Georg Reents

Einführung in die Funktionalanalysis

Literatur:

1) S. Großmann, *Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendung in der Physik*
AULA Verlag (Taschenbuch)

2) M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*
I Functional Analysis
Academic Press

1. Der Hilbertraum

1.1. Definition

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist charakterisiert durch die folgenden drei Eigenschaften:

1) $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (oder den reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

   D. h. mit $f, g \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

   $f + g \in \mathcal{H}$ (abelsche Gruppe) , $\alpha\, f \;\in \mathcal{H}$, es gelten die Distributivgesetze und $\alpha(\beta\, f) = (\alpha\,\beta) f$.

2) Für je zwei Elemente $f, g \in \mathcal{H}$ ist ein inneres Produkt $\langle f, g\rangle$ erklärt. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist eine Abbildung von $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) mit

   (i) $\langle f, f\rangle$ ist reell und ≥ 0 , $\langle f, f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$,

   (ii) $\langle f, g + h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$,

   (iii) $\langle f, \alpha\, g\rangle = \alpha\,\langle f, g\rangle$,

   (iv) $\langle g, f\rangle = \langle f, g\rangle^*$ (konjugiert komplex) .

   (inneres Produkt = Skalarprodukt)

3) $\mathcal{H}$ ist vollständig (auch: abgeschlossen) bezüglich der durch $\|\, f\, \| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ definierten Norm.

Folgerungen und Erläuterungen:

Aus 1) und 2) folgt:

$0 \cdot f = 0\ (\in \mathcal{H}\ )\ \Rightarrow \langle f, 0\rangle = \langle 0, f\rangle = 0$ für alle $f \in\ \mathcal{H}$,

$\langle f, \alpha\, g + \beta\, h\rangle = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle f, h\rangle$,

$\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$, und (Achtung!) $\langle \alpha\, f, g\rangle = \alpha^*\,\langle f, g\rangle$.

Definition: Zwei Vektoren $f, g \in \mathcal{H}$ heißen orthogonal, falls $\langle f, g\rangle = 0$. Eine Menge $\{f_i\}$ von Vektoren $f_i \in \mathcal{H}$ heißt Orthonormalsystem, wenn

$$\langle f_i, f_j\rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } \ i = j \\ 0 & \text{für } \ i \neq j \end{array} \right\} = \delta_{ij} \ .$$

Satz (Pythagoras): Es sei $\{f_n\}_{n=1}^N$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$

$$\| \ f \ \|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f_n, f\rangle|^2 + \ \| \ f - \sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n \ \|^2 \ \ .$$

Beweis: Man schreibe f als

$$\sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n + \left(f - \sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n \right) \ .$$

Mit den Eigenschaften des inneren Produkts zeigt man, dass

$$\sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n \ \text{ und } \ f - \sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n$$

orthogonal sind. Daraus ergibt sich die obige Gleichung.

Aus diesem Satz folgt sofort:

Die Besselsche Ungleichung:

$\{f_n\}_{n=1}^N$ sei ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$

$$\| \ f \ \|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle f_n, f\rangle|^2 \ .$$

Beweis: Klar, wegen $\| \ f - \sum_{n=1}^N \langle f_n, f\rangle f_n \ \|^2 \geq \ 0$.

Und weiter:

Die Schwarzsche Ungleichung: $\quad |\langle f, g\rangle| \ \leq \| \ f \ \| \| \ g \ \|$ für alle $f, g \in \mathcal{H}$.

Beweis: Für $f = 0$ ist die Behauptung richtig. $f \neq 0 \ \Rightarrow \left\{ \frac{f}{\|f\|} \right\}$ ist Orthonormalsystem (ein Element). $\Rightarrow \| \ g \ \|^2 \geq \ |\langle \frac{f}{\|f\|}, g\rangle|^2 \ \ \Rightarrow \| \ f \ \|^2 \| \ g \ \|^2 \geq \ |\langle f, g\rangle|^2$.

Jetzt zu 3) :

Definition: Eine Norm ist eine Abbildung, $\| \cdot \|$, eines Vektorraumes $\mathcal{X}$ in die rellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit

a) $\| \ f \ \| \geq \ 0$ für alle $f \in \mathcal{X}$ und $\| \ f \ \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$,

b) $\| \ \alpha f \ \| = |\alpha| \ \| \ f \ \|$ für alle $f \in \mathcal{X}$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$),

c) $\| \ f + g \ \| \leq \| \ f \ \| + \| \ g \ \|$ (Dreiecksungleichung) .

Satz: Durch $\| f \| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ wird auf $\mathcal{H}$ eine Norm definiert.
Beweis: a) und b) folgen unmittelbar aus (i) bis (iv) des inneren Produkts.
Zu c):

$$\begin{aligned} \| f+g \|^2 = \langle f+g, f+g\rangle &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + 2\,Re\,\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \\ &\leq \langle f,f\rangle + 2|\langle f,g\rangle| + \langle g,g\rangle \\ &\leq \| f \|^2 + 2 \| f \| \| g \| + \| g \|^2 \end{aligned}$$

also: $\| f+g \|^2 \leq (\| f \| + \| g \|)^2$.

Definition: $\mathcal{X}$ sei ein Vektorraum mit einer Norm $\| \cdot \|$. (1) Man sagt: Eine Folge von Vektoren $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{X}$ konvergiert gegen $f \in \mathcal{X}$, wenn $\| f - f_n \| \to 0$ mit $n \to \infty$.
(2) Eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{X}$ heißt Cauchy–Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass $\| f_n - f_m \| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Definition: Ein Vektorraum $\mathcal{X}$ mit einer Norm $\| \cdot \|$ heißt vollständig (auch: abgeschlossen), wenn es zu jeder Cauchy–Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{X}$ ein $f \in \mathcal{X}$ gibt, so dass $\{f_n\}$ gegen f konvergiert. In Zeichen $f_n \to f$ für $n \to \infty$.

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist in diesem Sinne ein vollständiger Raum. Jede Cauchy–Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}$ hat ein Grenzelement $f \in \mathcal{H}$.

Definition: Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ heißt dicht in $\mathcal{H}$, wenn es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{M}$ gibt mit $f_n \to f$ für $n \to \infty$, kurz, wenn der Abschluss $\overline{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ gleich $\mathcal{H}$ ist ($\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{H}$). Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ z. B. ist dicht in $\mathbb{R}$.

1.2. Beispiele und ein Gegenbeispiel

1.) $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3 = \{x \mid x = (x_1, x_2, x_3)\,,\ x_j \in \mathbb{R}\}$ ist ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Addition komponentenweise, $\alpha x = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit $y = (y_1, y_2, y_3)$ sei $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^3 x_j\, y_j$. $\Rightarrow \| x \| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j^2}$ (Länge von x) .

2.) $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ ist ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$:
$\mathbb{C}$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$, für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $\langle z, w\rangle = z^* w = \langle w, z\rangle^*$. $\Rightarrow \| z \| = \sqrt{z^* z} = |z|$ (Absolutbetrag). $\mathbb{C}$ ist vollständig bezüglich dieser Norm.

3.) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ = Menge aller n–Tupel von komplexen Zahlen $= \{z \mid z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), z_j \in \mathbb{C}\}$. Mit $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ sei $z+w = (z_1+w_1, \ldots, z_n+w_n)$ und $\alpha z = (\alpha\, z_1, \alpha\, z_2, \ldots, \alpha\, z_n)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$. Das innere Produkt ist definiert durch $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j^* w_j$. Man rechnet leicht nach, dass die Bedingungen (i) bis (iv) der Definition des Skalarprodukts erfüllt sind. $\mathbb{C}^n$ ist vollständig bezüglich der durch $\| z \|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ definierten Norm.

4.) Der Raum ℓ_2 :

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \text{Menge der Folgen } \{f_n\}_{n=1}^\infty \text{ von komplexen Zahlen mit } \sum_{n=1}^\infty |f_n|^2 < \infty, \\ &= \left\{ f \mid f = \{f_n\}_{n=1}^\infty\,,\ f_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^\infty |f_n|^2 < \infty \right\} . \end{aligned}$$

Vektorraumstruktur wie bei $\mathbb{C}^n$. Ist mit $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $g = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch $f + g = \{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$? Dazu:

$$|f_n + g_n|^2 \leq (|f_n| + |g_n|)^2 \leq (|f_n| + |g_n|)^2 + (|f_n| - |g_n|)^2 = 2|f_n|^2 + 2|g_n|^2$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n + g_n|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 < \infty \, .$$

Inneres Produkt: $\langle f, g\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \, g_n$

Diese Definition ist sinnvoll (die Summe konvergiert, sogar absolut), denn wegen $0 \leq (|f_n| - |g_n|)^2 = |f_n|^2 - 2|f_n||g_n| + |g_n|^2 \;\Rightarrow\; |f_n^* \, g_n| = |f_n||g_n| \;\leq\; \frac{1}{2}|f_n|^2 + \frac{1}{2}|g_n|^2$.

ℓ_2 ist vollständig bezüglich der durch $\| \; f \; \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$ definierten Norm.

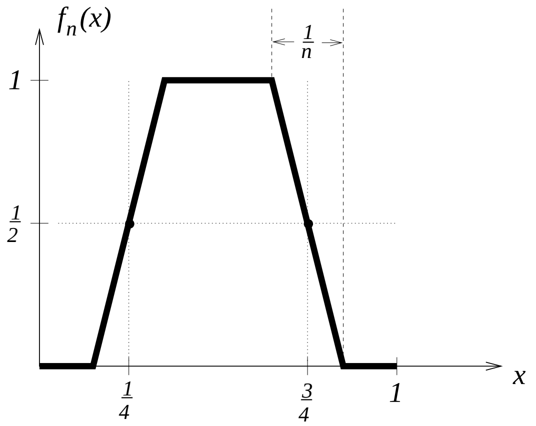
5.) Ein Gegenbeispiel:

$C[a, b]$ = Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen über dem endlichen Intervall $[a, b]$.

$f(x),\; g(x) \in C[a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \; (f + g)(x) := f(x) + g(x) \in C[a, b]$,
$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \in C[a, b] \;\Rightarrow C[a, b]$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Inneres Produkt: $\langle f, g\rangle := \int_a^b f^*(x) g(x) dx$ erfüllt (i) bis (iv) .

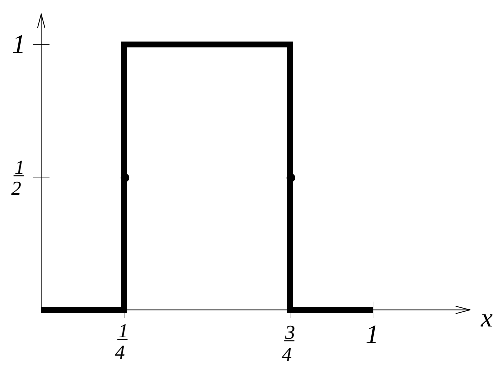
Aber $C[a, b]$ ist nicht vollständig bezüglich $\| \; f \; \|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$. Sei nämlich $[a, b] = [0, 1]$ und $f_n(x)$ so:



$f_n(x) \in C[0, 1]$ für alle $n \geq 2$.

$\| \; f_n - f_m \; \|^2 = \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \;\leq\; 2 \max(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \;\rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow \; \{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ ist Cauchy–Folge,
aber die ”Grenzfunktion”
ist nicht stetig.



Es gibt keine stetige Funktion $f(x)$, so dass $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx \;\rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$.
$\Rightarrow \; C[0, 1]$ (auch $C[a, b]$) ist nicht vollständig bezüglich obiger Norm.

1.3. Die L^2–Räume

Ein möglicher Weg, dieses Problem zu beheben, ist der Verzicht auf die Stetigkeit. Dann muss man allerdings zusätzlich fordern, dass $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ ist. Dabei tauchen zwei neue Probleme auf:

1.) Als Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen können sich unstetige Funktionen $f(x)$ ergeben, so dass $|f(x)|^2$ nicht einmal mehr im Riemannschen Sinne integrabel ist.

    Dieses Problem hat man gelöst, indem man einen neuen Integralbegriff, nämlich das Lebesgue–Integral eingeführt hat.

2.) Es gibt Funktionen $f(x) \not\equiv 0$ (z. B. $f(x) = 1$ an endlich vielen Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ im Intervall $[a, b]$ und $f(x) = 0$ sonst), für die $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ ist. Dies ist ein Konflikt mit der Forderung (i) der Definition des inneren Produkts. Welches ist das Nullelement im Vektorraum?

Aus diesem Grund trifft man folgende

Definition: Zwei Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ heißen äquivalent, wenn gilt $f(x) = h(x)$ fast überall (f. ü.), d. h. die Menge derjenigen Punkte x, für die $f(x) \neq h(x)$ ist, hat das Maß 0 .

f, bzw. g sei die Äquivalenzklasse, in der $f(x)$, bzw. $g(x)$ enthalten ist. Unter der Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ und $\int_a^b |g(x)|^2 dx < \infty$ kann man zeigen:

$\langle f, g\rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)dx$ existiert und ist unabhängig von den gewählten Repräsentanten.

Bemerkung: Wenn $f(x)$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, dann auch im Lebesgue–Sinne, und es gilt

$$\int_{Riemann} f(x)dx = \int_{Lebesgue} f(x)dx \ .$$

Definition:

$L^2[a, b] = \{f \mid f =$ Äquivalenzklasse von f. ü. gleichen, komplexwertigen (Lebesgue–messbaren) Funktionen über $[a, b]$ mit $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$,

Analog:

$L^2(\mathbb{R}) = \{f \mid f = \dots$ komplexwertige Funktionen über $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty\}$, und

$L^2(\mathbb{R}^3) = \{f \mid f = \dots$ komplexwertige Funktionen über $\mathbb{R}^3$ mit $\int_{\mathbb{R}^3} |f(\vec{x})|^2 d^3\vec{x} < \infty\}$.

Inneres Produkt: $\langle f, g\rangle := \int f^*(x)g(x)dx$.

Bemerkungen:

1.) Man nennt die Elemente der L^2–Räume ”quadratintegrable Funktionen”. Genaugenommen sind es Äquivalenzklassen.

2.) Die L^2–Räume sind vollständig bezüglich $\| f \|^2 = \int |f(x)|^2 dx$ und damit Hilberträume.

3.) Die Konvergenz $f_n \to f$ ist im Allgemeinen keine punktweise Konvergenz in dem Sinne, dass etwa $f_n(x) \to f(x)$ für alle x, sondern eine ”Konvergenz im Mittel”, d. h. $\int |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0$.

4.) Folgende Funktionenklassen sind dicht in L^2 :

Die stetigen Funktionen (aus L^2),

die differenzierbaren Funktionen (aus L^2),

$\vdots$

1.4. Vollständige Orthonormalsysteme

Definition: Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt separabel, wenn es in $\mathcal{H}$ eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Im folgenden sei immer angenommen, dass $\mathcal{H}$ separabel ist. Es gibt aber auch nicht–separable Hilberträume.

Definition: Ein Orthonormalsystem $\{x_n\}_{n\in I}$ heißt vollständig, wenn aus $\langle x_n, f\rangle = 0$ für alle $n \in I$ folgt $f = 0$.

Satz: Es sei $\{x_n\}_{n\in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{n\in I} \langle x_n, f\rangle x_n \qquad \text{und} \qquad (*) \;\; \| f \|^2 = \sum_{n\in I} |\langle x_n, f\rangle|^2 \; .$$

Beweis: (Reed, Simon: Theorem II.6)

Gleichung $(*)$ nennt man die Parsevalsche Gleichung.

Umkehrung (für $I = \mathbb{N}$) :

Es sei $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge komlexer Zahlen mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. Dann wird durch

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, x_n$$

ein Vektor $\in \mathcal{H}$ definiert. $\alpha_n = \langle x_n, f\rangle$ und $\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Bemerkung:

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt auch orthonormale Basis.
Die Koeffizienten $\langle x_n, f\rangle$ nennt man die Entwicklungskoeffizienten von f bezüglich der Basis $\{x_n\}$.

Definition: Die Dimension eines (separablen) Hilbertraumes $\mathcal{H}$, $dim\mathcal{H}$, ist abzählbar unendlich, wenn eine (und damit jede) Basis von $\mathcal{H}$ unendlich viele Elemente enthält,
sie ist gleich N (endlich), wenn die Basis aus N Elementen besteht.

Folgerung: $dim\mathcal{H}$ = Maximalzahl der linear unabhängigen Vektoren $\in \mathcal{H}$.

1.5. Direkte Summe und Tensorprodukt von Hilberträumen

Die direkte Summe zweier Hilberträume

$\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien Hilberträume. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{f \mid f = (f_1, f_2),\ f_1 \in \mathcal{H}_1,\ f_2 \in \mathcal{H}_2\} \\ \text{mit}\ \ \alpha\, f &= (\alpha\, f_1, \alpha\, f_2)\ ,\ \ f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2) \\ \text{und}\quad \langle f, g\rangle &= \langle f_1, g_1\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle f_2, g_2\rangle_{\mathcal{H}_2} \end{aligned}$$

ein Hilbertraum.
$\mathcal{H}$ heißt direkte Summe von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und wird mit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

bezeichnet. Es gilt $dim(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = dim\mathcal{H}_1 + dim\mathcal{H}_2$.

Satz: $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum und $\mathcal{M}_1$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Dann kann man jedes $f \in \mathcal{H}$ eindeutig zerlegen als

$$f = f_1 + f_2 \ \text{ mit }\ f_1 \in \mathcal{M}_1 \ \text{ und }\ f_2 \in \mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{M}_1^\perp\ .$$

Dabei ist $\mathcal{M}_1^\perp = \{g \in \mathcal{H} \mid \langle g, f\rangle = 0$ für alle $f \in \mathcal{M}_1\}$ der zu $\mathcal{M}_1$ orthogonale Teilraum.
Beweis: $\mathcal{M}_1$ ist selbst ein Hilbertraum und enthält also eine Orthonormalbasis $\{y_j\}_{j\in J}$, die $\mathcal{M}_1$ aufspannt. Sei $f_1 = \sum\limits_{j\in J} \langle y_j, f\rangle\, y_j$ und $f_2 = f - f_1$.

$$\Rightarrow 1.)\ \ f_1 \in \mathcal{M}_1 \ \text{ und }\ 2.)\ \ \langle y_j, f_2\rangle\ = 0\ \text{ für alle }\ j \in J \ \ \Rightarrow\ \ f_2 \in \mathcal{M}_1^\perp = \mathcal{M}_2\ .$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Bemerkungen:

1.) $\mathcal{H}$ ist isomorph zu $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

2.) Die direkte Summe von N Hilberträumen $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n = \{f \mid f = (f_1, f_2, \ldots, f_N),\ f_n \in \mathcal{H}_n\}$$

ist unmittelbar klar.

Das Tensorprodukt zweier Hilberträume

$\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien Hilberträume mit Orthonormalbasen $\{x_i\}_{i\in I}$ bzw. $\{y_j\}_{j\in J}$. Wir bilden die formalen Paare $x_i \otimes y_j$ und die Linearkombinationen $\sum\limits_{i\in I, j\in J} \alpha_{ij}\ x_i \otimes y_j$ mit $\alpha_{ij}\ \in \mathbb{C}$ und $\sum\limits_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$.

$$\mathcal{H} = \left\{ f \mid f = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\ x_i{\otimes}y_j\ ,\ \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 < \infty \right\}\ \text{ bildet}$$

$$\text{mit}\ \ \left\langle \sum_{i,j} \alpha_{ij}\ x_i{\otimes}y_j\ , \sum_{k,l} \beta_{kl}\ x_k{\otimes}y_l \right\rangle := \sum_{i,j} \alpha_{ij}^*\, \beta_{ij}$$

einen Hilbertraum, in dem $\{x_i{\otimes}y_j\}_{i\in I, j\in J}$ eine orthonormale Basis ist.

Bemerkungen:

1.) Das Ergebnis hängt nicht von den gewählten Orthonormalbasen ab.

2.) Mit $\alpha_{ij} = \gamma_i \, \delta_j$ und $\sum_i |\gamma_i|^2 < \infty, \;\; \sum_j |\delta_j|^2 < \infty$ erkennt man:

$$\mathcal{H} \ni f_1 \otimes f_2 \;\text{ mit }\; f_1 \in \mathcal{H}_1,\; f_2 \in \mathcal{H}_2 \;\text{ und}$$
$$\langle f_1 \otimes f_2,\, g_1 \otimes g_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \cdot \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \;.$$

3.) $\mathcal{H}$ heißt Tensorprodukt von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und wird bezeichnet mit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Für die Dimension gilt $dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = dim\mathcal{H}_1 \cdot dim\mathcal{H}_2$.

4.) Auch das Tensorprodukt lässt sich verallgemeinern auf mehr als zwei ”Faktoren”.

2. Lineare Operatoren im Hilbertraum

Definition: Ein linearer Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung eines linearen Teilraumes $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ in den Hilbertraum $\mathcal{H}$: $D(T) \ni f \xrightarrow{T} Tf \in \mathcal{H}$. $D(T)$ heißt der Definitionsbereich von T.

Lineare Abbildung: $T(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, Tf \; + \; \beta\, Tg$ für alle $f, g \in D(T)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Wir wollen *immer* voraussetzen, dass $D(T)$ dicht $\mathcal{H}$ ist.

Alle betrachteten Operatoren seien linear. Der Ausdruck 'Operator' bedeutet im folgenden immer 'linearer Operator'.

1. Beispiel (Ortsoperator): $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ und

$$D(T) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int x^2 |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad \text{und} \quad (Tf)(x) = x f(x) \;.$$

2. Beispiel (Projektionsoperator): $\mathcal{M}$ sei ein vollständiger Unterraum von $\mathcal{H}$ und $f = f_{\mathcal{M}} \; + \; f_{\mathcal{M}^\perp}$ die eindeutige Zerlegung eines beliebigen $f \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$Pf := f_{\mathcal{M}} \quad \text{mit} \quad D(P) = \mathcal{H}$$

ein überall definierter Operator. P heißt Projektor mit Wertebereich $\mathcal{M}$.

Wertebereich eines Operators T:

$$W(T) = \{ g \in \mathcal{H} \mid \text{ es existiert ein } f \in D(T) \;\text{ mit }\; Tf = g \} = T[D(T)] \;.$$

Definition: Ein Operator heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\| \, Tf \, \| \leq \; C \, \| \, f \, \| \quad \text{für alle } \; f \in D(T) \;.$$

Das kleinste mögliche C bezeichnet man mit $\| T \|$ und nennt es die Norm von T .

T beschränkt $\Rightarrow$ es existiert ein $C \geq 0$ mit

$$C \geq \frac{1}{\| f \|} \| Tf \| = \| \frac{1}{\| f \|} Tf \| = \| T \frac{f}{\| f \|} \| \quad \text{für alle } f \neq 0 \in D(T) .$$

$$\Rightarrow \| T \| = \sup_{f \in D(T), \|f\|=1} \| Tf \| .$$

Der Ortsoperator ist unbeschränkt:

Man betrachte

$$f_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}(x-n)^2} \quad \Rightarrow \quad \| f_n \|^2 = \int |f_n(x)|^2 dx = 1 \quad \text{und}$$

$$\| Tf_n \|^2 = \int x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-n)^2} dx = 1 + n^2 \to \infty \text{ mit } n \to \infty .$$

Alle Projektoren sind beschränkt: $Pf = f_{\mathcal{M}}$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp} , \ f = f_{\mathcal{M}} + f_{\mathcal{M}^{\perp}} \quad \Rightarrow \quad \| f \|^2 = \| f_{\mathcal{M}} \|^2 + \| f_{\mathcal{M}^{\perp}} \|^2 \geq \| f_{\mathcal{M}} \|^2$$

1.) $\mathcal{M} = \{0\} \ \Rightarrow \ P = 0 \ \Rightarrow \ \| P \| = 0$.

2.) (i) $\mathcal{M} \neq \{0\} \ \Rightarrow \ \| Pf \| = \| f_{\mathcal{M}} \| \leq \| f \| \ \Rightarrow \ \| P \| \leq 1$.
(ii) $0 \neq f \in \mathcal{M} \ \Rightarrow \ Pf = f \ \Rightarrow \| Pf \| = \| f \|$. (i) und (ii) $\Rightarrow \| P \| = 1$.

Satz: Es sei T ein beschränkter Operator mit $D(T) \neq \mathcal{H}$. Dann lässt sich T eindeutig fortsetzen zu einem beschränkten Operator $\tilde{T}$ mit $D(\tilde{T}) = \mathcal{H}$ und $\| \tilde{T} \| = \| T \|$. Fortsetzung bedeutet: $\tilde{T} f = Tf$ für alle $f \in D(T)$.

Beweis: Reed, Simon: Theorem 1.7 (The Bounded Linear Transformation theorem) .

Für einen beschränkten Operator T kann man also immer annehmen $D(T) = \mathcal{H}$, und die Norm lässt sich berechnen als

$$\| T \| = \sup_{\|f\|=1} \| Tf \| .$$

Summe, Vielfaches und Produkt von Operatoren:

$$(A+B)f = Af + Bf , \quad (\alpha A)f = \alpha (Af) = \alpha Af , \quad (AB)f = A(Bf) = ABf .$$

Aber Achtung: Im Allgemeinen ist $ABf \neq BAf$.

Definition: T^{-1} ist der zu T inverse Operator, wenn gilt:

$$D(T^{-1}) = W(T) \text{ und } T^{-1}(Tf) = f \text{ für alle } g = Tf \in W(T) .$$

T^{-1} existiert genau dann, wenn aus $Tf = 0$ folgt $f = 0$.

Definition: Ein Operator heißt unitär, wenn gilt:

$$1.)\ D(U) = W(U) = \mathcal{H} \ \text{ und } \ 2.)\ \langle Uf, Ug\rangle = \langle f, g\rangle \ \text{ für alle } \ f, g \in \mathcal{H}\ .$$

Etwas allgemeiner:

$U:\ \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heißt unitär, wenn gilt:

$$1.)\ D(U) = \mathcal{H}_1\ ,\ W(U) = \mathcal{H}_2 \ \text{ und } \ 2.)\ \langle Uf, Ug\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} \ \text{ für alle } \ f, g \in \mathcal{H}_1\ .$$

Zwei Hilberträume heißen isomorph, wenn zwischen ihnen eine unitäre Abbildung existiert.

Definition: T sei ein (dicht definierter linearer) Operator auf $\mathcal{H}$. Es sei

$$D(T^\dagger) = \{f \in \mathcal{H} \,|\, \text{es existiert } g \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle Th, f\rangle = \langle h, g\rangle \text{ für alle } h \in D(T)\}\ .$$
$$\text{Für } f \in D(T^\dagger) \text{ sei } T^\dagger f = g\ .$$

$T^\dagger$ heißt der zu T adjungierte Operator (kurz: das Adjungierte von T) .

Bemerkungen und Folgerungen:

1.) $\langle Th, f\rangle = \langle h, T^\dagger f\rangle$ für alle $h \in D(T)$ und alle $f \in D(T^\dagger)$.

2.) Wegen $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$, ist der Vektor g der obigen Definition eindeutig.

3.) $T^\dagger$ ist ein linearer Operator.

4.) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, $(\alpha A + \beta B)^\dagger = \alpha^* A^\dagger + \beta^* B^\dagger$.

5.) T beschränkt, $D(T) = \mathcal{H} \ \Rightarrow \ D(T^\dagger) = \mathcal{H}$. Dies zeigt der nachfolgende Satz.

Definition: Ein beschränktes lineares Funktional L auf $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{C}$, $\mathcal{H} \ni f \mapsto L(f) \in \mathbb{C}$, mit

$$\| L \| := \sup_{\|f\|=1} |L(f)| < \infty\ .$$

L heißt auch stetiges lineares Funktional. $\mathcal{H}^* = \{L \,|\, L$ ist stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}\ \}$ heißt Dualraum von $\mathcal{H}$.
(L beschränkt $\Rightarrow$ $|L(f)| \le \| L \|\, \| f \|$ für alle $f \in \mathcal{H}$.)

Satz (Das Riesz Lemma): Für jedes $L \in \mathcal{H}^*$ existiert genau ein $g_L \in \mathcal{H}$ mit

$$L(f) = \langle g_L, f\rangle \ \text{ für alle } \ f \in \mathcal{H} \ \text{ und es gilt } \ \| L \| = \| g_L \|\ .$$

Beweis: $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{H} \,|\, L(f) = 0\}$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Falls $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, d. h. $L(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ L(f) = \langle g_L, f\rangle$ mit $g_L = 0$. $\mathcal{N} \neq \mathcal{H} \ \Rightarrow \ \mathcal{H} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ und $\mathcal{N}^\perp \neq \{0\}$. Sei $0 \neq h \in \mathcal{N}^\perp \ \Rightarrow \ L(h) \neq 0$. Wir definieren

$$g_L = \frac{L(h)^*}{\| h \|^2} h \in \mathcal{N}^\perp\ .$$

Für jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$f = \underbrace{(f - \frac{L(f)}{L(h)} h)}_{\in \mathcal{N}} + \underbrace{\frac{L(f)}{L(h)} h}_{\in \mathcal{N}^\perp} \ \Rightarrow \ \langle g_L, f\rangle = \left\langle \frac{L(h)^*}{\| h \|^2} h, \frac{L(f)}{L(h)} h \right\rangle = L(f)\ .$$

Dass g_L eindeutig ist und dass $\| L \| = \| g_L \|$ findet man in Reed, Simon: Theorem II.4 (the Riesz lemma).

Folgerung:
Es sei T ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$. $\Rightarrow \langle Th, f\rangle^* = L(h)$ ist für beliebiges, aber festes $f \in \mathcal{H}$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}$, denn

$$|L(h)| = |\langle Th, f\rangle^*| \leq \| Th \| \| f \| \leq \| T \| \| h \| \| f \| \ .$$

$\Rightarrow$ für jedes $f \in \mathcal{H}$ existiert ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle Th, f\rangle = L(h)^* = \langle g, h\rangle^* = \langle h, g\rangle \ . \quad \Rightarrow \quad D(T^\dagger) = \mathcal{H} \ .$$

Für einen beschränkten Operator genügt zur Definition des Adjungierten also

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^\dagger g\rangle \ \text{ für alle } \ f, g \in \mathcal{H} \ .$$

Beispiele:

1.) Es sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\varphi(x)$ eine beschränkte Funktion und $(Tf)(x) := \varphi(x)\, f(x)$.

$$\Rightarrow \| Tf \|^2 = \int |\varphi(x)|^2 \, |f(x)|^2 dx \ \leq \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \ \| f \|^2$$
$$\Rightarrow \| T \| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{und} \quad D(T) = \mathcal{H} \ .$$

$T^\dagger = ?$ Dazu:

$$\langle Tf, g\rangle = \int \varphi^*(x)\, f^*(x)\, g(x) dx = \int f^*(x)\, (\varphi^*(x)\, g(x)) dx$$
$$= \langle f, T^\dagger g\rangle \ \text{ mit } \ (T^\dagger g)(x) = \varphi^*(x)\, g(x) \ .$$

2.) Der Ortsoperator: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) = \left\{ h \in \mathcal{H} \mid \int x^2 |h(x)|^2 dx < \infty \right\}$ und $(Th)(x) = x\, h(x)$.

$$\langle Th, f\rangle = \int (x\, h(x))^* f(x) dx = \int h^*(x)(x\, f(x)) dx$$
$$= \int h^*(x) g(x) dx = \langle h, g\rangle \ \text{ mit } \ g(x) = x\, f(x) \ .$$

Per Definition muss gelten $g \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ x\, f(x) \in \mathcal{H}$, d. h. $f \in D(T)$.

$$\Rightarrow \quad D(T^\dagger) = D(T) \quad \text{und} \quad T^\dagger f = Tf \quad \text{für alle} \ \ f \in D(T) \ .$$

Definition: Ein Operator T heißt selbstadjungiert, wenn gilt

$$D(T^\dagger) = D(T) \ \text{ und } \ T^\dagger f = Tf \ \text{ für alle } \ f \in D(T) \ , \ \text{ kurz : } \ T^\dagger = T \ .$$

Definition: Das Spektrum $\sigma(T)$ des Operators T besteht aus denjenigen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $R_\lambda(T) := (\lambda\, \mathbf{1} - T)^{-1}$ nicht existiert oder nicht beschränkt ist oder nicht dicht definiert ist.

Ein Vektor $f \in \mathcal{H},\ f \neq 0$, heißt Eigenvektor von T mit Eigenwert λ , wenn $Tf = \lambda\, f$.

Folgerung:
f Eigenvektor von T mit Eigenwert $\lambda \;\Rightarrow\; \lambda \in \sigma(T)$, denn $(\lambda\,\mathbf{1} - T)f = 0$ mit $f \neq 0 \;\Rightarrow$ $R_\lambda(T)$ existiert nicht.

Die Menge der Eigenwerte von T nennt man das Punktspektrum von T .

Satz: T sei ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) $\sigma(T)$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: Für den allgemeinen Fall siehe Reed, Simon: Theorem VI.8 . Es seien $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von T mit Eigenvektoren f , bzw. g , also $Tf = \lambda\, f$ und $Tg = \mu\, g$.

$$\Rightarrow \;\; \lambda^* \parallel f \parallel^2 = \langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \lambda \parallel f \parallel^2 \;\Rightarrow\; \lambda \text{ reell},$$
$$(\lambda - \mu)\langle f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle - \langle f, Tg\rangle = 0\,, \quad \lambda \neq \mu \;\Rightarrow\; \langle f, g\rangle = 0\,.$$

3. Die Fouriertransformation

Der Schwartzsche Testfunktionenraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei eine komplexwertige Funktion über $\mathbb{R}^n$, die beliebig oft partiell differenzierbar sei. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sei ein Multiindex,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{und} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Man definiert $\parallel f \parallel_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\, D^\beta f(x)|$.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f(x) \mid \; \parallel f \parallel_{\alpha,\beta} < \infty \;\text{ für alle }\; \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,,\; \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\,\}$$

heißt Schwartzscher Testfunktionenraum über $\mathbb{R}^n$.
Beispiel: $f(x) = e^{-(x-a)^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Wichtig: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition: Es sei $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformierte von $f(x)$ ist die Funktion

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,k\cdot x}\, f(x)\, d^n x\,.$$

Dabei ist $k\cdot x = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n$. Die inverse Fouriertransformierte von f , bezeichnet als $\check{f}$, ist die Funktion

$$\check{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,k\cdot x}\, f(x)\, d^n x\,.$$

Manchmal schreiben wir auch $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Bemerkung: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x \;<\; \infty \;\Rightarrow$ die obigen Integrale sind wohldefiniert.

Satz: Die Fouriertransformation ist eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die dazu inverse Abbildung ist die inverse Fouriertransformation .
Darüber hinaus gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 d^n k \;.$$

Beweis: siehe Reed, Simon: Theorem IX.1.

Folgerungen:

1.) Wir betrachten $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. $\| \mathcal{F} f \| = \| f \|$ für alle $f \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} g \rangle = \langle f, g \rangle$ für alle $f, g \in \mathcal{S}$.

2.) **Satz:** Die Fouriertransformation lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem unitären Operator $\mathcal{F}$ von $L^2(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem unitären Operator $\mathcal{F}^{-1}$, und es gilt $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{\dagger}$.

Definition: Es seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Unter der Faltung von f und g , bezeichnet mit $f * g$, versteht man die Funktion $(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x)\, g(x) d^n x$.

Satz: Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\, \hat{g}$, d. h. die Fouriertransformierte einer Faltung ist gleich $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ mal dem Produkt der Fouriertransformierten. Die Umkehrung: $\widehat{f\, g} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g}$.

Wichtig:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,k \cdot x} \hat{f}(k) d^n k \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,k \cdot x}\, i\, k_j\, \hat{f}(k) d^n k \;.$$

Zusammenstellung der Formeln:

1.) $f(x)$ reell $\;\Leftrightarrow\; \hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$.

2.) $g(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \;\Leftrightarrow\; \hat{g}(k) = i\, k_j\, \hat{f}(k)$.

3.) $\displaystyle\int |f(x)|^2 d^n x = \int |\hat{f}(k)|^2 d^n k$.

4.) $h(x) = f(x)\, g(x) \;\Leftrightarrow\; \hat{h}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\hat{f} * \hat{g})(k)$,
$h(x) = (f * g)(x) \;\Leftrightarrow\; \hat{h}(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$.

4. Die δ–Funktion

a) Naive Definition der δ–Funktion:

$$\delta(x - y) = 0 \text{ für } x \neq y \text{ und } \int \delta(x - y)\, dx = 1 \;.$$

b) Exaktere Definition: $\delta(x-y)$ als Grenzwert von glatten Funktionen $\delta_\alpha(x-y)$: Abhängigkeit vom Parameter α so, dass

$$\int \delta_\alpha(x-y)\,dx = 1 \text{ für alle } \alpha \text{ und}$$

$$f(y) = \lim_{\alpha\to 0} \int f(x)\,\delta_\alpha(x-y)\,dx \;\; \text{"="} \;\; \int f(x)\,\delta(x-y)\,dx \;.$$

für alle $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beispiele:

$$\delta_\alpha(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(x-y)^2} \quad \text{oder} \quad \delta_\alpha(x-y) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+(x-y)^2} \;.$$

c) $\delta(x-y)$ und vollständige Orthonormalsysteme:

$\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sei eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$. $\Rightarrow$ $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n, f\rangle v_n$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$. Für genügend glatte Funktionen gilt sogar

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int v_n^*(x)\, f(x) dx \right) v_n(y) = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} v_n^*(x)\, v_n(y)\, f(x) dx \;.$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*(x)\, v_n(y) \;.$$

Formeln:

Definierende Gleichung: $\displaystyle\int \delta(x-y)\, f(x)\, dx = f(y)$.

1.) $f(x)\,\delta(x-y) = f(y)\,\delta(x-y)$, $\Rightarrow$ $x\,\delta(x) = 0$.

2.) $\delta(x-y) = \dfrac{d}{dx}\theta(x-y)$.

3.) $\delta(x-y) = \delta(y-x)$.

4.) $\delta(x-y) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int e^{\pm i\,k\,(x-y)} dk$.

5.) $\delta(g(x)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|}$.

Dabei ist $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion,
die N einfache Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ hat.

6.) $\delta(\vec{r}) \equiv \delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

7.) $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{\pm i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}$.