Übungen zur Vorlesung Thermodynamik und Elektrodynamik

Prof. Dr. Wolfgang Kinzel SS 2019

Aufgabe 4: Ladungsdichten mit Symmetrie

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das zugehörige Potential ϕ einer homogen geladenen Kugel vom Radius R mit der Ladungsdichte ρ_0.
Hinweis: Das $\vec{E}$-Feld ist aus Symmetriegründen radial gerichtet und sein Betrag hängt nur von r ab, also $\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\,\vec{e}_r$. Das gesuchte $E(r)$ lässt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes $\int_V \mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ bestimmen, indem man für V eine Kugel vom Radius r wählt.

b) Finden Sie ähnliche Symmetrieargumente, um Feld und Potential einer homogen geladenen unendlichen Ebene mit der Flächenladungsdichte σ_0 und einer homogen geladenen unendlichen Geraden mit der Linienladungsdichte τ_0 zu berechnen. Als Ergebnis sollten Sie erhalten:

$$\begin{aligned} \phi_{Ebene}(r) &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\, r + \phi_0 \qquad (\,r = \text{Abstand von der Ebene}\,)\,, \\ \phi_{Linie}(r) &= -\frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} + \phi_0 \quad (\,r = \text{Abstand von der Geraden}\,)\,. \end{aligned}$$

Dabei ist ϕ_0 eine Konstante, die den Wert des Potentials am Ort $r = 0$ bzw. $r = r_0$ festlegt.

Aufgabe 5: Geladene Kugelschale und elektrostatische Energie *(Staatsexamen H14)*

Bearbeiten Sie bitte nur die Aufgabenteile a) bis e).

Eine Kugelschale mit innerem Radius R_i und äußerem Radius R_a sei homogen geladen. Die Gesamtladung sei q.

a) Geben Sie die konstante Ladungsdichte ρ als Funktion der beiden Radien der Kugelschale an.

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}\,(\vec{r})$ im gesamten Raum.

c) Die elektrostatische Energiedichte ist bekanntlich $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2$.
Berechnen Sie die Gesamtenergie $U(R_i, R_a)$ als Funktion der beiden Radien.

d) Welchen Wert hat die Gesamtenergie für eine infinitesimal dünne Kugelschale ($R_i \to R_a$) und welchen für eine Vollkugel ($R_i \to 0$)?

e) Diskutieren Sie den Grenzfall einer Punktladung, $0 < R_i < R_a \to 0$.

Die geladene Kugelschale sei nun metallisch.

f) Berechnen Sie die Ladungsdichte.

g) Berechnen Sie die Energie $U(R_i, R_a)$.

$\Longrightarrow$ Seite 2

Aufgabe 6: Ladungsdichten und δ-Funktion

Berechnen Sie für die im Folgenden angegebenen Ladungsdichten $\rho(\vec{x})$ die Ladungsmenge $Q(R)$, die in einer Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt im Ursprung enthalten ist, und klären Sie, ob $\lim\limits_{R\to\infty} Q(R)$ endlich ist:

a) $\rho(\vec{x}) = \dfrac{\rho_0}{1 + \alpha^2\, \vec{x}\cdot\vec{x}}\,,$

b) $\rho(\vec{x}) = \sigma_0\, \delta(z)\, \mathrm{e}^{-\alpha^2\, r^2}\,,$

c) $\rho(\vec{x}) = \tau_0\, \delta(x)\, \delta(y)\,,$

d) $\rho(\vec{x}) = \dfrac{2\,q}{\pi R^2}\, \delta(2r - R)\,.$

Dabei sind $q\,, \alpha,\ \rho_0,\ \sigma_0$ und τ_0 positive Konstanten, $\vec{x} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$ und $r = |\vec{x}|$.

$\boxed{\text{Besprechung am 08.05.2019}}$

Web-Seite der Vorlesung:
https://www.physik.uni-wuerzburg.de/tp3/lehre/thermodynamik-und-elektrodynamik/