektrische Energie.

Wie werden solche Prozesse physikalisch beschrieben? Was ist Wärme, was ist Temperatur, und welche Theorie beschreibt diese Prozesse? Interessanterweise gab es die Wärmelehre schon vor ihrer mikroskopischen Begründung, diese Theorie wird **Thermodynamik** genannt. Sie verwendet nur wenige physikalische Größen, wie die Energie, die Temperatur, das Volumen, den Druck, die Teilchenzahl und das chemische Potenzial, um ein Gas mit 10^{24} Teilchen zu beschreiben. Bei Magneten und Supraleitern kommen noch weitere Größen hinzu, dennoch wird ein extrem großes Vielteilchensystem nur

durch einige wenige physikalische Größen beschrieben.

Allerdings wird dazu noch eine zusätzliche wichtige Größe eingeführt, die *Entropie*. Im Prinzip beschreibt die Entropie vollständig ein System im thermischen Gleichgewicht; wobei *thermisches Gleichgewicht* bedeutet, dass das System Zeit genug hatte, um in einen stabilen Zustand zu relaxieren, und dass kein äußerer Energiefluss besteht. Ein Verbrennungsmotor in einem Auto wird näherungsweise durch die Thermodynamik beschrieben, wogegen sich die Erde durch den ständigen Energiefluss der Sonne nicht im thermischen Gleichgewicht befindet.

Die Thermodynamik ist demnach eine phänomenologische Theorie. Sie kann jedoch auch mikroskopisch hergeleitet werden, durch die *Statistische Mechanik*. Letztere führt die Entropie auf das Abzählen von Vielteilchenzuständen zurück, die wir in der Mechanik (klassisch und quantisiert) und in der Elektrodynamik kennen gelernt haben. Man muss keine Bewegungsgleichungen mehr lösen, sondern "nur" noch berechnen, wie viele mikroskopische Zustände es für eine feste Energie gibt. In dieser Vorlesung werden wir uns nur mit der Thermodynamik beschäftigen, erst am Schluss haben wir ein wenig Zeit für einen Einblick in die Statistische Mechanik.

Die theoretischen Physiker lassen sich in zwei Gruppen aufteilen¹: Die einen sind begeistert von der Thermodynamik als eine universelle und unwiderlegbar gültige Theorie. Dazu gehören Max Planck und Albert Einstein. Der Astrophysiker Eddington sagt dazu im Jahr 1935:

The law that entropy always increases, – the second law of thermodynamics –, holds, I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations – then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation – well these experimentalists bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

Die andere Gruppe dagegen, die mehr mathematisch orientierten Physiker, nennen sie schwammig, unklar, unverständlich. 1990 sagt dazu der mathematische Physiker Arnold

Every mathematician knows that it is impossible to understand an elementary course in thermodynamics.

Der mathematische Physiker Lieb hat 1999 versucht, die Thermodynamik auf eine solide mathematische Basis zu bringen. Dazu mussten er und sein

¹Die Zitate sind entnommen von: Bluff your way in the Second Law of Thermodynamics, Jos Uffink, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 32 (2001):305-394

Kollege 15 mathematische Axiome definieren. Ich bin gespannt darauf, zu erfahren, welchen Eindruck die Thermodynamik auf Sie machen wird.

Historische Daten zur Thermodynamik und Statistischen Mechanik

1740	Bernoulli	Druck als Impulsübertrag, Temperatur aus moleku- laren Geschwindigkeiten (wurde vergessen)	
1820	Gay-Lussac, Avo- gadro, Laplace, Dulong-Petit	Thermische Zustandsgleichung der Gase, pV=nRT	
1824	Carnot	Wirkungsgrad der Dampfmaschine	
	Probleme:	Wärme=Stoff oder Bewegung der Moleküle?	
1840	Joule, Helmholtz, Maver	Wärme=Form der Energie, 1.Hauptsatz	
$\begin{array}{c} 1850 \\ 1870 \end{array}$	Clausius Maxwell, Boltz- mann	Thermodynamik, Entropie, 2. Hauptsatz Mechanische Modelle zur Thermodynamik	
1870 1902	Boltzmann Gibbs	Entropie aus Abzählen der Zustände, $S = k_B \ln W$ Mathematische Formulierung der Statistischen Mechanik	
	Probleme:	Spezifische Wärme falsch, irreversible Prozes- se aus reversibler Mechanik	17. Doppel- stunde
1900	Planck	Strahlungsgesetz durch Abzählen von Energiequanten $\hbar\omega$	
1925	Bose, Einstein, Fermi	Quantenstatistik, Bose-Einstein Kondensation	
1925	Weiss	Molekularfeldtheorie von Ferromagneten	
1930	Landau	Theorie der Phasenübergänge	
1944	Onsager	Exakte Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells	
1957	Bardeen, Cooper, Schrieffer	Supraleitung	
1972	Wilson, Kadanoff	Renormierungsgruppen-Theorie	
1999 Heute	Lieb, Yngvason	Axiomatisierung der Thermodynamik Thermodynamik kleiner Systeme, Phasenübergänge fern vom Gleichgewicht, Komplexe Systeme, Struk- turbildung, Turbulenz, Selbstorganisation, Ungeord- nete Systeme (Perkolation, Spingläser), Fraktale, Neuronale Netzwerke, Zellulare Automaten,	

4.1 Thermische Größen

4.1.1 Wärme

Wenn ein heißer Körper mit einem kalten in Kontakt gebracht wird, so fließt Wärme vom heißen zum kalten Reservoir. Erst 1840 wurde klar, dass Wärme eine Form von Energie ist. Durch die thermische Bewegung der Moleküle wird Energie durch die Kontaktstelle transportiert, und die Temperaturen gleichen sich aus. Betrachten wir dazu ein Gas, das durch eine äußere Kraft langsam komprimiert wird. Langsam bedeutet dabei, dass sich das Gas immer dicht am thermischen Gleichgewicht befindet. Die mechanische Arbeit W ist Kraft



Abbildung 4.1: Ein Gas wird durch eine äußere Kraft komprimiert.

mal Weg = Kraft pro Fläche mal Volumen= Druck mal Volumen. Für eine infinitesimale Volumenänderung erhalten wir

$$\delta W = -p \, dV \tag{4.1}$$

 δW ist die am System geleistete Arbeit. Nach dem Energiesatz kann Energie nicht verloren gehen, sondern sie wird umgewandelt; aber wohin geht diese geleistete Arbeit? In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten: Sie ändert die innere Energie E des Gases, die sich aus der kinetischen und potentiellen Energie seiner Moleküle zusammensetzt, und/oder sie fließt als Wärme δQ durch die Wände nach außen.

$$dE = \delta Q - p \, dV \tag{4.2}$$

Das ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik. Die innere Energie eines Gases ändert sich indem Wärme zu- oder abfließt und Arbeit von Außen oder vom Gas geleistet wird. Hier bedeuten $\delta Q, \delta W$ kleine Energiemengen; wir werden später sehen, dass diese Größen keine mathematischen Differenziale sind,² im Gegensatz zu dE, dV.

²Deshalb verwenden wir das Symbol δ .

Wenn das Gas thermisch isoliert ist, gibt es keinen Wärmefluss, und es gilt $dE = -p \, dV$. Solche Prozesse nennt man **adiabatisch**. Die vorige Gleichung gilt für ein Gas, aber es sind noch andere Formen der Arbeit δW möglich:

-p dV:	p = Druck, V = Volumen
σdA :	$\sigma = \text{Oberflächenspannung}, A = \text{Oberfläche}$
B dM:	B = Magnetfeld, M = Magnetisierung
E dP:	E = elektrisches Feld, P = Polarisation
μdN :	$\mu =$ chemisches Potential, $N =$ Teilchenzahl

Wir werden oft das Gas als Beispiel behandeln. Wenn jedoch Druck und Volumen durch die entsprechenden Größen ersetzt werden, gelten unsere Gleichungen auch für alle anderen Systeme.

4.1.2 Entropie



Abbildung 4.2: Durchmischung zweier Gase.

Die physikalischen Größen Energie, Volumen und Wärme reichen nicht aus, um thermische Zustandsänderungen zu beschreiben. Das sehen wir am Beispiel eines Gases aus zwei Molekülsorten A und B. Vorher befinden sich die beiden Gase getrennt in zwei thermisch isolierten Behältern, und sie haben die gleiche Temperatur und den gleichen Druck. Nun öffnen wir einen Schieber zwischen den beiden Behältern, und die Gase durchmischen sich. Die Energie des Gemischs ist die Summe der beiden Energien, und das Gesamtvolumen ist die Summe der beiden Volumina. Der Zustand des Gases hat sich aber grundlegend geändert, denn selbst wenn der Schieber wieder zurück geschoben wird, stellt sich der Anfangszustand nicht mehr ein.

Was hat sich nun geändert und wie wird dieser irreversible Prozess beschrieben? Wir brauchen dazu eine neue physikalische Größe, die uns sagt, dass dieser Prozess nur in eine Richtung laufen kann. Das ist die *Entropie*, die 1850 von Clausius eingeführt wurde. Und wir benötigen ein zusätzliches Pos-

tulat, den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik:

Im thermischen Gleichgewicht wird der Zustand eines physikalischen Systems durch eine Funktion S(E, V, N) beschrieben, durch die Entropie. S(E, V, N) ist additiv (extensiv), stetig und differenzierbar und wächst mit der Energie E. Beim Aufheben von Zwangsbedingungen wird die Entropie des Gesamtsystems maximiert.

Mit diesem Postulat werden wir die gesamte Thermodynamik herleiten. Das thermische Gleichgewicht wird durch ein Variationsprinzip beschrieben, die Gesamtentropie wird maximiert. In unserem Beispiel hat jede Gassorte eine Entropie, und da die Entropie eine additive Größe ist, hat die gesamte Entropie vorher den Wert $S = S_A + S_B$. Später werden wir berechnen, dass die Gesamtentropie nach dem Durchmischen zugenommen hat. Das bedeutet, der Prozess kann nicht von allein umgekehrt werden. Die gesamte Energie und das Gesamtvolumen haben sich dagegen nicht geändert.

Die obige moderne Formulierung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik enstand historisch aus verschiedenen äquivalenten Aussagen:

Sadi Carnot 1824:

Es gibt keine Wärmekraftmaschine, die bei gegebenen mittleren Temperaturen der Wärmezufuhr und Wärmeabfuhr einen höheren Wirkungsgrad hat als den aus diesen Temperaturen gebildeten Wirkungsgrad $1 - \frac{T_{kalt}}{T_{volus}}$.

Lord Kelvin 1848:

Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die weiter nichts bewirkt als Hebung einer Last und Abkühlung eines Wärmereservoirs.

Rudolf Clausius 1854:

Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niederer auf einen Körper höherer Temperatur ist.

Max Planck 1887:

In einem geschlossenen adiabaten System kann die Entropie nicht abnehmen, sie nimmt in der Regel zu. Nur bei reversiblen Prozessen bleibt sie konstant.

Wir werden diese äquivalenten Aussagen aus dem oben fromulierten Postulat

herleiten.

Statistische Mechanik

Die Entropie wurde als eine physikalische Größe eingeführt, die das System im thermischen Gleichgewicht vollständig beschreibt. Kann die Entropie aus der Mechanik und Elektrodynamik hergeleitet werden? Ludwig Boltzmann hat im Jahr 1870 die Entropie im Rahmen der statistischen Mechanik mikroskopisch definiert.



Abbildung 4.3: Grab von Ludwig Boltzmann auf dem Wiener Zentralfriedhof. Quelle: Wikipedia

Auf seinem Grabstein ist zu lesen

$$S = k_B \ln W \tag{4.3}$$

Dabei ist k_B eine Konstante, und W ist die Anzahl der Vielteilchenzustände mit fester Energie in einem abgeschlossenen Volumen. In unserem Fall der beiden Gase gibt es nach dem Durchmischen sehr viel mehr Zustände als vorher, denn jedes Molekül kann im linken oder rechten Teil des Volumens sitzen, deshalb nimmt die Entropie zu.

Diese Gleichung wird auch *Gibbsches Postulat* genannt. Eine mathematisch präzise Begründung fehlt bis heute, dennoch kann man mit diesem Postulat die thermischen Eigenschaften eines physikalischen Systems berechnen.

Die Gleichung 4.3 hat eine interessante anschauliche Bedeutung. Je mehr Zustände es gibt, desto größer ist die Entropie. Man kann auch sagen: je

ungeordneter ein System ist, desto größer ist seine Entropie. Entropie ist demnach ein Maß für Unordnung. Ein Gas hat mehr Möglichkeiten, seine Moleküle anzuordnen als eine Flüssigkeit, deswegen hat ein Gas eine höhere Entropie als sein flüssiger Zustand. In einem Behälter hat ein Gas weniger Zustände als in einem Zimmer. Wenn wir den Behälter öffnen, so wird Gas in das Zimmer strömen und seine Entropie wird drastisch erhöht.

Wenn das System nicht abgeschlossen ist, sondern Energie mit einem Wärmebad austauschen kann, so lässt sich zeigen

$$S = -k_B \sum_{n} p_n \ln p_n \quad \text{mit} \quad p_n = \frac{\exp(-\frac{E_n}{k_B T})}{Z}, \quad Z = \sum_{n} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$$
(4.4)

T ist die Temperatur, und die Summe läuft dabei über sämtliche Vielteilchenzustände n mit der Energie E_n . Z ist eigentlich nur ein Normierungsfaktor, auch **Zustandssumme** genannt, allerdings sind in ihm die gesamten thermischen Eigenschaften enthalten. Das statistische Gewicht e^{-E_n/k_BT} wird **Boltzmann-Faktor** genannt.

Leider haben wir in dieser Vorlesung keine Zeit zur Verfügung, um dies alles auszuführen.

Informationsentropie

Die Gleichung 4.4 hat eine weitere interessante Bedeutung in einem ganz anderen Gebiet der Wissenschaft: sie beschreibt die Information, die in einem Datensatz enthalten ist. Dabei ist Information nicht mit Inhalt oder Bedeutung zu verwechseln, sondern sie beschreibt, wie stark ein Datensatz komprimiert werden kann. Das Informationsmaß wurde 1948 von Claude Shannon in seiner Doktorarbeit eingeführt, allerdings ohne den Boltzmann-Faktor und mit dem Logarithmus zur Basis zwei,

$$I = -\sum_{n} p_n \log_2 p_n \tag{4.5}$$

Die Information I misst die Anzahl der Bits, die notwendig sind, um eine Datei zu speichern. Im einfachsten Fall läuft die Summe über alle Buchstaben n in einem Text und p_n ist die Wahrscheinlichkeit, den Buchstaben n im Text zu finden. Der Index kann aber auch Wörter oder Satzteile nummerieren,

mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. So findet man, dass ein Text mit 27 Buchstaben mit deutlich weniger Bits als $\log_2 27$ pro Buchstabe codiert werden kann. Moderne Komprimierungsalgorithmen erreichen heutzutage die theoretische Grenze, die Shannon damals erarbeitet hatte.

Mit der obigen Formel kann man auch berechnen, wie stark eine Datei erweitert werden muss, um fehlerfrei über einen verrauschten Kanal gesendet zu werden. Sie werden fragen, ob eine Datei durch einen stark verrauschten Kanal überhaupt fehlerfrei gesendet werden kann, aber nach Shannon ist das möglich.

Neulich wurde auch gezeigt, wie man mit der obigen Formel Klaviere stimmen kann. 3

Die Information I bzw. die Entropie S kann auch als ein Maß für die Unwissenheit über ein System aufgefasst werden. Wenn das System nur einen Zustand k hat, $p_k = 1, p_{n \neq k} = 0$, so gilt offenbar I = S = 0. Die Größe I sagt nun, wie viele Fragen ich stellen muss, um den Zustand des Systems herauszubekommen. I quantifiziert demnach unsere Unwissenheit. Der Zusammenhang zwischen Information und physikalischer Entropie wird in dem Artikel von Haye Hinrichsen verständlich erklärt.

4.1.3 Temperatur, Druck und chemisches Potenzial

Die Entropie S(E, V, N) enthält die gesamte Information über das thermische Gleichgewicht eines Systems. Sie nimmt monoton mit der Energie E zu, deshalb kann man diese Funktion invertieren,

E(S, V, N) enthält die gesamte thermodynamische Information über ein Vielteilchensystem im thermischen Gleichgewicht.

Betrachten wir nun kleine Änderungen dieser Funktion, also deren Differenzial

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} dN \qquad (4.6)$$

Die Größen E, S, V, N sind extensive Größen, sie wachsen proportional zur Systemgröße. Die partiellen Ableitungen dagegen sind intensive Größen, sie ändern sich nicht mit einem wachsendem System. Wir geben den drei partiellen Ableitungen einen Namen:

³siehe: Aufsätze von Haye Hinrichsen auf der Webseite

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} \end{pmatrix}_{V,N} = T \quad \text{Temperatur}$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial V} \end{pmatrix}_{S,N} = p \quad \text{Druck}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial N} \end{pmatrix}_{S,V} = \mu \quad \text{chemisches Potenzial}$$

Beachte, dass alle drei partiellen Ableitungen Funktionen von S, V, N sind.

Damit erhalten wir die wichtigste Gleichung der Thermodynamik:

$$dE = TdS - p\,dV + \mu\,dN \tag{4.8}$$

Sie werden sich nun sicherlich wundern, was diese abstrakte Definition der partiellen Ableitungen mit den Begriffen Temperatur und Druck zu tun haben, die Sie aus dem Alltagsleben kennen. Wir werden aber zeigen, dass diese theoretischen Definitionen mit den physikalischen Größen übereinstimmen, die aus dem idealen Gasgesetz $pV = Nk_BT$ folgen, und somit mit den üblichen Größen übereinstimmen.

Betrachten wir nun einen Prozess, der dicht am thermischen Gleichgewicht abläuft und bei dem die Teilchenzahl erhalten bleibt, dN = 0:

$$dE = TdS - pdV = \delta Q + \delta W \quad \Rightarrow \quad \delta Q = TdS \tag{4.9}$$

Hier erkennen wir nun eine wichtige Bedeutung der Entropie: sie beschreibt den Zu- oder Abfluss von Wärme. Prozesse, die dicht am thermischen Gleichgewicht stattfinden, nennt man auch **quasistatisch**. Solche Prozesse werden durch die Funktion E(S, V, N) beschrieben. Die Änderung der inneren Energie E setzt sich zusammen aus Wärme $\delta Q = TdS$ plus geleisteter Arbeit $\delta W = -pdV$.

Wenn dagegen die Teilchenzahl N nicht konstant bleibt, so wird die chemische Arbeit μdN geleistet. Das spielt insbesondere eine Rolle bei chemischen Reaktionen, bei denen viele Teilchensorten N_j vorhanden sind, die miteinander reagieren und dabei die chemische Arbeit $\mu_j dN_j$ leisten.

4.2 Thermisches Gleichgewicht

In dieser Vorlesung wollen wir physikalische Aussagen aus dem obigen Postulat herleiten, das die Entropie eingeführt hat. Zunächst wiederholen wir die beiden wichtigen Aussagen, die Hauptsätze der Thermodynamik.

4.2.1 Hauptsätze

Der erste Hauptsatz stellt die Energieerhaltung fest. Die Änderung der inneren Energie ist die Summe der zugeführten Wärme und der geleisteten Arbeit, wobei im quasistatischen Prozess die Wärme durch die Entropieänderung bestimmt wird.

$$dE = \delta Q + \delta W \underbrace{=}_{quasistatisch} TdS - pdV$$
(4.10)

Energieerhaltung wundert uns nicht mehr nach den Vorlesungen zur Mechanik, Quantenmechanik und Elektrodynamik. Den zweiten Hauptsatz dagegen können wir nicht aus den vorigen Vorlesungen herleiten. Er besagt, dass die gesamte Entropie eines abgeschlossenen Systems nicht abnehmen kann. Die Unordnung oder die Unwissenheit nehmen ständig zu.

$$\Delta S_{gesamt} \ge 0 \tag{4.11}$$

Beide Hauptsätze gelten nicht nur für Prozesse, die dicht am thermischen Gleichgewicht ablaufen, sondern bei allen Prozessen, die von einem Zustand im thermischen Gleichgewicht zu einem anderen führen, der schließlich ebenfalls ins thermische Gleichgewicht geht. Nur im thermischen Gleichgewicht können wir die Entropie sinnvoll definieren.⁴

18. Doppelstunde

4.2.2 Wärmefluss

Wie wird mithilfe der Hauptsätze der Wärmefluss beschrieben? Betrachten wir dazu einen thermischen Prozess, der von einem Zustand im thermischen Gleichgewicht zu einem anderen führt, indem Zwangsbedingungen aufgehoben werden. Im einfachsten Fall bringen wir zwei thermisch isolierte Körper durch einen Wärmekontakt zusammen. Zwischen den beiden Körpern kann also Energie ausgetauscht werden, wobei die beiden Volumina und die beiden Teilchenzahlen konstant bleiben sollen.

⁴Allerdings gibt es aktuelle Forschungen zur Entropie-Definition fern vom Gleichgewicht.



Abbildung 4.4: Zwei Körper mit verschiedenen Temperaturen relaxieren ins thermische Gleichgewicht durch Austausch von Wärme.

Vorher haben die beiden Körper unterschiedliche Temperaturen T_1^v, T_2^v , innere Energien E_1^v, E_2^v und Entropien S_1^v, S_2^v . Der erste Hauptsatz sagt uns nun, dass die Gesamtenergie erhalten bleibt. Da keine Wärme von/nach Außen fließen kann und keine Arbeit geleistet wird, gilt demnach

$$E = E_1^v + E_2^v = E_1^n + E_2^n = E_1 + E_2$$
(4.12)

Die Entropie ist eine additive Größe, deshalb ist die Gesamtentropie

$$S_g = S_1(E_1) + S_2(E - E_1) = S_g(E_1)$$
(4.13)

Nach dem zweiten Hauptsatz 4.11 nimmt die Gesamtentropie zu. Folglich sucht sich das System eine Energie E_1 , die die Entropie $S_g(E_1)$ maximiert.Daraus folgt

$$\frac{\partial S_g}{\partial E_1} = 0 = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \tag{4.14}$$

Mit der Definition 4.7 erhalten wir

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1^n = T_2^n} \tag{4.15}$$

Wenn also ein Energieaustausch zwischen den beiden Teilen möglich ist, so gleichen sich deren Temperaturen an. Im thermischen Gleichgewicht ist die Temperatur konstant, beim Übergang hat sich die Entropie erhöht

$$S_g^n > S_g^v \tag{4.16}$$

In welche Richtung ist die Energie geflossen? Die Antwort gibt uns die Gleichung 4.13. Wenn der Prozess dicht am Gleichgewicht bleibt, so finden wir

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dE_1$$
 (4.17)

Nach dem zweiten Hauptsatz wird die Entropie ständig erhöht, dS > 0. Wenn also T_1 größer als T_2 ist, so nimmt die Energie im ersten Behälter ab, $dE_1 < 0$. Die Wärme fließt demnach vom warmen zum kalten Körper. Das haben wir natürlich erwartet, aber es bestätigt auch die Tatsache, dass der Parameter T wirklich die Temperatur beschreibt.

4.2.3 Dimensionen von Entropie und Temperatur

Wir haben schon hergeleitet: T dS ist eine Energie, beispielsweise die übertragene Wärme bei quasistatischen Prozessen. Es wäre nun sinnvoll, der Temperatur T die Dimension Energie (J, eV) zu geben und die Entropie S dimensionslos zu halten. In manchen Lehrbüchern finden Sie auch diese Konvention. Allerdings ist es historisch anders gelaufen. Die Temperatur T hat eine eigene Einheit erhalten, das *Kelvin*, und somit benötigen wir eine zusätzliche Konstante k_B , um aus T dS wieder eine Energie zu machen.

> dim T = Kelvin K = °Celsius + 273.15 dim S = dim E / dim T = dim k_B = J/K Boltzmann-Konstante $k_B \simeq 1.4 \cdot 10^{-23}$ J/K

Damit ist $k_B T$ eine Energie, die thermische Energie. Bei Raumtemperatur $T \simeq 300$ K erhalten wir $k_B T \simeq \frac{1}{40}$ eV. Sie werden später sehen, dass die kinetische Energie einer klassischen Punktmasse im Mittel den Wert $\frac{3}{2}k_B T$ hat, auch mit Wechselwirkungen zu anderen Teilchen. Die Temperatur in Kelvin ist also ein Maß für das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit der Teilchen. Wenn die Teilchen ruhen, oder wenn alle Quantenteilchen im energetisch tiefsten Zustand sitzen, so erhalten wir den Temperatur-Nullpunkt T = 0.

Negative Temperaturen

Es gibt demnach keine tieferen Temperaturen als T = 0. Dennoch kann es **negative** Temperaturen geben! Das liegt daran, dass wir in Gl. 4.7 nicht die Temperatur sondern deren Inverse $\frac{1}{T}$ als partielle Ableitung der Entropie nach der Energie definiert haben. Wenn die Entropie mit wachsender Energie abnimmt, so ist die Temperatur negativ. Tatsächlich kann man solche Systeme im Experiment erzeugen, beispielsweise indem man Spins im Magnetfeld

ausrichtet und dann das Magnetfeld umdreht. Für kurze Zeit relaxiert das magnetische System ins thermische Gleichgewicht und wird durch eine negative Temperatur beschrieben.⁵

4.2.4 Aufheben von Zwangsbedingungen

Wenn zwei Systeme ihre Energie austauschen können, so relaxieren sie ins thermische Gleichgewicht und gleichen ihre Temperaturen einander an. Es gibt aber noch mehr Möglichkeiten, Zwangsbedingungen aufzuheben. Wenn zwei Systeme ihre Volumina austauschen können, beispielsweise durch einen beweglichen Stempel, so relaxieren sie in einen Zustand mit identischen Drücken. Wenn mehrere Teilchensorten ineinander umgewandelt werden können, so passen sich deren chemischen Potenziale an.

Energieaustausch	\Rightarrow	$T_1 = T_2$
Volumenaustausch	\Rightarrow	$p_1 = p_2$
Teilchenaustausch	\Rightarrow	$\mu_1 = \mu_2$

Phasenumwandlungen

Wasser und Eis kann man als zwei Teilchensorten auffassen, die sich bei 0° C ineinander umwandeln. Somit erhalten wir die Koexistenzkurve p(T)von Wasser und Eis durch

$$\mu_{Wasser}(T,p) = \mu_{Eis}(T,p) \tag{4.18}$$

Chemische Reaktionen

Betrachten wir die chemische Reaktion

$$2\underbrace{H_2}_{N_1} + \underbrace{O_2}_{N_2} \rightleftharpoons 2\underbrace{H_2O}_{N_3} \tag{4.19}$$

Die Entropie ist offensichtlich eine Funktion der drei Teilchenzahlen von Wasserstoff, Sauerstoff und Wasser, $S(E, V, N_1, N_2, N_3)$. Diese drei Werte sind aber nicht unabhängig voneinander, denn es gilt offenbar $dN_1 = 2dN_2$, $dN_3 = -2dN_2$. Im Gleichgewicht ist die Entropie maximal

$$0 = dS = -\frac{\mu_1}{T}dN_1 - \frac{\mu_2}{T}dN_2 - \frac{\mu_3}{T}dN_3 = -\frac{dN_2}{T}[2\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3] \quad (4.20)$$

⁵Allerdings wurde diese Interpretation kürzlich in Frage gestellt: J. Dunkel und S. Hilbert, Nature Physics 10, 67-72 (2013)

Im allgemeinen Fall gilt demnach

$$\sum_{j} \mu_j \nu_j = 0 \tag{4.21}$$

Dabei sind ν_j die stöchiometrischen Koeffizienten, hier +2, +1, -2.

4.3 Fundamentalgleichung S(E, V, N)

Die Entropie als Funktion der extensiven Größen S(E, V, N) beschreibt das thermische System. Woher bekommen wir diese Funktion? Die Entropie kann mithilfe der statistischen Mechanik berechnet werden. Die klassische, die Quantenmechanik und die Elektrodynamik geben uns die mikroskopischen Zustände, und das Gibbssche Postulat liefert uns die Entropie. Da diese Vorlesung keine statistische Mechanik enthält, können wir hier nur die Entropie aus einigen Grundgleichungen berechnen.

4.3.1 Ideales Gas

Für ein Gas aus N wechselwirkungsfreien punktförmigen Teilchen findet man sowohl im Experiment als auch mithilfe der statistischen Mechanik die Gesetze

$$pV = Nk_BT, \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT \tag{4.22}$$

Oder in der Form der physikalischen Chemie

$$pV = nRT, \quad E = \frac{3}{2}nRT$$

$$R = N_A k_B \simeq 8.3 \frac{J}{molK}$$

$$n = \text{Anzahl der Mole mol}$$

$$N_A \simeq 6 \cdot 10^{23} \text{ Avogadrozahl, Zahl der Teilchen in 12 g}^{12}\text{C}$$

Für ein Gas aus Molekülen gelten näherungsweise dieselben Gleichungen, wobei der Faktor 3/2 durch 5/2, 7/2, ... ersetzt wird, je nach Anzahl der inneren Anregungen. Das Differenzial der Entropie wird damit

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV = \frac{3}{2}Nk_B\frac{dE}{E} + Nk_B\frac{dV}{V}$$
(4.23)

Das Integral von dS über die Energie und das Volumen gibt die Entropie

$$S = Nk_B \left[\frac{3}{2} \ln \frac{E}{E_0} + \ln \frac{V}{V_0} + s_0 \right]$$
(4.24)

Das ist die Fundamentalgleichung S(E, V, N) des idealen Gases. Mit der Entropie s = S/N und dem v = V/N Volumen pro Molekül können wir Sie auch schreiben als

$$s = k_B \left[\frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{v}{v_0} + s_0 \right]$$
19. Doppel-
stunde

p(V)-Kurven

Wie ändert sich der Druck, wenn wir ein thermisch isoliertes Gas komprimieren? Das sagt uns die vorige Gleichung, denn thermische Isolation bedeutet, dass die Entropie konstant bleibt. Wir suchen demnach die **Adiabate** p(V)aus konstanter Entropie S(p(V), V).

Mit den Gasgesetzen 4.22 können wir die Temperatur durch Druck und Volumen ersetzen und erhalten

$$S = k_B N \left[\frac{3}{2} \ln \frac{pV}{Nk_B} + \ln V + konst. \right] = k_B N \left[\ln \left((pV)^{\frac{3}{2}} V \right) + konst. \right]$$

$$(4.25)$$

Bei konstanter Entropie bleibt der Ausdruck im Logarithmus ebenfalls konstant, somit erhalten wir die Adiabate

$$p = \frac{konst}{V^{\frac{5}{3}}} \tag{4.26}$$

Die Isotherme dagegen erhalten wir einfach aus dem Gasgesetz 4.22

$$p = \frac{konst}{V} \tag{4.27}$$

Die Adiabate fällt somit schneller ab als die Isotherme. Entlang der Adiabaten wird also die Temperatur bei zunehmendem Volumen gesenkt.

Heizen eines Zimmers

Wenn wir ein Zimmer heizen, erhöhen wir die Temperatur der Raumluft. Anscheinend führen wir dem Zimmer Energie zu. Doch Letzteres stimmt nicht! Aus den Gesetzen des idealen Gases folgt



Abbildung 4.5: Die Adiabate eines idealen Gases fällt schneller ab als seine Isotherme.

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{2}p\tag{4.28}$$

Das Volumen des Zimmers bleibt konstant, aber auch der Druck, der durch den Außendruck bestimmt wird. Somit bleibt die Energie der Raumluft beim Heizen ebenfalls konstant. Zwar erhöht sich die kinetische Energie eines Gasmoleküls mit steigender Temperatur, $E/N = \frac{3}{2}k_BT$, aber die Anzahl N der Moleküle nimmt ab, sie werden aus dem Zimmer gedrängt.

4.3.2 Mischungsentropie

Beim Mischen von Gasen mit unterschiedlichen Molekülsorten muss sich die Gesamtentropie erhöhen, das hatten wir schon bei der Definition der Entropie gesehen. Nun wollen wir das für ideale Gase mit der Formel für die Entropie berechnen, $S = Nk_B[\ln(T/T_0) + \ln(V/(Nv_0)) + s_0]$. Dabei haben wir das Volumen V_0 des Gases durch das mittlere Volumen v_0 eines Moleküls ausgedrückt.

Wenn wir nun mehrere Teilchensorten N_j, V_j mit gleicher Temperatur T haben, so ist vor dem Mischen die Gesamtentropie die Summe der einzelnen Entropien

$$S = k_B \left(\sum_j N_j \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \sum_j N_j \ln \frac{V_j}{N_j v_0} + \sum_j N_j s_0 \right)$$
(4.29)

Nach dem Mischen nehmen alle Teilchensorten dasselbe Volumen $V = \sum_j V_j$

ein, und es gilt

$$\sum_{j} N_{j} \ln \frac{V}{N_{j}v_{0}} = \sum_{j} N_{j} \ln \frac{V}{v_{0}} - \sum_{j} N_{j} \ln N_{j} - \sum_{j} N_{j} \ln N + \sum_{j} N_{j} \ln N$$
$$= \sum_{j} N_{j} \ln \frac{V}{Nv_{0}} - \sum_{j} N_{j} \ln \frac{N_{j}}{N}$$
$$\Rightarrow \quad S = k_{B} \left(N \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_{0}} + N \ln \frac{V}{Nv_{0}} - \sum_{j} N_{j} \ln \frac{N_{j}}{N} + konst. \right)$$

Der erste Term enthält die Temperatur T und der zweite die Dichte $\frac{N}{V}$ des gesamten Gases, genau wie bei einer einzelnen Teilchensorte. Der dritte Term dagegen kommt durch das Mischen hinzu, es ist die *Mischungsentropie*. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit $p_j = \frac{N_j}{N}$ definieren, das Molekül der Sorte j im Gas zu finden, so hat die Mischungsentropie die Form

$$S_m = -k_B N \sum_j p_j \ln p_j > 0$$
 (4.30)

Durch das Durchmischen der Gase erhöht sich die Gesamtentropie um den Betrag der Mischungsentropie. Das Unwissen über die Lage der Molekülsorten in den einzelnen Behältern hat sich erhöht. Wenn wir nur zwei Molekülsorten mit gleicher Teilchenzahl und gleicher Dichte haben, so hat die Mischungsentropie den Wert

$$S_m = -k_B N \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = k_B N \ln 2$$
(4.31)

In diesem Fall gibt es offensichtlich 2^N Möglichkeiten, die Teilchen auf die beiden Behälter zu verteilen. Und die Entropie ist der Logarithmus dieser Anzahl der Möglichkeiten, bis auf den Boltzmann-Faktor.

Die Anzahl der Möglichkeiten wird in der Informationstheorie in Bits gemessen. Die Informationsentropie ist damit

$$I = -N \sum_{j} p_{j} \log_{2} p_{j} = \frac{S_{m}}{k_{B} \ln 2}$$
(4.32)

Die Information I sagt uns nun, wie viele Fragen ich stellen muss, um festzustellen in welchem Behälter sich ein Molekül befindet. Im einfachen Beispiel mit zwei gleichen Behältern erhalten wir I = N. Wir müssen demnach N Ja-Nein-Fragen stellen, um herauszubekommen, in welchem Behälter sich die einzelnen Moleküle befinden.

4.3.3 Elektromagnetische Strahlung

Elektromagnetische Wellen können sich ebenfalls im thermischen Gleichgewicht befinden. Betrachte einen Behälter, dessen Wände bei einer Temperatur T elektromagnetische Energie aufnehmen und wieder abgeben kann. Im quantenmechanischen Bild stellen wir uns ein Gas von Photonen vor, die vom Behälter absorbiert und mit einer anderen Energie wieder emittiert werden. Wenn kein zusätzlicher Energiefluss besteht, so befindet sich das Photonengas im thermischen Gleichgewicht. Ein Beispiel ist das Universum, in dem sich vor etwa 14 Milliarden Jahren, bis zu 380000 Jahren nach dem Urknall, ein Photonengas im Gleichgewicht mit Elektronen und Protonen gebildet hat. Danach haben sich Atome gebildet und das Gleichgewicht der Photonen ist seitdem eingefroren. Durch die Expansion des Universums hat derzeit diese Hintergrundstrahlung die Temperatur $T \simeq 2.73K$. In guter Näherung befindet sich das Licht, das von der Sonne abgestrahlt wird, ebenfalls im thermischen Gleichgewicht mit einer Temperatur von $T \simeq 5800K$.



Abbildung 4.6: Elektromagnetische Wellen, ein Photonengas, im thermischen Gleichgewicht mit einem Behälter.

Elektromagnetische Wellen, die im thermischen Gleichgewicht abgestrahlt werden, nennt man *Schwarzkörperstrahlung*. Für das Photonengas kann man mithilfe der statistischen Mechanik berechnen

$$E = bVT^4, \quad pV = \frac{1}{3}E, \quad b \simeq 8 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$$
 (4.33)

Die Größe b wird Stefan-Boltzmann-Konstante genannt. Beachte, dass die Anzahl N der Teilchen gar nicht vorkommt, denn für Photonen ist sie nicht konstant.

Mit diesen Gleichungen können wir die Entropie S(E, V) berechnen. Dazu

brauchen wir das Differential der Energie in der Form $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV$. Die Koeffizienten finden wir aus den vorigen Relationen:

$$dS = b^{\frac{1}{4}} \left(\frac{V}{E}\right)^{\frac{1}{4}} dE + \frac{1}{3} b^{\frac{1}{4}} \left(\frac{E}{V}\right)^{\frac{3}{4}} dV$$
(4.34)

Die Integration dieses Differentials gibt mit S(0, V) = 0 die Fundamentalgleichung des elektromagnetischen Feldes

$$S(E,V) = \frac{4}{3}b^{\frac{1}{4}} E^{\frac{3}{4}} V^{\frac{1}{4}}$$
(4.35)

Diese Gleichung gibt uns die gesamte thermodynamische Information über den Schwarzkörperstrahler, natürlich auch die beiden Zustandsgleichungen 4.33.

4.3.4 Gummi

Gummi besteht aus Bündeln von langen Molekülketten, so genannten Polymeren, die untereinander vernetzt sind. Auch Molekülketten können thermodynamisch durch Energie, Entropie, Arbeit und Temperatur beschrieben werden. Die innere Energie der Gummimoleküle besteht im wesentlichen aus kinetischer Energie, die proportional zur Temperatur wächst. Wird ein langes Molekül auseinandergezogen, so wird die Arbeit dW = fdL geleistet, wobei L seine mittlere Länge und f die Spannung ist.





Interessanterweise wird die Spannung hauptsächlich durch die Entropie und nicht durch die Wechselwirkungsenergie zwischen den Moleküleinheiten, den Monomeren erzeugt. Hier haben wir ein Beispiel einer *entropischen Kraft*.

Wenn das Molekül ganz lang gestreckt wird so gibt es nur eine einzige Konfiguration der Kette, nämlich die gerade Linie zwischen den beiden Aufhängungen. Wenn es dagegen nur eine kurze mittlere Ausdehnung L hat, so gibt es viele Möglichkeiten, die Kette anzuordnen. Die Entropie nimmt also mit wachsender Ausdehnung ab.

$$dS = \frac{1}{T}dE - \frac{f}{T}dL, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_E = -\frac{f}{T} < 0 \tag{4.36}$$

Gummi zieht sich also zusammen, f > 0, weil die Anzahl der Konfigurationen mit der Ausdehnung der Ketten abnimmt. Wird Gummi erwärmt, so nimmt seine Entropie zu. Das wiederum bedeutet, dass Gummi den Zustand mit höherer Entropie sucht und sich deshalb zusammenzieht. Das ist beim Gas anders, denn mit größerem Volumen gibt es mehr Konfigurationen der Moleküle, und somit übt das Gas einen Druck aus, es will expandieren. Mit wachsender Temperatur dehnt sich deshalb das Gas bei konstantem Druck aus.



Abb. 2 In einem Entropierad führt das Erhitzen der gespannten Gummispeichen unten zu deren Kontraktion und somit zu einer exzentrischen Verschiebung der Fahrradfelge nach oben. Dies hat eine kontinuierliche Rotation des Rades zur Folge.

Abbildung 4.8: Entropierad, Quelle: M. Wilhelm, I. Naue, Physik in unserer Zeit 1/2013 (44), S. 39

Die entropischen Kräfte können Arbeit verrichten. Das wurde an einem Rad demonstriert, das mit Gummispeichen aufgehängt wurde und einseitig mit einer Lampe erhitzt wurde. Dieses Rad konnte immerhin ein 5 kg schweres Gewicht anheben, ein gelungenes Beispiel für einen Entropiemotor.

20. Doppelstunde

4.4 Thermodynamische Prozesse

Was passiert, wenn wir ein Gas erhitzen oder komprimieren? Die Thermodynamik gibt uns Antworten auf diese Fragen. Ein thermischer Prozess besteht aus Änderungen des thermischen Zustandes. Wir werden nur Prozesse betrachten, die von einem Zustand im thermischen Gleichgewicht ausgehen und zu einem anderen Zustand führen, der dann ebenfalls ins thermische Gleichgewicht relaxiert. In vielen Fällen werden wir sogar den Grenzfall betrachten, bei dem sämtliche Zwischenzustände des Übergangs durch thermisches Gleichgewicht beschrieben werden.

Hier sehen wir auch, warum die Thermodynamik von manchen Wissenschaftlern als eine unklare schwammige Theorie angesehen wird. Obwohl wir eigentlich nur eine Theorie für das thermische Gleichgewicht haben, also eine Theorie bei der sämtliche Größen zeitlich konstant sind, laufen alle thermischen Prozesse durch zeitliche Änderungen ab. Dennoch verwenden wir die Gleichgewichtstheorie, um thermodynamische Prozesse zu beschreiben.

Immerhin werden Sie sehen, dass wir mit der Thermodynamik den Wirkungsgrad von ganz unterschiedlichen Kraftwerken bis auf wenige Prozent genau berechnen können. Die Thermodynamik liefert die Grundlagen für wichtige technische Anwendungen, beispielsweise beim Kraftwerk, Verbrennungsmotor, Kühlschrank und bei der Wärmepumpe.

Sämtliche thermodynamischen Prozesse werden durch zwei Prinzipien begrenzt:

- Energieerhaltung (erster Hauptsatz)
- Entropieerhöhung (zweiter Hauptsatz)

Diese beiden Aussagen genügend schon, um eine obere Schranke für den Wirkungsgrad von Maschinen zu berechnen. Im Folgenden wollen wir das an einigen Beispielen demonstrieren.

4.4.1 Wärmekontakt

Betrachten wir zunächst zwei thermisch isolierte Körper mit unterschiedlichen Temperaturen. Beide sollen eine konstante Wärmekapazität C haben, und die Volumina und Teilchenzahlen bleiben konstant. Zunächst berechnen

wir die Entropie

$$dE = TdS \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dT} = T\frac{dS}{dT} = C \quad \Rightarrow \quad E = CT, \ S = C\ln T \quad (4.37)$$

Dabei haben wir Konstanten weggelassen, denn wir interessieren uns nur für Energie- und Entropie-Differenzen. Nun wollen wir die Energie $E_2 + E_1 = C(T_2 + T_1) > 0$ nutzen, um eine Maschine anzutreiben, die mechanische oder elektrische Arbeit W erzeugt. Wie man das macht überlassen wir den Ingenieuren.



Abbildung 4.9: Die Energie der beiden Körper soll eine Maschine antreiben.

Wir hatten schon gezeigt: das System relaxiert schließlich ins thermische Gleichgewicht, in dem sich die Temperaturen angeglichen haben, $T_2^n = T_1^n = T_f$. Die Gesamtenergie ist dann $E_f = 2CT_f$. Da das System nach außen hin thermisch isoliert sein soll, fließt keine Wärme in das Gesamtsystem und die Energiedifferenz, vorher minus nachher, wird in Arbeit umgewandelt:

$$W = E_2 + E_1 - E_f = C(T_2 + T_1 - 2T_f)$$
(4.38)

Das sagt uns der erste Hauptsatz, und er verbietet dabei nicht, dass die Endtemperatur den Nullpunkt erreicht und die gesamte Energie in Arbeit umgewandelt wird. Aber das wiederum verbietet der zweite Hauptsatz, denn bei jedem Prozess darf die Gesamtentropie nicht abnehmen,

$$\Delta S = S_f - S_1 - S_2 = C(2\ln T_f - \ln T_1 - \ln T_2) = C\ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} \ge 0 \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow \quad T_1 T_2 \le T_f^2$$

Die Gleichung 4.38 liefert die maximal mögliche Arbeit W bei minimaler Endtemperatur T_f . Wir erhalten somit

$$T_f = \sqrt{T_1 T_2} \tag{4.40}$$

In diesem Fall ist die Endtemperatur das **geometrische Mittel** der beiden Anfangstemperaturen. Nach Gleichung 4.39 erhöht sich dabei die Gesamtentropie nicht, und die maximal mögliche Arbeit ist gegeben durch

$$W = C(T_2 + T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2}) \tag{4.41}$$

Weil die gesamte Entropie sich nicht erhöht, $\Delta S = 0$, kann der Prozess im Prinzip auch umgekehrt laufen; es ist ein reversibler Prozess, der immer dicht am thermischen Gleichgewicht bleibt, dS = 0. Beim umgekehrten Prozess wird Arbeit geleistet, um Energie thermisch zu speichern.

Wenn die Ingenieure allerdings schlecht gearbeitet haben, oder wenn wir nur eine Wärmebrücke anstelle einer Maschine haben, so wird im schlechtesten Fall gar keine Arbeit erzeugt, W = 0 und wir erhalten

$$T_f = \frac{T_2 + T_1}{2} > \sqrt{T_2 T_1} \tag{4.42}$$

In diesem Fall ist die Endtemperatur das **arithmetische Mittel** der beiden Anfangstemperaturen. Die Gesamtentropie nimmt dabei zu, wir erhalten

$$\Delta S = C \ln \frac{(T_2 + T_1)^2}{4T_1 T_2} > 0 \tag{4.43}$$

Dieser Prozess lässt sich deshalb nicht umkehren, er ist irreversibel, und die Entropie wird "verschwendet". Zusammenfassend zeigt dieses Beispiel

- Reversible Prozesse erzeugen maximale Arbeit, die Gesamtentropie bleibt dabei konstant.
- Wird nur wenig Arbeit erzeugt, so nimmt die Gesamtentropie zu und der Prozess ist irreversibel.
- Die Entropie wird maximal erhöht, wenn keine Arbeit erzeugt wird.

4.4.2 Isotherme Expansion

Ein weiteres lehrreiches Beispiel für thermodynamische Prozesse ist die isotherme Expansion eines Gases. Dazu betrachten wir einen Behälter mit zwei Teilvolumina V. Im linken Teilbehälter befinde sich ein ideales Gas, und der rechte Teil sei leer (Vakuum). Der Behälter stehe in thermischen Kontakt mit seiner Umgebung, sodass das Gas immer die Temperatur T hat. Nun betrachten wir zwei Prozesse, bei denen am Ende das Gas im gesamten Volumen der Größe 2V mit der Temperatur T verteilt ist.

Mit den Gesetzen des idealen Gases, $E = \frac{3}{2}Nk_BT = konstant$, $S = Nk_B \ln V + konstant$, schließen wir, dass bei diesem Prozess die innere Energie des Gases konstant bleibt und dass die Entropie sich erhöht

$$\Delta E = 0, \quad \Delta S = Nk_B \ln 2 \tag{4.44}$$



Abbildung 4.10: Anfangs- und Endzustand eines Gases.

Da E und S Zustandsgrößen sind, hängen deren Änderungen nicht vom gewählten Prozess ab. Wir untersuchen nun zwei Prozesse mit jeweils irreversibler und reversibler Expansion des Gases.

Irreversible Expansion

Wir öffnen ein Loch in der Zwischenwand und lassen das Gas in den rechten Behälter strömen. Dabei wird keine Arbeit geleistet, W = 0, und wegen des Energiesatzes $\Delta E = Q + W = 0$ folgt Q = 0. Es fließt keine Wärme durch die Wände des Behälters. Aber es wird die Entropie des Gases erhöht, ohne dabei Arbeit zu leisten, die Entropie wird "verschwendet".



Abbildung 4.11: Links: Irreversible Expansion. Rechts: Wärme wird vom Gas reversibel aufgenommen und treibt eine Maschine an.

Reversible Expansion

Wir können jedoch auch als Zwischenwand einen beweglichen Stempel anbringen, der einen Generator antreibt oder ein Gewicht hebt. Dann wird bei der Expansion Arbeit geleistet. Mit $pV = Nk_BT$ erhalten wir

$$W = -\int_{V}^{2V} p \, dV = -Nk_B T \int_{V}^{2V} \frac{dV}{V} = -Nk_B T \ln 2 \tag{4.45}$$

und mit dem Energiesatz

$$-W = Q = T\Delta S = k_B T N \ln 2 \tag{4.46}$$

In diesem Fall nimmt das Gas Wärme aus der Umgebung auf und wandelt sie in Arbeit um. Diese Wärme verringert die Entropie der Umgebung und erhöht die Entropie des Gases, dabei bleibt die Gesamtentropie konstant.

Deshalb kann dieser Prozess im Prinzip auch quasistatisch umgekehrt werden, indem das Gas durch eine äußere Kraft wieder komprimiert wird. Dann nimmt die Entropie des Gases wieder ab, Wärme wird an die Umgebung abgegeben, die Entropie der Umgebung nimmt zu und die Gesamtentropie bleibt konstant.

Beachte dass bei beiden Prozessen die Entropie erhöht wird. Beim reversiblen Prozess ist die Entropieerhöhung verbunden mit der zugeführten Wärme, $T\Delta S = Q$, beim irreversiblen dagegen gilt $T\Delta S > Q = 0$.

4.4.3 Energie der Informationsverarbeitung

Das vorige Beispiel der irreversiblen Kompression eines Gases führt zu einer interessanten Anwendung bei der Informationsverarbeitung. Dabei geht es um die Frage: Wieviel Energie wird benötigt um Information zu speichern? Bei heutigen Computern spielt diese Frage eine wichtige Rolle, denn erstens sollte der Energieverbrauch möglichst gering sein, und zweitens ist es ein Problem, die Wärme aus den Computern abzuleiten.

Dazu wurde folgendes Gedanken experiment gemacht: Nehmen wir an, wir wollen N Bits speichern und verwenden dazu winzige Behälter, in den en sich nur ein einziges Molekül befindet. Das Molekül kann sich im linken oder im rechten Teil des Behälters aufhalten, das soll den beiden Zuständen 0 oder 1 eines Bits entsprechen. Wenn wir nun ein Bit speichern wollen, so müssen wir Arbeit aufwenden, um das Molekül entweder nach rechts oder nach links zu schieben. Wir hatten vorher festgestellt, dass wir dafür mindestens die Arbeit $W = k_B T \ln 2$ benötigen, und dass diese Arbeit an die Umgebung als Wärme abgegeben wird.



Abbildung 4.12: Ein Bit wird mit einem Molekül gespeichert.

Dieses einfache Gedankenexperiment wurde verallgemeinert, mit dem Ergebnis:

Um ein einzelnes Bit zu verarbeiten, ist mindestens die Energie $W = k_B T \ln 2$ nötig, dabei wird das Bauelement um diesen Betrag erhitzt.

Erreichen denn heutige Computer diese physikalische Grenze? Erstaunlicherweise sind wir noch weit entfernt von dem was physikalisch möglich ist. Bei Zimmertemperatur 300K erhalten wir $W \simeq 10^{-20} J$ pro Bit. Wenn wir demnach 1 Watt Leistung spendieren, so können wir im Prinzip bis zu 10^{20} Bits pro Sekunde bearbeiten.

Computer

Nehmen wir an, dass ein Prozessor eines Computers 10 Watt Leistung verbraucht, somit könnte er theoretisch 10^{21} Bits pro Sekunde bearbeiten. Allerdings ist der Prozessor mit Gigahertz getaktet und verarbeitet in einem Takt etwa 100 Bits, sodass 10^{11} Bits pro Sekunde bearbeitet werden, statt 10^{21} physikalisch möglichen. Heutige Computer sind also noch einen Faktor 10^{10} weit weg von dem physikalischen Grenzwert der Leistungsaufnahme!

Gehirn

Arbeitet unser Gehirn effektiver als ein Computer? Schließlich ist es ja der Biologie über Millionen von Jahren gelungen, das Leben zu optimieren. Ein Gehirn arbeitet die Neuronen, die Elemente der Informationsverarbeitung, nicht sequenziell sondern parallel ab, was bei der riesigen Anzahl der Neuronen im Gehirn die Informationsverarbeitung erheblich beschleunigt.

Unser Gehirn verbraucht etwa 100 Watt. Somit sagt uns die physikalische Grenze, dass maximal 10^{22} Bits pro Sekunde verarbeitet werden können. Das Gehirn hat etwa 10^{11} Neuronen, die allerdings wesentlich langsamer arbeiten als die Transistoren in unserem Computer. Die Zeitskala für die Neuronen ist Millisekunden anstelle von Nanosekunden beim Computer. Nehmen wir an, ein Neuron kann ein Bit speichern und verarbeiten. Damit bearbeitet das Gehirn pro Sekunde etwa 10^{14} Bits. Das ist tausend mal besser als die Bitrate eines modernen Computers, aber immer noch ein Faktor 10^8 unter der physikalischen Grenze. Auch die Biologie hat noch viel Spielraum nach oben.



Abbildung 4.13: Der Dämon bei der Arbeit. Quelle: francois-roddier.fr

Maxwell'scher Dämon

Unser Gedankenexperiment zeigte: wir müssen die Energie $W_{in} = k_B T \ln 2$ investieren, um die Information von einem Bit zu speichern. Dieses Argument kann auch umgekehrt werden: wenn wir die Information von einem Bit haben, dann können wir die Energie $W_{out} = k_B T \ln 2$ gewinnen. Das ist das Prinzip des Maxwell'schen Dämons. Nehmen wir an, wir haben ein Gas in einem Behälter mit einer Trennwand. In dieser Wand gibt es einen kleinen Schieber, der ein Loch öffnet. Nehmen wir weiterhin an, es gibt eine Maschine, den Dämon, die den Schieber nur dann öffnet, wenn sich ein Teilchen von links nach rechts bewegt. Dadurch wird im rechten Behälter ein Druck erzeugt, mit dem man einen Generator antreiben kann. Aus der Information über die Bewegung der Moleküle können wir somit Energie gewinnen.

Ein solcher Dämon würde sämtliche Energieprobleme unserer Erde sofort lösen. Autos, Schiffe, Flugzeuge, Maschinen würden allein durch die kinetische Energie der Luftmoleküle angetrieben. Eine solche Konstruktion wird Perpetuum Mobile zweiter Art genannt, sie widerspricht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Allerdings gibt es durchaus Physiker, die behaupten, das stimme nicht ganz. Denn wenn man die Entropie des Dämons ebenfalls berücksichtigt, so sollte die gesamte Entropie nicht abnehmen. Diese Diskussion füllt ganze Bücher, und wir wollen hier nicht einsteigen.⁶ Aber eins ist gewiss; wenn Sie mit einem solchen Perpetuum Mobile zum Patentanwalt gehen, wird der ihren Antrag sofort in den Papierkorb werfen.

Auf der Basis einzelner Moleküle dagegen scheint der Dämon im Experiment kürzlich realisiert worden zu sein. Durch die Information über die Position des Moleküls wurde im Mittel ein Energiegewinn von $W_{out} = 0.28 k_B T$ erreicht.⁷ Allerdings wurden bei der Energiebilanz nicht die Kilokalorien des Doktoranden berücksichtigt, der dieses Experiment aufgebaut und durchgeführt

⁶A. Rex, H. Leff, A. Hilger, Maxwells Demon: Entropy, Information, Computing, 1990

⁷C. Van den Broeck, Nature Physics 6, S. 937 (2010)

21. Doppelstunde

hat.

4.4.4 Wirkungsgrad

Wie viel Arbeit kann aus Wärme gewonnen werden (Kraftwerk), wie viel Wärme kann durch Arbeit entnommen werden (Kühlschrank, Wärmepumpe)? Die Thermodynamik liefert obere Grenzen für den entsprechenden Wirkungsgrad. Aus den beiden allgemeinen Prinzipien, Energieerhaltung und Entropieerhöhung, können wir diese Frage im Idealfall beantworten.

Zunächst zum Wärmekraftwerk.



Abbildung 4.14: Bei hoher Temperatur entnimmt die Maschine Wärme und gibt ein Teil davon bei tiefer Temperatur wieder ab. Dabei leistet sie Arbeit.

In einem Kraftwerk wird Wärme bei einer Temperatur T_h erzeugt. Außerdem gibt es einen Kühlturm, der Wärme wieder bei einer Temperatur T_t abführt. Dazwischen arbeitet eine Maschine M, die Wärme Q in elektrische Energie W umwandelt.

Im Idealfall gibt es den folgenden Prozess:

- Die Maschine entnimmt von heißen Reservoir bei der Temperatur T_h die Wärme Q_h .
- Die Maschine gibt an die Kühlung die Wärme Q_t bei einer Temperatur T_t ab.
- Dabei leistet die Maschine die Arbeit W und nimmt danach wieder ihren Anfangszustand an.

Die Maschine arbeitet zyklisch, denn schließlich soll der Prozess viele Jahre lang iteriert werden. Die Thermodynamik sagt uns nun etwas über die Energie- und Entropie-Bilanz dieses Prozesses. Im Folgenden wollen wir sämtliche Größen positiv halten und erst bei den Bilanzen das entsprechende Vor-

zeichen wählen.

Entropiebilanz

Im Idealfall arbeitet die Maschine dicht am thermischen Gleichgewicht, $\delta Q = TdS$, und es gilt

$$Q_h = T_h \Delta S_h, \quad Q_t = T_t \Delta S_t, \quad \Delta S_M = 0 \tag{4.47}$$

Da die Gesamtentropie nicht abnehmen darf, muss mehr Entropie abgegeben als aufgenommen werden

$$\Delta S_h \le \Delta S_t \tag{4.48}$$

Im reversiblen Fall gilt das Gleichheitszeichen.

Energiebilanz

Die Maschine arbeitet zyklisch, $\Delta E_M = 0$. Die Wärmedifferenz muss demnach in die geleistete Arbeit übergehen:

$$W = Q_h - Q_t = T_h \Delta S_h - T_t \Delta S_t \le (T_h - T_t) \Delta S_h = \frac{T_h - T_t}{T_h} Q_h \qquad (4.49)$$

Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad eines Kraftwerkes ist definiert als das Verhältnis der geleisteten Arbeit zur zugeführten Wärme, $\eta = \frac{W}{Q_h}$. Damit erhalten wir

$$\eta \le \frac{T_h - T_t}{T_h} = \eta_{Carnot} \tag{4.50}$$

Der Wirkungsgrad eines Kraftwerkes ist demnach begrenzt. Die zugeführte Wärme kann nicht vollständig in Arbeit umgewandelt werden, sondern der zweite Hauptsatz sagt uns, dass wir wieder Wärme abführen müssen, wir brauchen einen Kühlturm. Den idealen Wirkungsgrad erhalten wir für einen vollständig reversiblen Prozess, bei dem genau so viel Entropie aufgenommen wie abgegeben wird. Die obere Grenze nennt man den *Carnot Wirkungsgrad*.



Abbildung 4.15: Ohne Abwärme, hier im Kühlturm, kann Wärme nicht in Arbeit umgewandelt werden. Quelle: Wikipedia

Für ein Wärmekraftwerk, dass bei 600K Wärme zuführt und bei 300K an die Umgebung wieder abgibt, erhalten wir somit einen maximal möglichen Wirkungsgrad von 50%. Im realen Kraftwerken wird aber nur ein Wirkungsgrad von 30 - 40% erreicht. Woran liegt das?

Das liegt an unserer Idealisierung. Wir haben angenommen, dass Wärme bei der Temperatur von einem heißen Reservoir auf die Maschine fließt. Ohne Temperaturunterschied fließt aber keine Wärme! Und selbst wenn wir den Grenzfall betrachten, dass die Temperatur der Maschine gegen die Temperatur des Reservoirs geht, würde es unendlich lange dauern bis die Wärme übertragen worden ist. D.h., wir dürfen nicht die Arbeit optimieren sondern die Leistung, die Arbeit pro Zeit.

Dazu benötigen wir ein wenig Thermodynamik fern vom Gleichgewicht, nämlich den Wärmefluss bei gegebener Temperaturdifferenz, der durch eine Koeffizienten σ beschrieben wird:

$$\dot{Q}_h = \sigma(T_h - T_h^M), \quad \dot{Q}_t = \sigma(T_t^M - T_t)$$
(4.51)

Wir nehmen an, dass die Maschine zwischen den Temperaturen T_h^M und T_t^M arbeitet. Wenn wir nun diese beiden Temperaturen so wählen, dass die Leistung maximal wird, so erhalten wir im besten Fall

$$\eta = \frac{\sqrt{T_h} - \sqrt{T_t}}{\sqrt{T_h}} \tag{4.52}$$

Überraschenderweise stimmt diese Abschätzung sehr gut mit den realen Wirkungsgraden von ganz unterschiedlichen Kraftwerken überein.

Efficiencies of Power Plants as Compared with the Carnot Efficiency and with the Efficiency of an Endoreversible Engine Maximized for Power Output (ε_{erp}) .

Power Plant	T_c (C)	T_h (C)	arepsilon (Carnot)	ε_{erp}	ε (observed)
West Thurrock (U.K.) coal fired steam plant	~ 25	565	0.64	0.40	0.36
CANDU (Canada) PHW	~ 25	300	0.48	-0.28	0.30
nuclear reactor					
mal steam plant	00	250	0.32	0.175	0.16

Abbildung 4.16: Wirkungsgrade von verschiedenen Kraftwerken. Durch Optimierung der Leistung erhält man den Wirkungsgrad ε_{erp} . Aus: Callen, Thermodynamics, 2006

Der Physik gelingt es somit, allein aus den beiden Hauptsätzen den Wirkungsgrad von komplizierten, durch Ingenieure jahrzehntelang optimierten Kraftwerken zu berechnen.

4.4.5 Kühlschrank und Wärmepumpe

Beim Kraftwerk wurde Wärme vom heißen Reservoir teilweise zur Maschine und zum Kühlturm abgegeben. Beim Kühlschrank und bei der Wärmepumpe dagegen wird dieser Prozess umgekehrt. Die Maschine leistet Arbeit, um Wärme von einem kalten Reservoir – Kühlschrank, Erde – zu einem warmen Zimmer zu transportieren. Dabei wollen wir natürlich möglichst wenig Energie investieren. Die Energie- und Entropie-Bilanzen sind fast identisch mit



Abbildung 4.17: Ein Motor leistet Arbeit, um Wärme vom kalten zum warmen Reservoir zu transportieren.

denjenigen des Kraftwerkes. Die Wärme $Q_t = T_t \Delta S_t$ wird dem Kühlschrank entzogen, und die Wärme $Q_h = T_h \Delta S_h$ wird dem Zimmer hinzugefügt. Die gesamte Entropie darf dabei nicht abnehmen, $\Delta S_h \geq \Delta S_t$. Der Wärmeunter-

schied ist die geleistete Arbeit, $W = Q_h - Q_t$. Der zweite Hauptsatz sagt uns nun, dass wir nicht ohne Arbeit die Wärme aus dem Kühlschrank entnehmen können, denn im besten Fall ist die Gesamtentropie erhalten, $\frac{Q_h}{T_h} = \frac{Q_t}{T_t}$, und wir müssen die Energie $W = (T_h - T_t)\Delta S$ bezahlen. Dem Zimmer müssen wir demnach mehr Wärme hinzufügen als wir dem Kühlschrank entnommen haben. Ohne das Zimmer zu heizen gibt es kein kaltes Bier!

Falls jemand auf die Idee kommen sollte, sein Zimmer durch Öffnen des Kühlschrankes zu kühlen, so sagt uns die vorige Gleichung, dass dadurch das Zimmer nicht gekühlt sondern geheizt wird.

Der Kühlkoeffizient γ ist definiert als das Verhältnis von entnommener Wärme zur geleisteten Arbeit

$$\gamma = \frac{Q_t}{W} = \frac{T_t \Delta S_t}{T_h \Delta S_h - T_t \Delta S_t} \le \frac{T_t \Delta S_t}{T_h \Delta S_t - T_t \Delta S_t} \Rightarrow \boxed{\gamma \le \frac{T_t}{T_h - T_t}}$$
(4.53)

Dabei erhalten wir das Gleichheitszeichen, wenn der Prozess reversibel abläuft, also wenn die gesamte Entropie sich bei diesem Prozess nicht erhöht. Wenn das Zimmer fast so kalt ist wie der Kühlschrank, so benötigen wir natürlich nur wenig Arbeit, um die Wärme zu entnehmen.

Erstaunlicherweise sagt uns diese Theorie aber auch, dass wir unser Zimmer mit kalter Luft oder kaltem Grundwasser in der Erde heizen können. Ohne eine Wärmepumpe wird die gesamte Arbeit W, die wir entweder aus einer Verbrennung oder elektrisch erhalten, als Wärme an das Zimmer abgegeben, $Q_h = W$. Es geht aber besser. Denn diese Arbeit können wir auch nutzen, um die Wärme Q_t aus einem kalten Reservoir in das warme Zimmer zu transportieren. Dann gilt im reversiblen Fall

$$Q_h = W + Q_t = W\left(1 + \frac{Q_t}{W}\right) = W(1 + \gamma) = W\frac{T_h}{T_h - T_t}$$
 (4.54)

Wärmepumpen zur Beheizung eines Gebäudes erreichen etwa 50% dieses Maximalwertes. Sie arbeiten beispielsweise zwischen den Temperaturen $T_t = 7^{\circ}$ C des Grundwassers und $T_h = 50^{\circ}$ C der Heizkörper, und erreichen damit eine Leistungszahl von etwa $Q_h/W \simeq 3.5$.

Wie wird denn dem Kühlschrank, der Erde, der Außenluft oder dem Grundwasser Wärme entzogen? Das geschieht indem eine Flüssigkeit verdampft wird. Bei diesem Phasenübergang wird Wärme aufgenommen. Diese Flüssigkeit entzieht dann dem Kühlschrank oder der Erde Wärme und wird gasförmig Das Gas wird durch einen elektrisch betriebenen Kompressor verdichtet und den Kondensator-Röhren zugeleitet, wo es Wärme abgibt und sich wieder verflüssigt.



Abbildung 4.18: Die Rückseite eines Kühlschranks

4.4.6 Carnot-Prozess

Bisher haben wir ganz allgemein, nur mit den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik, eine obere Schranke für den Wirkungsgrad von Wärmekraftwerken berechnet. Nun wollen wir konkrete Prozesse der zyklisch arbeitenden Maschine betrachten. Die Maschine bestehe aus einem Gas, das in einem Behälter durch einen beweglichen Kolben komprimiert oder expandiert werden kann. Dabei leistet entweder das Gas Arbeit, oder von außen wird Arbeit zugeführt, beispielsweise durch eine Kurbelwelle mit Schwungrad.



Abbildung 4.19: Ein Gaskolben als Arbeitsmaschine

Die Maschine arbeitet zyklisch, d.h. nach einem Kreisprozess nimmt sie ihren Ausgangszustand wieder an. Wie kann nun ein solcher Kreisprozess aussehen? Welcher Kreisprozess liefert den optimalen Carnot-Wirkungsgrad? Wieder

betrachten wir den idealen Grenzfall, bei dem die Maschine dicht am thermischen Gleichgewicht arbeitet. Wir lassen wieder alle Größen positiv und fügen erst bei der Bilanz das entsprechende Vorzeichen hinzu.



Abbildung 4.20: Carnot-Prozess

Der *Carnot-Prozess* ist folgendermaßen definiert und wird in der Abbildung sowohl im Temperatur/ Entropie als auch im Druck/Volumen Diagramm dargestellt.

A zu B:Isotherme Expansion, die Wärme Q_{AB} wird aufgenommen
und die Arbeit W_{AB} wird von der Maschine geleistet, $Q_{AB} = T_A \Delta S$.B zu C:Adiabatische Expansion, $\Delta S = 0$, die Temperatur nimmt
ab, die Arbeit W_{BC} wird von der Maschine geleistet.C zu D:Isotherme Kompression, die Wärme $Q_{CD} = T_D \Delta S$ wird ab-
gegeben, die äußere Arbeit W_{CD} wird geleistet.D zu A:Adiabatische Kompression, $\Delta S = 0$, die Temperatur nimmt
zu, die äußere Arbeit W_{AB} wird geleistet.

Die Energiebilanz des Carnot-Prozesses lautet damit

$$W = W_{AB} + W_{BC} - W_{CD} - W_{DA} = Q_{AB} - Q_{CD} = (T_A - T_D)\Delta S \quad (4.55)$$

Die insgesamt geleistete Arbeit ist demnach die Fläche im (T, S)-Diagramm. Aber sie ist ebenso die Fläche im (p, V)-Diagramm, denn auf dem oberen Weg wird vom Gas Arbeit geleistet, auf dem unteren Weg dagegen von einer äußeren Kraft. Es gilt also

$$W = \oint p dV = \oint \delta W = \oint \delta Q = \oint T dS \neq 0 \tag{4.56}$$

Hier sehen wir ganz deutlich, dass δW und δQ keine Differenziale von Funktionen W und Q sind, denn sonst hätte das geschlossene Wegintegral den Wert Null. Wärme und Arbeit sind Prozessgrößen und hängen vom gewählten Weg ab. Energie, Entropie und Volumen dagegen sind Zustandsgrößen und haben ein Differenzial,

$$\oint dE = \oint dS = \oint dV = 0 \tag{4.57}$$
Wir erinnern noch einmal an den Zusammenhang zwischen diesen drei Differenzialen,

$$dE = T \, dS - p \, dV, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V, \quad -p = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$$
(4.58)

		Bezeichnung	ρ, V-Diagramm	Einzel- prozesse	thermischer Wirkungsgrad
Kolbenmaschinen	Verbrennungsmotoren	Seiliger- Prozeß	P Q.1 2 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10	2 Isentropen, 2 Isochoren, 1 Isobare	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2 + \kappa (T_4 - T_3)}$
		Otto- Prozeß		2 Isentropen, 2 Isochoren	$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)^{\kappa}} $
		Diesel- Prozeß	P 2 10m 3 10m 4 10m V	2 Isentropen, 1 Isochore, 1 Isobare	$\eta_{1h} = \frac{\left(\begin{array}{c} V_3 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1}{\kappa \left(\begin{array}{c} V_3 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1} \frac{\left(\begin{array}{c} V_3 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1}{\kappa \left(\begin{array}{c} V_3 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1} \frac{\left(\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1}{\kappa \left(\begin{array}{c} V_3 \\ V_2 \end{array}\right)^{\kappa} - 1}$
	Heißluftmotor	Stir!ing- Prozeß	$P = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ $	2 Isothermen, 2 Isochoren	$\eta_{1h} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = n_{1(h,c)}$
Strömungsmäschinen	offenè Gasturbine	Jouie- Prozeß	P 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2	2 Isentropen, 2 Isobaren	$\tau_{tth} = 1 - \frac{\overline{T}_1}{\overline{T}_2}$ $= 1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$
	geschlossene Gasturbine	Ericsson- F'r .zeß	$P = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}m} \frac{1}{3}$ T_{1} T_{2} T_{2} T_{2} T_{3} $T_$	2 Isothermen, 2 Isobaren	$\eta_{th} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{th,c}$
	Dampfkraft- aılagen	⊂Clausius- Rankine⊢Prozeβ	P 2 1 1 4 a _{sb} Koexistenzgebiet	2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{\text{th}} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1}$ $\approx 1 - \frac{h_4}{h_3}$

3.3. Hauptsätze der Thermodynamik 177

Bild 3-28. Technische Kreisprozesse.

Technische Kreisprozesse. Quelle: E. Hering, R. Martin, M. Stohrer, Physik für Ingenieure, 1988

Ideales Gas

Für das ideale Gas können wir sämtliche Größen des Carnot-Prozesses berechnen. Dazu benötigen wir $pV = Nk_BT$, $E = \frac{3}{2}Nk_BT$, $S = Nk_B(\frac{3}{2}\ln T + \ln V + konst.)$.

Damit erhalten wir sofort die Entropiedifferenz

$$\Delta S = Nk_B \ln \frac{V_B}{V_A} = Nk_B \ln \frac{V_C}{V_D} \tag{4.59}$$

Bei den beiden isothermen Prozessen, A zu B und C zu D, ändert sich die innere Energie E nicht, sodass die Wärme vollständig in Arbeit übergeht,

$$W_{AB} = T_A \Delta S = Q_{AB}, \quad W_{CD} = T_C \Delta S = Q_{CD} \tag{4.60}$$

Bei den beiden adiabatischen Prozessen, B zu C und D zu A, wird weder Wärme aufgenommen noch abgegeben, sodass die Arbeit aus der Differenz der inneren Energie gewonnen oder geleistet wird.

$$W_{BC} = \frac{3}{2}k_B N(T_A - T_D) = W_{DA}$$
(4.61)

Damit erhalten wir die gesamte Arbeit, diejenige, die das Gas geleistet hat minus derjenigen, die von Außen geleistet wurde,

$$W = W_{AB} + W_{BC} - W_{CD} - W_{DA} = W_{AB} - W_{CD} = Nk_B(T_A - T_D) \ln \frac{V_B}{V_A}$$
(4.62)

Nur bei dem Prozess A zu B wird Wärme hinzugeführt,

$$Q_{AB} = T_A \Delta S = N k_B T_A \ln \frac{V_B}{V_A} \tag{4.63}$$

Der Wirkungsgrad dieser Maschine ist demnach

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{T_A - T_D}{T_A} = \eta_{Carnot}$$
(4.64)

Dieser idealisierte Prozess liefert den maximal möglichen Wirkungsgrad, den Carnot-Wirkungsgrad. Im Allgemeinen haben Kreisprozesse einen kleineren Wirkungsgrad. Technische Prozesse werden näherungsweise durch solche idealisierten Prozesse beschrieben, wie den Otto- oder Diesel-Zyklus beim Verbrennungsmotor. Mit dem idealen Gas können wir den Wirkungsgrad sämtlicher Prozesse berechnen, siehe vorige Liste.

22. Doppelstunde

Stirling-Motor

Wie funktioniert nun unsere kleine Maschine, die nur Luft hin und her schiebt, mit jeder Wärmequelle angetrieben werden kann und dabei Arbeit leistet? Der Stirlingmotor hat zwei Kolben, einen Arbeits- und einen Ver-



Abbildung 4.21: Stirlingmotor

drängerkolben. Der Verdrängerkolben schiebt die heiße Luft von der Wärmequelle in den Arbeitsbereich. Dort wird durch die Expansion des Gases der Arbeitskolben angetrieben. Dann wird durch die Kühlrippen Wärme abgegeben und das Gas wieder komprimiert, ebenfalls mit Wärmeabgabe. Der Verdränger-Kolben schiebt das abgekühlte Gas wieder zur Wärmequelle zurück, wo es wieder erhitzt wird.

Näherungsweise kann dieser Prozess folgendermaßen beschrieben werden:

- c): Expansion bei konstanter Temperatur
- d): Abkühlung bei konstantem Volumen
- a): Kompression bei konstanter Temperatur
- b): Erhitzen bei konstantem Volumen









Abbildung 4.22: Stirling-Kreisprozess

Der Trick beim Stirling-Motor ist nun, die Wärme, die bei konstantem Volumen abgegeben wird, irgendwie zu speichern und für die Wärmezufuhr bei konstantem Volumen wieder zu nutzen. Gelingt dies, so erhält man im Idealfall den optimalen Carnot-Wirkungsgrad. Bei unserem Motor wird versucht, diese Wärme im Verdrängerkolben zu speichern.

Der Stirlingmotor scheint eine ideale Maschine zu sein; er kann mit jeder Wärmequelle angetrieben werden, ist leise und hat den maximalen Wirkungsgrad. Allerdings konnte er sich bisher nur bei wenigen Anwendungen durchsetzen, denn der technisch erreichte Wirkungsgrad ist doch wesentlich kleiner.

4.5 Thermodynamische Relationen

Bisher haben wir nur relativ einfache Prozesse diskutiert, die sich mit dem idealen Gas leicht berechnen ließen. Im Allgemeinen benötigen wir aber etwas mehr Mathematik, um verschiedene Messgrößen ineinander umzurechnen. Aus komplizierteren Zustandsgleichungen lassen sich mithilfe mathematischer Methoden ebenfalls Aussagen über verschiedene Messungen gewinnen.

4.5.1 Thermische Messgrößen

Welche Messgrößen gibt es überhaupt in der Thermodynamik? Was kann im Experiment gemessen werden? Und wie hängen diese Größen miteinander zusammen? Hier sind einige Messgrößen, die insbesondere bei Gasen eine Rolle spielen.

Thermischer Ausdehnungskoeffizient

Wenn wir die Temperatur bei konstantem Druck ändern, so wird sich das Volumen ändern. Das wird durch den thermischen Ausdehnungskoeffizienten beschrieben, die relative Volumenänderung pro Temperaturänderung.

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \tag{4.65}$$

Kompressibilität

Wenn wir den Druck erhöhen, so wird sich bei Gasen das Volumen verringern. Das können wir bei konstanter Temperatur oder bei konstanter Entropie messen. Die isotherme und die adiabatische Kompressibilität sind definiert als

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \tag{4.66}$$

Wärmekapazität

Im Praktikum haben Sie vermutlich Wärme $\delta Q=TdS$ erzeugt – beispielsweise durch einen elektrischen Widerstand – und die Temperaturänderung eines Körpers oder eines Gases gemessen. Das wird durch die Wärmekapazität $C=\delta Q/dT$ beschrieben, und Sie können das Experiment bei konstantem Volumen oder konstantem Druck durchführen. Die Wärmekapazität ist definiert als

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$
(4.67)

Es gibt noch einige weitere Messgrößen. Diese Größen sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Aber wir benötigen etwas mehr Mathematik, um zwischen den Messungen Beziehungen herzuleiten. Beispielsweise werden wir zeigen

$$C_p = C_V + \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T} \tag{4.68}$$

4.5.2 Homogenität

Wir wollen ein homogenes System im thermischen Gleichgewicht betrachten. Homogen heißt, wenn wir ein Teilsystem herausnehmen, dann verringern sich sämtliche extensiven Größen um denselben Faktor. Ein doppelt so großes System hat die doppelte Energie, das doppelte Volumen und die doppelte Teilchenzahl. Für jeden Faktor λ gilt daher

$$E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S, V, N) \tag{4.69}$$

Wenn wir diese Gleichung nach λ ableiten und $\lambda = 1$ setzen, so erhalten wir

$$\frac{dE}{d\lambda}_{|\lambda=1} = \frac{\partial E}{\partial S}S + \frac{\partial E}{\partial V}V + \frac{\partial E}{\partial N}N \Rightarrow \qquad E = TS - pV + \mu N \qquad (4.70)$$

Diese Eigenschaft einer homogenen Funktion nennt man auch **Euler-Gleichung**. Das Differenzial $dE = TdS - pdV + \mu dN$ der Funktion E(S, V, N) sagt uns, dass wir dS, dV, dN beliebig ändern können. Das gilt jedoch nicht für $dT, dp, d\mu$, denn aus der Euler-Gleichung folgt

$$dE = TdS - pdV + \mu dN = TdS + SdT - pdV - Vdp + \mu dN + Nd\mu$$
(4.71)

Wir erhalten somit mit der Entropie und dem Volumen pro Teilchen, s = S/N, v = V/N:

$$d\mu = -s \, dT + v \, dp \tag{4.72}$$

Diese Relation wird *Gibbs-Duhem-Gleichung* genannt. Sie zeigt, dass sich Temperatur, Druck und chemisches Potenzial nicht unabhängig voneinander ändern lassen. Mit dieser Gleichung werden wir später Dampfdruckkurven berechnen.

4.5.3 Thermodynamische Potentiale

Die Änderung der inneren Energie erhalten wir durch die Änderungen der Entropie, das Volumen und der Teilchenzahl, $dE = TdS - pdV + \mu dN$. Dabei sind die partiellen Ableitungen der Funktion E(S, V, N) die Temperatur, der negative Druck und das chemische Potenzial. Diese Funktion kann als thermodynamisches Potenzial aufgefasst werden, ihre partiellen Ableitungen liefern thermische Messgrößen.

Im Experiment wird dagegen oft die Temperatur oder der Druck geändert, und wir wollen daraus die Entropie und das Volumen berechnen. Welches thermodynamisches Potenzial erzeugt diese Größen? Das sagt uns die Legendre-Transformation.

Legendre-Transformation

Die Funktion E(S, V, N) enthält die gesamte thermodynamische Information. Aber die Entropie S ist nicht direkt messbar, dagegen die partielle Ableitung $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}$. Wir suchen also eine Funktion F(T, V, N), die die gesamte thermodynamische Information enthält. Interessanterweise ist das nicht die Funktion E(T, V, N) = E(S(T, V), V, N), sondern wir müssen die Temperatur zu einer unabhängigen Variablen machen. Dazu benötigen wir die Legendre Transformation.

In der klassischen Mechanik haben wir diese Transformation schon kennen gelernt. Aus der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ erhalten wir den kanonischen Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ als partielle Ableitung. In der Hamilton'schen Mechanik werden die Größen q, p zu unabhängigen Variablen. Dazu wird die Hamilton-Funktion als Legendre-transformierte der Lagrange-Funktion definiert

$$-H(q,p) = L - p\dot{q} \tag{4.73}$$

Wir definieren uns die **Freie Energie** F = E - TS und berechnen ihr Differenzial

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dF = dE - TdS - SdT$$

$$\Rightarrow dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

Die Änderung der Freien Energie wird demnach nur durch die Zustandsgrößen S, p, μ und nicht durch deren Ableitungen beschrieben. Die Temperatur als partielle Ableitung der Energie ist zur unabhängigen Variablen geworden.

Potentiale

Die Legendre Transformation können wir nun für sämtliche partiellen Ableitungen durchführen. Mit drei Variablen der Energie erhalten wir somit acht thermodynamische Potenziale. Nur vier davon sind in der Thermodynamik interessant. Man definiert

Energie E(S, V, N) $dE = TdS - pdV + \mu dN$ (4.74) $\frac{\partial E}{\partial S} = T, \ \frac{\partial E}{\partial V} = -p, \ \frac{\partial E}{\partial N} = \mu$ Freie Energie F(T, V, N) $S \to T : F = E - TS$ (4.75) $dF = -SdT - pdV + \mu dN$ $\frac{\partial F}{\partial T} = -S, \ \frac{\partial F}{\partial V} = -p, \ \frac{\partial F}{\partial N} = \mu$ Enthalpie H(S, p, N) $V \to p: H = E + pV$ (4.76) $dH = TdS + Vdp + \mu dN$ $\frac{\partial H}{\partial S} = T, \ \frac{\partial H}{\partial n} = V, \ \frac{\partial H}{\partial N} = \mu$ Freie Enthalpie G(T, p, N) $S \to T, V \to p: G = E - TS + pV$ (4.77) $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$ $\frac{\partial G}{\partial T} = -S, \ \frac{\partial G}{\partial p} = V, \ \frac{\partial G}{\partial N} = \mu$

Merke: Immer wenn die Variablen gewechselt werden, dreht sich das Vorzeichen im Differenzial um, aus TdS wird -SdT. Sämtliche Potenziale sind Energien, und ihre partiellen Ableitungen geben Zustandsgrößen,

$$p(S, V, N) = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad p(T, V, N) = -\frac{\partial F}{\partial V}$$
 (4.78)

Die Differenziale der Potenziale beschreiben Energieänderungen bei Prozessen dicht am thermischen Gleichgewicht. Beispiele:

- Prozess bei konstanter Entropie (adiabatisch): dE = -pdV, Arbeit
- Prozess bei konstanter Temperatur (isotherm): dF = -pdV, Arbeit
- Prozess bei konstantem Druck: $dH = TdS = \delta Q$, Wärme Chemische Reaktionen laufen bei konstantem Druck ab, somit gibt die Enthalpie-Differenz ΔH die Reaktionswärme Q.

4.5.4 Maxwell-Relationen

Allein schon die Existenz von thermodynamischen Potenzialen liefert wichtige thermodynamische Beziehungen. Denn die Potenziale sind stetige und fast überall zweifach differenzierbare Funktionen, deren gemischte zweite Ableitungen vertauscht werden dürfen

$$\Phi(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_y \right]$$
(4.79)

Damit erhalten wir viele Relationen. Wenn wir die Teilchenzahl konstant halten, so finden wir aus den vier thermodynamischen Potenzialen

$$dE = TdS - pdV \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S} = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V}$$
(4.80)
$$dF = -SdT - pdV \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V}$$
$$dG = -SdT + Vdp \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p}$$
$$dH = TdS + Vdp \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p}$$

Diese Gleichungen nennt man *Maxwell-Relationen*. Wenn Sie also die Funktion V(S, p) kennen und wissen wollen, wie sich die Temperatur bei adiabatischer Druckerhöhung ändert, so suchen Sie sich das thermodynamische Potenzial H, das von S, p abhängt, und bilden die gemischten Ableitungen $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$.

23. Doppelstunde

4.5.5 Partielle Ableitungen

Allerdings gibt es noch weitere Tricks zur Umwandlung partieller Ableitungen. Dazu betrachten wir ganz allgemein eine gutmütige Funktion f(x, y) mit dem Differenzial $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$. Dann gelten folgende Regeln:

• Inverse Funktion für konstantes y

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y} \tag{4.81}$$

• Kettenregel x(z) für konstantes y:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y}}$$
(4.82)

• Konstante Funktion f:

$$df = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} dx = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x} dy$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{f} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_{x} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{f}} = -1$$
(4.83)

4.5.6 Anwendungen

Mit diesen mathematischen Methoden zur Manipulation partieller Ableitungen können wir nun eine Vielzahl von thermodynamischen Beziehungen herleiten. Beispielsweise sind in einem Gas die Messgrößen C_p, α, κ_T als Funktion von Druck p und Temperatur T tabelliert. Mit diesen drei Messgrößen können wir sämtliche anderen ersten Ableitungen der Zustandsgrößen berechnen.

Zur Erinnerung:

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p, \quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{4.84}$$

Hier sind vier Beispiele:

• Wie ändert sich die Temperatur, wenn der Druck adiabatisch erhöht wird?

Mit der Formel 4.83 erhalten wir

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S} = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p}} \tag{4.85}$$

Den Zähler wandeln wir mit der Maxwell-Relation für G(T, p) um,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\alpha \tag{4.86}$$

und erhalten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{V\alpha T}{C_p} \tag{4.87}$$

Unsere Frage können wir demnach mithilfe der tabellierten Größen beantworten.

• Wie ändert sich die Temperatur, wenn der Druck bei konstantem Volumen erhöht wird?

Wieder verwenden wir die Formel 4.83 und erhalten sofort

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{V} = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T}}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p}} = \frac{\kappa_{T}}{\alpha}$$
(4.88)

Wer die Formel 4.83 vergessen hat, kann natürlich auch das Differential der Funktion V(T, p) berechnen und dV = 0 setzen, so hatten wir die Formel ja hergeleitet.

• Wie viel Wärme wird zugeführt, wenn die Temperatur bei konstantem Volumen erhöht wird, $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = ?$

Hier hilft uns die Formel 4.83 nicht weiter. Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir Informationen über die Entropie als Funktion der Temperatur und des Druckes, aber bei konstantem Volumen. Wir versuchen deshalb, das Differenzial der Funktion S(T, p(T, V)) zu untersuchen:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV \right]$$
(4.89)

Nun betrachten wir den Prozess bei konstantem Volumen, dV = 0, und erhalten

$$\frac{dS}{dT} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Rightarrow$$
$$C_V = C_p + T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Die zweite partielle Ableitung haben wir schon kennen gelernt, und die erste formen wir mit Hilfe der Maxwell-Relation für G(T, p) um:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\alpha V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\kappa_T} \tag{4.90}$$

Schließlich erhalten wir

$$C_V = C_p - \frac{\alpha^2 T V}{\kappa_T} \tag{4.91}$$

Nun haben wir die Wärmekapazität bei konstantem Volumen durch tabellierte Größen als Funktion von Druck und Temperatur ausgedrückt.

• Wie ändert sich die Temperatur, wenn der Druck bei konstanter Enthalpie erhöht wird?

Zunächst klingt diese Frage etwas seltsam, denn wer kann sich schon Enthalpie vorstellen. Aber wir werden sehen, dass diese Größe wichtig für die Verflüssigung von Gasen ist. Um die Frage zu beantworten, untersuchen wir die Enthalpie als Funktion der Temperatur und des Drucks, H(S(T, p), p). Mit dH = TdS + Vdp erhalten wir

$$dH = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp\right] + Vdp \qquad (4.92)$$

Der erste Ausdruck gibt C_p , und den zweiten formen wir wie vorher mithilfe der Maxwell-Relation für G(T, p) um. Mit dH = 0 erhalten wir damit

$$j = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H} = \frac{V}{C_{p}}(T\alpha - 1)$$
(4.93)

Die Größe j wird **Joule-Thomson-Koeffizient** genannt. Bei Gasen kann j sowohl positive wie auch negative Werte annehmen.

Gasverflüssigung

Als Beispiel für die Anwendung der Enthalpie betrachten wir die Verflüssigung eines Gases. Beim so genannten Linde-Verfahren oder Drossel/Joule-Thomson-Prozess wird ein Gas wiederholt durch eine Membran oder durch eine Engstelle gepumpt. Dabei soll sich das Gas so lange abkühlen, bis es in seine flüssige Phase kondensiert. Wie muss man die Parameter des Gases wählen, damit es sich bei diesem Prozess abkühlt?



Abbildung 4.23: Linde-Verfahren zur Gasverflüssigung. Quelle: Wikipedia

Dazu betrachten wir die Energiebilanz des Gases in der Nähe einer porösen Membran bzw. einer Engstelle in einem thermisch isolierten Rohr, durch das es gepumpt wird.



Abbildung 4.24: Ein Gas wird durch eine Membran gepumpt.

Auf der linken Seite hat das Gas den Druck p_1 und die Temperatur T_1 , und auf der rechten Seite die Werte p_2, T_2 . Betrachten wir nun ein Volumen Element V_1 , das in einem gewissen Zeitraum durch die Membran gepumpt wird. Nach dem Durchgang nimmt dieses Gas das Volumen V_2 ein. Die mechanische Arbeit, die dabei geleistet wird, hat den Wert $W = p_1V_1 - p_2V_2$. Da das Rohr thermisch isoliert ist, gibt es keinen Wärmezufluss und die geleistete Arbeit muss demnach aus der Änderung der inneren Energie des Gases gewonnen werden,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \tag{4.94}$$

Daraus folgt, dass die Größe H = E + pV konstant bleibt. Das ist aber gerade die Enthalpie des Gases, bei diesem Prozess bleibt also die Enthalpie konstant.

Damit die Gasverflüssigung funktioniert, muss gelten $T_2 < T_1$. Wir wollen das für das ideale Gas abschätzen. Es gilt

$$pV = Nk_BT, \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT \quad \Rightarrow \quad H = E + pV = \frac{5}{2}Nk_BT \qquad (4.95)$$

Die Enthalpie hängt somit nur von der Temperatur ab. Da die Enthalpie aber konstant bleibt, ändert sich auch die Temperatur nicht, $T_1 = T_2$. Die Abkühlung funktioniert somit nicht für das ideale Gas, abgesehen davon dass ein ideales Gas keine Flüssigkeit bilden kann.

Beim realen Gas dagegen sieht das anders aus. Wenn Druck und Temperatur sich beim Übergang durch die Membran nur wenig ändern, so wollen wir wissen, ob die Größe

$$j = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H \tag{4.96}$$

positiv oder negativ ist.



Abbildung 4.25: Kurven konstanter Enthalpie.

Das ist aber gerade der Joule-Thomson-Koeffizient, den wir vorher durch tabellierte Größen ausgedrückt haben. Bei realen Gasen kann er sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Die Kurven mit konstanter Enthalpie

sind als Funktion der Temperatur und des Druckes tabelliert, und die Maxima dieser Kurven trennen die Bereiche von negativen und positiven Werten von j. Die Ingenieure müssen darauf achten, dass der Prozess immer im Bereich positiver Werte bleibt.

24. Doppelstunde

4.6 Phasenübergang

Durch die Änderung von Druck, Temperatur oder anderen äußeren Parametern kann eine Substanz ihren Zustand qualitativ ändern. So kann Wasser eine feste, flüssige oder gasförmige Phase annehmen. Magnetische Momente können sich unterhalb einer kritischen Temperatur spontan ordnen, das Material wird magnetisch. Metalle können bei tiefen Temperaturen ihren elektrischen Widerstand verlieren, das Material wird supraleitend. Legierungen können sich bei tiefen Temperaturen entmischen. Das alles geschieht im thermischen Gleichgewicht und wird durch die Thermodynamik beschrieben.

Betrachten wir dazu das Kochen von Wasser. Erhitzen wir Wasser bei konstantem Druck, so beobachten wir, dass bei $T = 100^{\circ}$ C das Wasser allmählich in seine gasförmige Phase, den Wasserdampf übergeht.



Abbildung 4.26: Durch Wärme wird eine Flüssigkeit bei konstanter Temperatur und Druck in ihren gasförmigen Zustand umgewandelt.

Fügen wir bei konstanter Temperatur und konstantem Druck weiterhin Wärme hinzu, so wird das Wasser vollständig in Wasserdampf überführt, bis schließlich die Temperatur des Gases weiter ansteigt.

In einem großen Bereich des Volumens gibt es die flüssige und die gasförmige Phase gleichzeitig, die beiden Phasen koexistieren. Der Prozess der Phasenumwandlung geschieht demnach bei konstanter Temperatur und konstantem Druck durch das Zufügen oder Abführen von Wärme, wobei das Volumen einen großen Sprung macht.

Im Druck-Temperatur-Diagramm findet man im einfachsten Fall drei verschiedene Phasen, fest, flüssig und gasförmig. Die Phasen werden durch Koexistenzlinien voneinander getrennt. Das Material kann also drei verschiedene Übergänge machen: fest/gasförmig, fest/flüssig, flüssig/gasförmig. Die Phasenübergänge finden jeweils an einem Punkt auf der Koexistenzlinie statt. Die Koexistenz von Flüssigkeit und Gas endet an einem kritischen Punkt. Am Tripelpunkt gibt es gleichzeitig die feste, die flüssige und die gasförmige Phase.

Zeichnet man die Isothermen im Druck-Volumen-Diagramm, so zeigt sich der Phasenübergang bei konstantem Druck durch eine Änderung des Volumens. Mit wachsender Temperatur wird der Volumensprung immer kleiner, bis er am kritischen Punkt ganz verschwindet.



Abbildung 4.27: p-T Diagramme von drei Phasen eines Stoffes. Quelle: Wikipedia

4.6.1 Koexistenzkurve

Wie beschreiben wir nun diesen Phasenübergang mit der Thermodynamik? Auf der Koexistenzkurve gibt es zwei Phasen, die Energie, Volumen und Teilchenzahl austauschen können und sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Daraus haben wir schon hergeleitet, dass sich die entsprechenden



Abbildung 4.28: p-V-T Diagramm von drei Phasen eines Stoffes. Quelle: Wikipedia

intensiven Parameter anpassen:

$$T_{fl} = T_g, \quad p_{fl} = p_g, \quad \mu_{fl} = \mu_g$$
(4.97)

Die Gleichung $\mu_{fl}(p,T) = \mu_g(p,T)$ definiert somit die Koexistenzkurve p(T). Die Gleichung $\mu_{fl}(p,T) = \mu_g(p,T) = \mu_f(p,T)$ definiert den Tripelpunkt p_t, T_t .

Die Duhem-Gibbs-Gleichung 4.72 sagt uns nun, dass die Änderung der Temperatur und des Druckes die Änderung des chemischen Potenzials bestimmen, $d\mu = -s dT + v dp$. Das gilt auch entlang der Koexistenzkurve:

$$0 = d(\mu_{fl} - \mu_g) = -(s_{fl} - s_g)dT + (v_{fl} - v_g)dp$$
(4.98)

Daraus erhalten wir die Steigung der Koexistenzkurve

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_{fl} - s_g}{v_{fl} - v_g} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{Q}{T\Delta V}$$
(4.99)

Diese Gleichung trägt den Namen *Clausius-Clapeyron*. Dabei ist Q die so genannte *latente Wärme*, die notwendig ist, um die Flüssigkeit vollständig in ihre Dampfphase umzuwandeln. Da dieser Prozess bei konstantem Druck stattfindet, betrachten wir das Differenzial der Enthalpie, dH = TdS. Die latente Wärme ist somit die Änderung der Enthalpie, die Verdampfungsenthalpie $\Delta H = T\Delta S = Q$.

Die Steigung der Koexistenzkurve ist nach der Clausius-Clapeyron-Gleichung durch das Verhältnis von Entropie- und Volumensprung gegeben. Beim Phasenübergang ändert sich nicht nur das Volumen, sondern auch die Ordnung der Moleküle, die Entropie. Die Entropie ist ein Maß für die Unordnung. Ein Festkörper ist geordneter als eine Flüssigkeit, die wiederum mehr Struktur hat als ein Gas, deshalb gilt

$$S_{\text{fest}} < S_{\text{flüssig}} < S_{\text{gas}} \tag{4.100}$$

Bei den meisten Materialien hat die feste Phase ein kleineres Volumen als die flüssige Phase, die wiederum dichter ist als ein Gas. Daraus folgt eine positive Steigung der Koexistenzkurve,

$$V_{\text{fest}} < V_{\text{flüssig}} < V_{\text{gas}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dT} > 0$$
 (4.101)

Bei Wasser ist das allerdings anders, denn Eis schwimmt auf dem Wasser und hat deshalb eine kleinere Dichte bzw. ein größeres Volumen. Daraus folgt eine negative Steigung der Koexistenzkurve,

$$V_{\rm Eis} > V_{\rm Wasser} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dT} < 0$$
 (4.102)

Das Diagramm 4.27 zeigt den Unterschied.

Viele Phasenumwandlungen sind mit einem Bruch der Symmetrie verbunden. So ist bei einem Kristall die Translationssymmetrie gegenüber einer Flüssigkeit oder einem Gas gebrochen. Beim Magneten suchen sich die magnetischen Momente im thermischen Mittel eine spezielle Richtung aus, obwohl sie energetisch gesehen in viele gleichwertige Richtungen zeigen können, beim isotropen Material sogar in jede beliebige Richtung.

Bei dem Übergang zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase ist das jedoch anders. Dort ist keine Symmetrie spontan gebrochen, sondern es gibt nur einen Sprung in der Dichte beim Übergang durch die Koexistenzkurve. Dieser Sprung wird mit zunehmender Temperatur immer geringer, bis er am kritischen Punkt ganz verschwindet. Überraschenderweise bedeutet das, dass es gar keinen qualitativen Unterschied zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas gibt. Denn wir können einen Prozess konstruieren, der um den kritischen Punkt herumläuft ohne die Koexistenzkurve zu schneiden. Eine Flüssigkeit kann also zu einem Gas umgewandelt werden, ohne irgendwelche Unstetigkeiten zu beobachten.

Abschätzung der Koexistenzkurve

Welche Funktion beschreibt die Koexistenzkurve? Das wollen wir mithilfe des idealen Gases abschätzen. Da das Gas ein wesentlich größeres Volumen



Abbildung 4.29: Bei dem skizzierten Prozess um den kritischen Punkt herum ändert sich die Dichte stetig.

als die entsprechende Flüssigkeit hat, nähern wir den Volumensprung durch das Volumen eines idealen Gases

$$\Delta V \simeq V_g \simeq \frac{Nk_BT}{p} \tag{4.103}$$

Außerdem nehmen wir an, dass die spezifische Verdampfungswärme q = Q/Nnicht von der Temperatur abhängt. Die Clausius-Clapeyron Gleichung wird damit zur folgenden Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{k_B T^2} p \tag{4.104}$$

mit der Lösung

$$p(T) = p_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{q}{k_B T}} \tag{4.105}$$

Das Verhältnis von spezifischer Verdampfungswärme zur thermischen Energie bestimmt somit den Gasdruck entlang der Koexistenzkurve. Überraschenderweise beschreibt diese einfache Näherung den Dampfdruck von Wasser über einen weiten Bereich sehr gut, vom Tripel- bis zum kritischen Punkt. Trägt man den Logarithmus des Druckes gegen die inverse Temperatur auf, so gibt die Näherung eine Gerade geben, was mit der vorherigen Abbildung recht gut übereinstimmt.

Anwendungen

Durch Zufügen von Wärme geht die feste in die flüssige Phase über, und umgekehrt, diese latente Wärme wird frei, wenn die flüssige wieder in die feste



Abbildung 4.30: Dampfdruckkurve von Wasser. Quelle: Wikipedia

Phase übergeht. Das gleiche gilt für den Phasenübergang von der Flüssigkeit zu ihren Dampf. Das wird technisch zum Transport und zur Speicherung von Energie genutzt. Im Kühlschrank und in der Wärmepumpe wird Wärme aufgenommen, indem eine Flüssigkeit zu ihren Dampf umgewandelt wird, und sie wird im Zimmer wieder abgegeben, indem der Dampf wieder kondensiert.



Quelle: Wikipedia

Dem Kreisprozess des Kühlschranks oder der Wärmepumpe wollen wir im Temperatur Entropie Diagramm erläutern. Die Rohrleitungen des Kreisprozesses enthalten eine Substanz, die je nach Druck und Temperatur entweder einen flüssigen oder gasförmigen Zustand annimmt. Der Prozess enthält zwei

Wärmetauscher, einen Kompressor und eine Drossel, eine Engstelle im Rohr. Das (T - S)-Diagramm erhalten wir folgenden Kreisprozess



 $1 \rightarrow 2$: Das kalte Gas wird vom Kompressor verdichtet und wird dabei heiß.

 $2 \rightarrow 3$: Das heiße Gas kühlt sich etwas ab.

 $3 \rightarrow 4$: Im Kondensator, also in den Kühlrippen hinter dem Kühlschrank oder in der Fußbodenheizung gibt das heiße Gas Wärme ab und kondensiert dabei zur Flüssigkeit.

 $4 \rightarrow 5$: Die heiße Flüssigkeit wird an der Drossel entspannt, der Druck wird dabei erniedrigt und die Flüssigkeit wird sehr kalt, ein Teil davon geht schon in die gasförmige Phase.

 $5 \rightarrow 1:$ Im Wärmetauscher nimmt die Flüssigkeit Wärme auf und siedet dabei zum kalten Gas.

Die Phasenübergänge finden somit von $3 \rightarrow 4$ und von $5 \rightarrow 1$ statt. Im ersten Fall wird die Wärme in das Zimmer abgegeben, im zweiten Fall wird Wärme vom Grundwasser oder vom Kühlschrank aufgenommen. Im Idealfall gilt $Q = T\Delta S = \Delta H$.

Im Handwärmer befindet sich ein Stoff in seinem flüssigen Zustand. Durch Klicken an einem Metallplättchen werden Kristallisationskeime erzeugt, und der Stoff geht in seine feste Phase über und gibt dabei Wärme ab.

Heutzutage werden Latentwärme-Speicher entwickelt, die beispielsweise in Kraftfahrzeugen Wärme speichern und beim Kaltstart wieder freigegeben. Bei einer Müllverbrennungsanlage in Augsburg wird Wärme in Containern mit Natriumacetat gespeichert und mit LKWs zum Heizen eines Schulzentrums transportiert. Sogar in Baustoffen und Funktionstextilien werden Phasenumwandlungen eingesetzt, um Wärme gezielt zu puffern.

25. Doppelstunde



Abbildung 4.31: Latentwärme-Speicher als Handwärmer. Quelle: Wikipedia

4.6.2 Van-der-Waals Gas

Ein ideales Gas zeigt keinen Phasenübergang. Die Teilchen sind punktförmig und wechselwirken nicht miteinander. Die Zustandsgleichung $pv = k_B T$ mit v = V/N hat keine Singularitäten; Druck, Volumen und Temperatur hängen glatt voneinander ab. Ein reales Gas dagegen hat einen Übergang von einer Flüssigkeit zu einem Gas. Wie können wir einen solchen Phasenübergang thermodynamisch erklären?

Für ein reales Gas muss dazu die Zustandsgleichung ergänzt werden. Der Druck verringert sich durch die anziehende Wechselwirkung zwischen den Molekülen, und das Volumen durch das Eigenvolumen der Moleküle. Im Rahmen der statistischen Mechanik kann diese Ergänzung näherungsweise hergeleitet werden, mit dem Ergebnis

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T \tag{4.106}$$

Der positive Parameter a, der Kohäsionsdruck, beschreibt die attraktive Wechselwirkung zwischen den Molekülen, und das Kovolumen b ist das Eigenvolumen eines Moleküls. Diese Gleichung wurde 1873 von Johannes Diderik **Van der Waals** aufgestellt, und die beiden Parameter sind für die meisten Gase tabelliert. Wasser hat beispielsweise eine starke Wechselwirkung, sein Kohäsionsdruck a ist etwa 150 mal größer als der von Helium.

Der Van-der-Waals-Gleichung sieht man noch nicht direkt an, dass sie interessante neue Physik enthält. Druck, Volumen und Temperatur hängen immer noch stetig voneinander ab. Die Gleichung enthält jedoch ein unphysikalisches Ergebnis, das noch korrigiert werden muss. Um dies zu sehen, zeichnen wir

die Isothermen

$$p(v) = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2} \tag{4.107}$$

Die Abbildung 4.32 zeigt, dass diese Kurve unterhalb einer gewissen Tempe-



Abbildung 4.32: Isothermen des Van-der-Waals Gases mit der Maxwell-Konstruktion. Quelle: W. Kinzel, G. Reents, Physik per Computer

ratur T_c eine Schleife hat; der Druck wird dort mit zunehmendem Volumen stärker. Das ist jedoch unphysikalisch, denn man kann beweisen, dass die isotherme Kompressibilität immer positiv sein muss,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = -\frac{1}{V\kappa_T} < 0 \tag{4.108}$$

Wie können wir den unphysikalischen Teil der Gleichung ersetzen? Wir gehen davon aus, dass die Van-der-Waals-Gleichung bei tiefen Temperaturen sowohl eine Flüssigkeit als auch ein Gas beschreibt. Bei kleinem Volumen beschreibt die Isotherme eine Flüssigkeit, und bei großem Volumen ein Gas. Dazwischen haben wir einen Phasenübergang mit einer Koexistenz der flüssigen und gasförmigen Phase. Wie finden wir den Druck, bei dem dieser Übergang stattfindet, und wie müssen wir die Van-der-Waals-Gleichung damit korrigieren?

Die Antwort folgt aus zwei Ergebnissen, die wir schon hergeleitet haben. Zum einen haben am Koexistenzpunkt die Flüssigkeit und das Gas denselben Druck und dasselbe chemische Potenzial,

$$p_{\text{flüssig}} = p_{\text{gas}} = p_k, \quad \mu_{\text{flüssig}} = \mu_{\text{gas}} = \mu_k$$

$$(4.109)$$

Und zweitens verwenden wir die Duhem-Gibbs-Gleichung 4.72 auf der Isotherme dT = 0,

$$d\mu = v \, dp \tag{4.110}$$

Der Koexistenzdruck p_k wird somit durch die folgende Gleichung bestimmt

$$0 = \mu_{\text{gas}} - \mu_{\text{flüssig}} = \int_{\text{flüssig}}^{\text{gas}} d\mu = \int_{p_k}^{p_k} v(p) \, dp \tag{4.111}$$

Die folgende Skizze zeigt, was damit gemeint ist



Beim Koexistenzdruck muss gelten

$$\int_{A}^{E} = 0 = \int_{A}^{B} - \int_{C}^{B} - \int_{D}^{C} + \int_{D}^{E} = F_{ABC} - F_{CDE}$$
(4.112)

Die ersten beiden Integrale geben die Fläche ABC, und davon wird die Fläche CDE abgezogen. Damit haben wir die so genannte *Maxwell-Konstruktion* gefunden: der unphysikalische Teil der Van-der-Waals-Gleichung muss durch eine Gerade ersetzt werden, sodass die beiden Flächen oberhalb und unterhalb dieser Geraden denselben Inhalt haben, siehe Abbildung 4.32. Auf der Geraden existiert gleichzeitig die flüssige und gasförmige Phase, und durch Zufuhr von Wärme wird die Flüssigkeit bei konstantem Druck in das Gas umgewandelt und umgekehrt.

Metastabile Zustände

Die Schleife der Van-der-Waals-Gleichung beschreibt zwar nicht das thermische Gleichgewicht, aber sie hat dennoch eine interessante physikalische Bedeutung: Sie beschreibt **metastabile Zustände**. Erhöht man bei konstanter Temperatur den Druck eines Gases, so kann das Maximum der Vander-Waals Kurve erreicht werden, bevor das Gas in seine flüssige Phase kondensiert. Und umgekehrt, wenn der Druck einer Flüssigkeit erniedrigt wird, so kann das Minimum erreicht werden, bevor die Flüssigkeit siedet. Diesen Vorgang nennt man **Hysterese**. Es gibt demnach im p/T-Diagramm um die Koexistenzkurve herum einen Bereich, in dem ein unterkühltes Gas bzw. eine



Abbildung 4.33: Metastabile Zustände erzeugen eine Hysterese.

überhitzte Flüssigkeit erreicht werden können. Beim Kochen muss man aufpassen: unter sauberen Bedingungen – also nicht mit den Töpfen Ihrer WG – kann es zur Siedepunktsverzögerung kommen, das Wasser wird heißer als 100° C und geht dann explosionsartig in seine Dampfphase über. Wer eine Wasserflasche (aus Plastik!) in einen Gefrierschrank legt, beobachtet, dass auch unterhalb des Gefrierpunktes 0° C das Wasser flüssig bleibt; erst wenn man gegen die Flasche schlägt, entsteht plötzlich Eis. So kann Wasser bis zu -40° C abgekühlt werden!

Warum bleibt Wasser in einem metastabilen Zustand hängen, obwohl das Eis der thermisch stabile Zustand ist? Um zu kristallisieren werden Keime von kleinen Eiskristallen benötigt. Kristallisation geschieht durch Nukleation. Wenn das Wasser oder der Behälter nicht ganz sauber sind, so können sich Keime bilden, an denen die thermisch stabile Phase wächst. Auch durch Erschütterungen werden im unterkühlten Wasser kleine Keime von thermisch stabilem Eis erzeugt, die sich dann im ganzen Volumen ausbreiten.

Kritischer Punkt und Skaleneigenschaften

Wird die Temperatur erhöht, so nimmt der Volumensprung am Phasenübergang ab; die Schleife wird kleiner, bis schließlich die positive mit der negativen Krümmung verschmilzt und die Kurve p(V) monoton fallend ist. Oberhalb dieser kritischen Temperatur T_c gibt es keinen Übergang mehr von einer flüssigen zur gasförmigen Phase. Der kritische Punkt (p_c, T_c) ist somit definiert durch die verschwindende erste und zweite Ableitung der Kurve $p(v) = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2}$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_c,p_c} = -\frac{k_B T}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T_c,p_c} = \frac{2k_B T}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0$$

Die beiden Gleichungen geben

$$v_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad k_B T_c = \frac{8a}{27b}, \quad \frac{p_c v_c}{k_B T_c} = \frac{3}{8}$$
 (4.113)

Die eingerahmte Gleichung ist besonders interessant, denn sie enthält keinerlei Materialgrößen mehr. Für sämtliche Gase hat der Quotient aus der mechanischen und der thermischen Energie den Wert $3/8 \simeq 0.38$. Das ist zwar nur eine grobe Näherung aber immerhin: obwohl sich die kritischen Temperaturen von flüssigem Krypton und Helium um einen Faktor 40 unterscheiden, wird in beiden Fällen der Wert $\frac{p_c v_c}{RT_c} \simeq 0.30$ gemessen.⁸

Die skalierte Van-der-Waals-Gleichung enthält ebenso keine Materialkonstanten mehr. Werden Druck, Temperatur, und Volumen mit ihren kritischen Werten skaliert, $\tilde{p} = \frac{p}{p_c}$, $\tilde{T} = \frac{T}{T_c}$, $\tilde{v} = \frac{v}{v_c}$, so ergibt sich

$$\tilde{p} = \frac{8\tilde{T}}{3\tilde{v} - 1} - \frac{3}{\tilde{v}^2}$$
(4.114)

Die folgende Abbildung zeigt die Größe $\frac{pv}{k_BT}$ als Funktion des skalierten Druckes \tilde{p} oberhalb der kritischen Temperatur $\tilde{T} = 1$. Für das ideale Gas gilt $\frac{pv}{k_BT} = 1$, und Abweichungen davon entstehen durch die Wechselwirkung zwischen den Molekülen und deren Eigenvolumen. Am kritischen Punkt sagt die Van-der-Waals-Gleichung $\frac{pv}{k_BT} = \frac{3}{8}$. Wir sehen aus der Abbildung, dass für völlig verschiedene Gase die Messergebnisse auf einer universellen Kurve liegen. Das entspricht der Vorhersage der Van-der-Waals-Gleichung, die skalierte Form enthält keine Materialkonstanten mehr.

4.6.3 Kritische Phänomene

Beim Übergang von der flüssigen zur gasförmigen Phase ändert sich die Dichte sprungartig. Die Größe dieses Dichtesprunges nimmt ab, wenn das System sich dem kritischen Punkt nähert. Wie ändert sich der Dichtesprung im Limes $T \rightarrow T_c$ auf der Koexistenzkurve? Aus der Van-der-Waals-Gleichung

⁸Kobe, Lynn, Chem.Rev. 52,117 (1953)



Abbildung 4.34: Verschiedene Flüssigkeiten werden oberhalb des kritischen Punktes durch eine universelle Skalenfunktion beschrieben. Quelle: Stanley, Phase Transitions

kann man berechnen, dass dicht am kritischen Punkt der Dichtesprung Δn wie die Wurzel von $T_c - T$ verschwindet,

$$\Delta n \propto (T_c - T)^{\beta} \tag{4.115}$$

Die Van-der-Waals Theorie liefert den Exponenten $\beta = 0.5$. Diesen Wert erhält man auch aus einer ganz allgemeinen Theorie der Phasenübergänge, der sogenannten **Landau-Theorie**. Diese Theorie macht einen allgemeinen Ansatz für die Freie Energie der Dichtewellen in der Nähe des kritischen Punktes. Sie sieht so allgemeingültig aus, dass vor den 60er Jahren kein Physiker sie bezweifelt hat. Allerdings lieferten die Experimente den Wert $\beta \simeq 0.35$. Die Theoretiker meinten jedoch zu dieser Zeit, die Abweichung von der Landau-Theorie seien auf experimentelle Fehler zurückzuführen.

Aber auch die wenigen theoretischen exakt lösbaren Modelle zeigten einen andere Exponenten als von der Landau-Theorie vorhergesagt. Und genauere Experimente und Computer-Simulationen stimmten ebenfalls nicht mit dieser Theorie überein.

Nun vernachlässigt die Landau-Theorie die Fluktuationen der Dichte. Erst in den 70er Jahren gelang es, eine Theorie zu entwickeln, die diese Fluktuationen am kritischen Punkt beschrieb: die *Renormierungsgruppen-Theorie*, die

verwandt ist mit der Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen. Die Entwicklung dieser Theorie wurde 1982 mit einem Nobelpreis für Kenneth Wilson gewürdigt.

Die Renormierungsgruppen-Theorie liefert näherungsweise den experimentell gefundenen Wert $\beta \simeq 0.35$. Allerdings zeigt sie noch viel mehr: die kritischen Eigenschaften werden durch universelle Skalengesetze und universelle kritische Exponenten beschrieben, die für viele verschiedene Systeme dieselbe Form und denselben Wert haben. So findet man am kritischen Punkt eines Ferromagneten denselben Wert für den Exponenten β . Die kritischen Exponenten hängen nur von der Dimension und Symmetrie des Ordnungsparameters, Dichte oder Magnetisierung, und der Dimension des Raumes ab.

26. Doppelstunde

4.7 Statistische Mechanik und Strahlungsgesetze

Bisher haben wir nur die Thermodynamik eingeführt. Es ist eine Theorie, die die Physik am thermischen Gleichgewicht durch einige wenige Größen beschreibt. Dazu wurde die Entropie eingeführt, und zwei Hauptsätze wurden postuliert. Der erste besagt, dass Wärme eine Energieform ist, die in dem Erhaltungssatz der Energie auftritt. Der zweite postuliert, dass sich ein physikalisches System im thermischen Gleichgewicht immer einen Zustand sucht, der maximale Entropie hat.

Um die Thermodynamik anzuwenden, benötigen wir jedoch entweder die Entropie als Funktion der Energie, des Volumens und der Teilchenzahl, oder einige Zustandsgleichungen. Woher erhalten wir diese Informationen? Kann die Thermodynamik aus den Grundgleichungen der Physik hergeleitet werden? Aus der klassischen Mechanik, aus der Quantenmechanik und der Elektrodynamik?

Tatsächlich gibt es seit mehr als 100 Jahren eine Theorie, die die Grundgleichungen der Physik mit der Thermodynamik verknüpft, das ist die *Statistische Mechanik.* Diese Theorie gibt uns die Gasgesetze, die magnetischen Eigenschaften, Supraleitung, Strahlungsgesetze und die Eigenschaften von Quantengasen. Sie liefert uns nicht nur die Zustandsgleichungen, sondern zusätzlich mikroskopische Eigenschaften wie die Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen oder das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung im thermischen Gleichgewicht.

Zur statistischen Mechanik gibt es eigene Vorlesungen und zahlreiche Lehrbücher. In dieser Lehramtsvorlesung können wir aus Zeitgründen nur einen kleinen Einblick in diese Theorie geben. Am Beispiel der Strahlungsgesetze wollen wir

verstehen, wie aus der Quantenmechanik der elektromagnetischen Wellen das Stefan-Boltzmann-Gesetz hergeleitet wird, und sogar noch mehr: Wir werden das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung berechnen, die Planckverteilung und das Wiensche Verschiebungsgesetz.



Abbildung 4.35: Hintergrundstrahlung des Universums. Quelle: Wikipedia

Die Abbildung 4.35 zeigt das elektromagnetische Spektrum in unserem Universum. Die Daten wurden mit einem Satelliten aufgenommen, und die durchgezogene Kurve zeigt die Verteilung der Intensität als Funktion der Frequenz, die wir berechnen werden. Diese Kurve enthält nur einen Fitparameter, die Temperatur der Strahlung. In diesem Beispiel erhält man T = 2.725K, die Temperatur der Hintergrundstrahlung, für deren Entdeckung es im Jahr 1978 einen Nobelpreis für Arno Penzias und Robert Woodrow Wilson gab.

Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen Daten und der Theorie ist fantastisch! Sie ist so genau, dass für verschiedene Himmelsrichtungen die Schwankungen der Temperatur der Hintergrundstrahlung in einem Bereich von 10^{-4} K gemessen wurden. Da diese Strahlung etwa 380.000 Jahre nach dem Urknall entstanden ist, erhofft man sich aus der Himmelskarte der Temperaturen Informationen über die Entstehung des Universums.

4.7.1 Postulate der Statistischen Mechanik

Die statistische Mechanik benötigt neben den Grundgleichungen der Physik noch ein weiteres Postulat:

- Thermische Mittelwerte für festes Volumen V und feste Teilchenzahl N werden durch die Menge sämtlicher Vielteilchenzustände beschrieben, das so genannte *Ensemble*.
- Jeder Vielteilchenzustand k mit der Energie ε_k erhält eine Wahrscheinlichkeit

$$p_k = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon_k}{k_B T}} \tag{4.116}$$

Mit dieser Wahrscheinlichkeit werden thermische Mittelwerte berechnet, beispielsweise die Energie $E = \sum_{k} p_k \varepsilon_k$.

• Da Wahrscheinlichkeiten normiert sein müssen, gilt $\sum_k p_k = 1$; und daraus folgt der Normierungsfaktor

$$Z = \sum_{k} e^{-\frac{\varepsilon_k}{k_B T}}$$
(4.117)

Die Größe Z(T, V, N) nennt man auch **Zustandssumme**.

• Die Freie Energie ${\cal F}$ kann mit der Zustandssumme berechnet werden:

$$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \sum_k e^{-\frac{\varepsilon_k}{k_B T}}$$
(4.118)

Die Freie Energie enthält die gesamte thermodynamische Information. Gelingt es also, die Zustandssumme zu berechnen, so weiß man alles über die makroskopischen Eigenschaften eines Systems im thermischen Gleichgewicht.

Wir haben hier das so genannte *kanonische Ensemble* eingeführt. Dadurch wird nicht die Energie, sondern nur der Mittelwert der Energie durch die Temperatur vorgegeben. Wenn wir dagegen nur Vielteilchenzustände mit fester Energie betrachten, so gilt das schon erwähnte Gibbssche Postulat, das auf dem Grabstein von Ludwig Boltzmann eingemeißelt ist:

$$S(E, V, N) = k_B \ln W \tag{4.119}$$

Dabei ist W die Anzahl der Vielteilchenzustände mit fester Energie E.

4.7.2 Photonen

Wie sehen die Vielteilchenzustände von elektromagnetischen Wellen in einem Kasten mit einem Volumen $V = L^3$ aus? Zunächst sagen uns die Maxwellgleichungen, dass wir stehende Wellen mit einem Wellenvektor \vec{k} und einer

Frequenz $\omega_k = c |\vec{k}|$ erhalten. Die Wellenlänge muss in den Kasten passen, und somit erhalten wir quantisierte Wellenvektoren $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y, m_z)$.

Die Maxwellgleichungen erlauben jede beliebige Amplitude dieser Schwingungsmoden. Das führt jedoch zu einer unendlichen Energie der elektromagnetischen Wellen im thermischen Gleichgewicht. Am Ende des 19. Jahrhunderts haben die Physiker das schon erkannt, und Max Planck hat versucht, mit der Einführung von Energiepaketen der Größe $\hbar\omega$ dieses Rätsel zu lösen. Er hat damit nicht nur eine Übereinstimmung mit den Experimenten gefunden, sondern auch den Anstoß für die Entwicklung der Quantentheorie gegeben.

Heute wissen wir aus der Quantenelektrodynamik, dass die Energie jeder Mode \vec{k} mit der Frequenz $\omega = c |\vec{k}|$ durch einen harmonischen Oszillator mit der Energie $\varepsilon = \hbar \omega (n + \frac{1}{2})$ beschrieben wird. Dabei ist *n* eine ganze Zahl n = 0, 1, 2, ... und kann als Anzahl der Photonen in dieser Mode aufgefasst werden.

Ein Vielteilchenzustand der elektromagnetischen Wellen ist demnach die Menge aller möglichen Wellen-Vektoren \vec{k} , wobei jede Mode eine entsprechende Anzahl von Photonen $n(\vec{k})$ enthält. Alternativ kann man die quantisierten Wellen auch als ein Photonengas auffassen, das mit der Wand Energie austauscht und sich im thermischen Gleichgewicht befindet. Die Temperatur des Gases ist demnach dieselbe wie die Temperatur des Behälters. Ein solches System wird auch *Schwarzkörperstrahler* genannt.

4.7.3 Strahlungsgesetze

Wir haben somit die Vielteilchenzustände identifiziert. Damit müssen wir nun noch die Zustandssumme berechnen. Das ist jedoch relativ einfach, denn die gesamte Zustandssumme ist das Produkt der Zustandssummen für jede Mode. Wir benötigen also nur die Zustandssumme $Z(\omega)$ einer einzelnen Mode mit der Energie $\varepsilon = \hbar \omega n$. Dabei vernachlässigen wir die Ruheenergie $\hbar \omega/2$, denn eine Energieverschiebung beeinflusst nicht die thermischen Eigenschaften.

In jeder Mode ist die Summe über alle Zustände gleich der Summe über die Anzahl der Photonen,

$$Z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{k_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}$$
(4.120)

Die Summe ist eine geometrische Reihe und kann deshalb leicht ausgeführt

werden. Die mittlere Anzahl der Photonen wird durch das mit dem Boltzmann Faktor gewichtete Mittel bestimmt

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n} n e^{-\frac{\hbar \omega n}{k_B T}}$$
(4.121)

Diese Summe berechnen wir mit einem Trick:

$$\frac{d}{dx}e^{-xn} = -ne^{-xn}, \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_BT}$$

$$\langle n \rangle = -\frac{d}{dx}\ln Z = \frac{d}{dx}\ln(1 - e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1} \Rightarrow \qquad \langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega\langle n \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1}$$

$$(4.122)$$

Dieses Strahlungsgesetz hat Max Planck im Jahr 1900 hergeleitet, und damit hat er die Grundlage für die Quantenphysik gelegt. Das Gesetz gibt die mittlere Energie jeder Mode mit der Frequenz ω an. Wenn die Energie $\hbar\omega$ eines Photons in dieser Mode viel größer als die thermische Energie k_BT ist, so nimmt die mittlere Energie exponentiell mit der Frequenz ab. In der klassischen Physik dagegen hat die mittlere Energie unabhängig von der Frequenz den Wert k_BT , was zu einer Ultraviolett-Katastrophe und zu einer unendlichen Gesamtenergie führen würde, im Widerspruch zu den Experimenten.



Abbildung 4.36: Spektrum der Sonnenstrahlung. Quelle: Wikipedia

Woher kommt nun das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung und das Stefan Boltzmann Gesetz? Die Gesamtenergie des schwarzen Körpers

erhalten wir durch die Summe der Planck Energie über alle Moden k,

$$E = \sum_{\vec{k}} \langle \varepsilon_{\vec{k}} \rangle \tag{4.123}$$

Dabei sind die Werte von \vec{k} so dicht verteilt, dass wir die Summe durch ein Integral über den gesamten k-Raum ersetzen können. Mit $\omega = ck$ erhalten wir

$$\sum_{\vec{k}} \dots \longrightarrow \int_0^\infty dk \, 4\pi k^2 \dots \longrightarrow \int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \dots \longrightarrow \int_0^\infty d\omega \, D(\omega) \dots \quad (4.124)$$

wobei wir die Vorfaktoren weggelassen haben. Die **Zustandsdichte** der Photonen ist somit proportional zum Quadrat der Frequenz, $D(\omega) \propto \omega^2$, wobei $D(\omega)d\omega$ die Anzahl der Moden im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$ ist. Damit erhalten wir die gesamte Energie der elektromagnetischen Strahlung

$$E \propto \int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \tag{4.125}$$

Mit der Substitution $x = \frac{\hbar \omega}{k_B T}$ und unter Berücksichtigung sämtlicher Faktoren erhalten wir das **Stefan-Boltzmann-Gesetz**

$$E = \frac{4\sigma}{c}T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \simeq 6 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$
(4.126)

Die Gesamtenergie E können wir auch als Integral über eine Energiedichte $e(\omega)$ schreiben, wobei $e(\omega) d\omega$ die Energie im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$ ist. Mit der vorigen Gleichung erhalten wir

$$e(\omega) \propto \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$
 (4.127)

Das ist die **Planck-Verteilung**, die Dichte der Intensität der elektromagnetischen Strahlung als Funktion der Frequenz. Diese Gleichung enthält nur einen Parameter, die Temperatur T. Die gemessenen Daten werden mit diesem Parameter gefittet, und man erhält T = 2.75K für die Hintergrundstrahlung und T = 5900K für das Licht der Sonne.

Bei welcher Frequenz liegt das Maximum dieser spektralen Verteilung? Dazu suchen wir das Maximum der Funktion $x^3/(e^x - 1)$ und erhalten das **Wiensche Verschiebungsgesetz**

$$\hbar\omega_{\rm max} \simeq 2.82 \, k_B T \tag{4.128}$$

Das Verschiebungsgesetz hatte Wilhelm Wien 1893 in Berlin entdeckt, also lange vor der Herleitung mithilfe der Quantenmechanik. Von 1900-1919 hatte Wien als Nachfolger von Wilhelm Conrad Röntgen einen Lehrstuhl an der Universität Würzburg inne, danach wurde er der Nachfolger von Röntgen an der LMU München.

Das Maximum der Spektrallinien-Verteilung der Sonne liegt im sichtbaren Bereich. Die Biologie hat es somit geschafft, den Sehprozess an die Umwelt optimal anzupassen.

4.8 Elektromagnetische Strahlung der Erde

Das Stefan Boltzmann Gesetz zeigt den Zusammenhang zwischen der Energiedichte und der Temperatur der elektromagnetischen Strahlung. Schon in der Elektrodynamik hatten wir gesehen, dass die Energiedichte mit dem Energiestrom zusammenhängt. Wenn wir also wissen, wie viel Energie von der Sonne auf die Erde pro Zeit abgestrahlt wird, so können wir die Temperatur der Erde abschätzen. Oder wir können abschätzen, um wie viel sich die Temperatur der Erde erhöht, wenn ein Teil der abgestrahlten Wärme durch Gase in der Atmosphäre wieder auf die Erde zurück reflektiert wird.

4.8.1 Entropiefluss durch die Erde

Warum gibt es Ordnung auf der Erde? Wie konnte Leben entstehen? Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Entropie zunimmt, und die Entropie ist ein Maß für die Unordnung.

Der Hauptsatz bezieht sich aber nur auf die Gesamtentropie. Danach wird sich die Entropie des gesamten Universums immer weiter erhöhen. Bei Teilen des Universums, beispielsweise bei der Erde, kann das aber ganz anders aussehen. Durch den Fluss der Energie von der Sonne in die Erde und danach wieder in das Universum nimmt die Entropie auf der Erde ab. Das wollen wir kurz abschätzen.

Die Erde erhält von der Sonne elektromagnetische Strahlung in Form von Licht mit einer Temperatur von etwa $T_s \simeq 5800$ K. Pro Zeiteinheit muss aber die Erde wieder Energie abgeben, denn sie heizt sich ja nicht ständig auf. Die Erde gibt somit elektromagnetische Strahlung in Form von Wärme mit einer Temperatur von etwa $T_e \simeq 300$ K ab. Die Änderung der Entropie der Erde wollen wir mit der Formel Q = TS abschätzen.

Wir erhalten somit für die Energie und Entropiebilanz pro Zeiteinheit

$$\begin{aligned} Q_s &= Q_e = Q \\ S_s &= \frac{Q}{T_s}, \quad S_e = \frac{Q}{T_e}, \Rightarrow \frac{S_e}{S_s} = \frac{5800}{300} \end{aligned}$$

Es wird also von der Erde wesentlich mehr Entropie abgestrahlt als aufgenommen. Somit widerspricht das Entstehen von Ordnung und Leben nicht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

4.8.2 Temperatur der Erde

Das Stefan Boltzmann Gesetz gibt die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung. Die Dichte P des Energiestroms erhalten wir entweder mit Gleichung ref oder durch

$$P = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche Zeit}} = \frac{\text{Energie Weg}}{\text{Volumen Zeit}} = \frac{1}{4} \frac{E}{V} c = \sigma T^4$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ ergibt sich durch geometrische Überlegungen, denn die Sonne strahlt ja nicht überall senkrecht auf die Erdoberfläche.

Nun können wir die Temperatur der Erde durch die mittlere eingestrahlte Energie des Sonnenlichts abschätzen. Von der Sonne erhalten wir im Mittel $P_s \simeq 500 \frac{W}{m^2}$. Dieser Betrag wird wieder von der Erde abgestrahlt, daraus folgt

$$P_s = P_e = \sigma T^4 \Rightarrow T \simeq 300 K$$

4.8.3 Treibhaus-Effekt

Wie ändert sich die Temperatur der Erde durch eine Gasschicht in der Atmosphäre, die einfallendes Licht durchlässt aber 10 % der Wärme reflektiert? P_e sei die abgestrahlte Wärme außerhalb der Atmosphäre; es gilt $P_e = P_s = \sigma T^4$, wobei $T \simeq 300K$ die Erdtemperatur ohne Gasschicht ist. Auf der Erdoberfläche erhalten wir mit Gleichung ref den Wärmefluss $\tilde{P} = \sigma (T + \Delta T)^4$. Im Gleichgewicht dringt 90 % der Strahlung auf der Erdoberfläche nach Außen, das gibt

$$0.9\tilde{P} = P_e \Rightarrow 0.9(T + \Delta T)^4 = T^4 \Rightarrow \Delta T \simeq 8K$$

Wird somit 10 % der abgestrahlten Wärme durch eine zusätzliche Gasschicht reflektiert, so erhöht sich die Temperatur der Erde um 8 Grad.

Ende der 27. Doppelstunde Besprechung der Altklausur in der 28. Doppelstunde