3.7 Physik und Mathematik

Die Physik ist eine auf Experimente gegründete Naturwissenschaft. Aber experimentierendes Beobachten und Messen allein, auch mit noch so gut entwickelten Apparaten, brächte nur ungeordnete Faktensammlungen. Es bedarf der gedanklichen Verarbeitung, die wir "Theoretische Physik" nennen. Oft macht erst die Theorie ein Experiment bedeutsam, seinen Ausgang spannend. Die präzise und unmissverständliche, aber auch ästhetische und abstrakte Form dieser gedanklichen Verarbeitung ist die mathematische Formulierung. Deshalb sprechen wir auch von "Mathematischer Physik". Die Theorie bedient sich der Mathematik. Die Natur spricht dann zu uns in mathematischen Gleichungen. Und wunderbarerweise passen Natur und Mathematik zusammen.

Experimentelle und theoretische Physik sind aufeinander angewiesen, spätestens seit wir in Bereiche des sehr kleinen, des sehr großen, des sehr zahlreichen vorgestoßen sind, die wir mit unseren Sinnen nicht mehr unmittelbar beobachten können. Ergebnisse des Experimentierens lassen sich ohne Bezug auf eine Theorie gar nicht mitteilen. Die Mathematik dient nicht nur der Berechnung, sondern stellt Begriffe und Strukturen zur Verfügung, mit denen unanschauliche Sachverhalte dargestellt und verstanden werden können.

Theoretische und experimentelle Physik sind auch inhaltlich eng miteinander verwoben. Als Heike Kamerlingh Onnes 1911 zufällig entdeckte, dass manche Metalle bei starker Abkühlung unterhalb einer bestimmten Temperatur ihren elektrischen Widerstand verlieren und "supraleitend" werden, war die theoretische Physik herausgefordert, dafür eine Erklärung zu geben. Erst ein halbes Jahrhundert später gelang ihr dies mit der Vorstellung, dass sich die Metallelektronen paarweise zu sogenannten Bosonen zusammenschließen können, die im supraleitenden Zustand kondensieren (s. Kapitel 3.3.3).

Andererseits kann auch die Theoretische Physik die Experimentalphysik herausfordern: Albert Einstein hatte durch intensives Nachdenken das Phänomen der Erdanziehung und der Schwerkraft zwischen den Himmelskörpern mit den Vorgängen in einem fallenden Fahrstuhl in Zusammenhang gebracht und es in einer Gravitationstheorie von abstrakter Schönheit gebannt. Die beobachtende und messende Physik konnte diese Theorie erst im Laufe von vielen Jahren - und längst nicht vollständig - verifizieren. So ist z. B. erst jetzt die Möglichkeit greifbar geworden, die von Einsteins Theorie vorhergesagten Gravitationswellen zu beobachten und vielleicht sogar eine ganze "Gravitationsoptik" zu entwickeln, gewissermaßen eine moderne "Sphärenmusik". Schon heute bedienen sich die Astronomen des anderen Effektes, dass kosmische Massen, wie Galaxien oder Galaxienhaufen, auf das Licht als Schwerkraftlinsen wirken. Das ermöglicht es ihnen, noch weiter entfernte Galaxien oder Quasare zu untersuchen, dunkle Materie oder Planeten zu finden oder die Struktur des Universums zu bestimmen (s. Kapitel 3.1.1).

Vielleicht können wir eines Tages sehen, was dem Mathematiker und Geometer Carl Friedrich Gauß noch verwehrt blieb: Als er die Winkelsumme im Dreieck Brocken (Harz), Inselsberg (Thüringer Wald) und Hoher Hagen (bei Göttingen) vermaß, fand er - im Rahmen der damaligen Messgenauigkeit - den euklidischen Wert von 180°. Unser heutiges Weltbild lässt uns einen etwa 20 millionstel eines millionstel Grades größeren Wert erwarten. Messbar ist diese Abweichung auch heute noch nicht. Aber unser Weltbild, durch "Theorie" geformt, lässt uns trotzdem fest an die Abweichung von der Euklidischen Winkelsumme glauben. Sie ergibt sich aus einer Berechnung, die auf eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen zurückgreift, die der Astronom Karl Schwarzschild 1915 - als Soldat an der Front - gefunden hat.

Es ist nicht belegt, ob Gauß in Erwägung gezogen hat, dass die Winkelsumme im Dreieck von 180° abweichen könnte. Sein Schüler Bernhard Riemann entwickelte später die nach ihm benannte Differentialgeometrie gekrümmter Räume, ohne Bezug auf mögliche physikalische Anwendungen. Doch der von ihm eingeführte Krümmungstensor R_{ijkl} fand durch Albert Einstein Eingang in die Physik. Ohne diesen mathematischen Begriff kann man die Beziehung zwischen Gravitation und Raumzeit-Krümmung gar nicht ausdrücken.

Theorie und Experiment befruchten sich gegenseitig und bilden zusammen die Basis der Physik. Dabei ist die Theorie die Schnittstelle zur Mathematik, sie ist das Eingangstor für mathematische Methoden und Lehrsätze. Viele tiefgründige Sätze und Gebiete der Mathematik wiederum entstammen den Vorstellungen von Physikern. Die Assimilation der Mathematik war und ist eine der Wurzeln für den Siegeszug der Physik. Sie ist ferner eine wesentliche Quelle für die Wirkung der Physik in die Biologie und in andere Naturwissenschaften hinein. Die Physik zeigt vorbildhaft für andere Wissenschaften, wie wichtig die Mathematisierung ist - abgesehen vom methodischen, experimentellen Vorgehen und von der Benutzung präziser Messapparaturen.

Weil Experiment und mathematisch-theoretische Beschreibung eng miteinander verknüpft sind, werden Experiment und Theorie im 3. Kapitel unter thematischen Gesichtspunkten gemeinsam dargestellt. Das vorliegende Kapitel soll dazu anregen, sich die große und vielschichtige Bedeutung der Mathematik in der Physik klarzumachen. Mathematik ist gefragt, wo Experimente (noch) nicht möglich sind, wo experimentelle Ergebnisse in ordnende Zusammenhänge gebracht, verstanden werden müssen, wo grundlegende Begriffe und eine Theorie der physikalischen Apparate die Beobachtungen erst interpretierbar machen.

Nach den beiden großen Leistungen des vergangenen Jahrhunderts, die Physik der Gravitation zu verstehen und die Quantenphysik der Felder zu formulieren, ergab sich die wohl noch gewaltigere Aufgabe, diese beiden Bereiche der Physik zu vereinen. Diese Aufgabe ist, nach beeindruckenden Teilerfolgen, heute spannender denn je. Aufregende Fortschritte wurden im Zusammenhang mit der widerspruchsfreien Formulierung der Quantenelektrodynamik und mit der Quantenchromodynamik erzielt. Teilchenphysik und Feldphysik, Quantisierung und relativistische Kausalität ließen sich zumindest teilweise zusammenführen. Dazu wurden physikalische Begriffe von zentraler Bedeutung entwickelt, z. B. Renormierung und Symmetrie sowie Symmetriebrechung.

Abb. 3.7.1.
Der Mathematiker Bernhard Riemann (1826-1866), dessen bahnbrechende Ideen über die Geometrie des Raumes entscheidend waren für die Entwicklung der Einsteinschen Relativitätstheorie. (Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften)

Die Symmetrien in der Natur sind ein fundamentales Struktur- und Ordnungsprinzip. Mathematisch werden sie durch diskrete oder kontinuierliche "Gruppen" und ihre "Darstellungen" beschrieben. Das Standardmodell der Elementarteilchen, das die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung zusammen beschreibt, ist eine der ganz wesentlichen und außerordentlich erfolgreichen Errungenschaften der letzten Dekaden physikalischer Forschung (s. Kapitel 3.1.2). Dieses Modell kann man als Quanteneichfeldtheorie der Symmetriegruppe SU(2)XU(1)XSU(3) auffassen.

Ein Versuch, die Quantenphysik und die Gravitation zu vereinen, ist die Stringtheorie (s. Kapitel 3.1.2). Noch ist sie weit von der experimentellen Bestätigung entfernt, aber sie nimmt mathematisch zunehmend Gestalt an. Statt punktförmiger Gebilde stellt diese Theorie Saiten (engl. strings) und deren Dynamik in den Mittelpunkt. Dazu kommen möglicherweise auch flächige Membranen (branes). Eine Analyse ihrer Schwingungszustände soll es ermöglichen zu verstehen, warum die Elementarteilchen bestimmte Massen haben.

Im Laufe der Geschichte haben sich die Physik und die Mathematik immer wieder wechselseitig stimuliert - nicht selten durch die Arbeit einer Person. Ein Beispiel dafür ist die Entwicklung der Mechanik und der Differentialrechnung: Eines ging nicht ohne das andere, wie Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton bahnbrechend zeigten. Quantenphysik und Funktionalanalysis bilden ein weiteres Paar: Was wäre die heute aus Theorie und Anwendungen nicht mehr wegzudenkende Quantenmechanik ohne die Schrödinger-Gleichung mit ihren mathematischen Eigenschaften. Und wie hat sich die "Deltafunktion" d(x) des Physikers Paul Dirac zum großen mathematischen Gebiet der Theorie der Distributionen gemausert.
Als weitere Beispiele seien die Elektrodynamik und die Hydrodynamik auf der einen Seite, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen auf der anderen Seite genannt, die sich im engen Zusammenspiel entwickelt haben, oder die qualitative Theorie der dynamischen Systeme zusammen mit der Theorie der Differentialgleichungen und der Topologie.

Ein aktuelles Beispiel für die enge Verflechtung von Physik und Mathematik hat sich aus der gemeinsamen Betrachtung der fermionischen und bosonischen Teilchen ergeben, die Ausdruck einer - allerdings gebrochenen - Supersymmetrie ist. Die Entwicklung eines geeigneten mathematischen Apparates von "Superzahlen", einer ganzen "Supermathematik", hat schließlich die Formulierung der Superstringtheorien ermöglicht. Von der Stringtheorie sind zahlreiche Impulse in die Topologie, die algebraische Geometrie, die Zahlentheorie und andere mathematische Gebiete ausgegangen und haben diese wiederum in ihrer "Super"-Entwicklung beeinflusst. Superzahlen s (deren Quadrat s2 null sein muss, da sich bei Vertauschung der Reihenfolge in einem Produkt zugleich das Vorzeichen ändern soll: $\text{sigma}_1\text{sigma}_2 = -\text{sigma}_2\text{sigma}_1$) sind inzwischen ein nützliches Werkzeug in vielen Gebieten der Physik, z.B. auch in der Festkörperphysik. Darüber hinaus verallgemeinern sie die klassische Mathematik. Es ist wohl kein Zufall, dass gerade Physiker einen "supersymmetrischen Beweis" des sogenannten Atiyah-Singer-Indextheorems formuliert haben.

Jüngst haben wir die Verbindung der Physik mit einem Gebiet der Mathematik erlebt, der bislang als Musterbeispiel dafür galt, dass sich die Mathematik ohne Bezug auf physikalische Fragestellungen entwickelt, nämlich mit der Zahlentheorie. Diese beschäftigt sich u. a. mit Fragen nach der Verteilung der Primzahlen. Wenn man heute die Akustik von Konzertsälen verbessern will, dann zieht man auch die Zahlentheorie zu Rate, um Decken und Wände richtig zu gestalten. Will man den Verlauf und die Stabilität komplexer, dynamischer, nichtlinearer Bewegungen verstehen, wie z.B. das Wettergeschehen oder die Saturnringe, so fragt man auch die Zahlentheorie. Ein weiteres Beispiel aus der jüngsten Zeit ist die Primfaktorenzerlegung sehr gro-
ßer Zahlen mit Hilfe von Quantencomputern, vor der sich moderne Verschlüsselungsverfahren fürchten müssen.

Abb. 3.7.2.
Der Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) fand 1915 eine Lösung der kurz vorher veröffentlichten Einsteinschen Feldgleichungen, die das Gravitationsfeld eines Schwarzen Loches beschreibt. (Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften)

Eine wichtige und noch weitgehend ungelöste Aufgabe ist die begriffliche Weiterentwicklung einer nichtlinearen Mathematik, die nichtlineare physikalische

Phänomene adäquat beschreibt. Die Entdeckung seltsamer Attraktoren (siehe Kapitel 3.4.11) sowie universeller Szenarien beim Übergang zum Chaos war nur ein erster Schritt. Die Physik hat ihren mechanistischen, kausal deterministischen Zug früherer Jahrhunderte abgelegt. In einer nichtlinearen Welt sind deterministische mathematische Gesetze einerseits und die Unvorhersagbarkeit zukünftiger Abläufe andererseits keine Antinomie mehr. Vielmehr sind sie miteinander verträgliche, ja einander bedingende Signaturen des Naturgeschehens, nicht nur der mikroskopischen, quantenmechanischen, sondern gerade auch der makroskopischen, klassischen Natur.

Eine andere große Herausforderung ist die Mathematisierung einer neuen Geometrie: Zu der altehrwürdigen euklidischen Geometrie sowie ihrer Fortsetzung in den nichteuklidischen Geometrien der gekrümmten Räume und der Raumzeit ist jüngst eine fraktale Geometrie hinzugekommen, die der realen Formenvielfalt der Natur offenkundig besonders gut entspricht (s. Kapitel 3.4.8). Die noch von Riemann beibehaltene Ganzzahligkeit der Raumdimension wird nun aufgegeben. Geometrische Formen von gebrochener, fraktaler Dimension lassen sich dann untersuchen. Die fraktale Geometrie spielt nicht nur in der Physik eine wichtige Rolle, sondern auch bei multidisziplinären Anwendungen. Sie ist aber bisher fast nur über Algorithmen zugänglich; eine fraktale analytische (Differential-)Geometrie, die sich an die so erfolgreich durch Differentialgesetze beschriebene Physik anbinden ließe, muss noch entwickelt werden. Erste ermunternde Ergebnisse liegen indes vor.

Eine immer wichtigere Rolle spielt die "computational physics", die numerische, Computer nutzende Physik. Sie ermöglicht heute Einsichten, die ohne sie unerreichbar wären. Die Entwicklung immer effektiverer Methoden, um die komplizierten Gleichungen der Physik numerisch zu lösen, gewinnt deshalb zunehmend an Bedeutung.

Ein auffallender Zug in der Entwicklung der modernen Theoretischen Physik ist die fortschreitende Zusammenführung von Gebieten, die sich - offenbar nur vorübergehend - getrennt voneinander entwickelt haben. Man beobachtet ferner, dass theoretische Einsichten oft unerwartet schnell praktisch genutzt werden, auch wenn eine praktische Anwendung ursprünglich nicht beabsichtigt war. Als Beispiel sei die Quantenkryptographie genannt (s. Kapitel 3.2.1). Wer hätte gedacht, dass die Entdeckung der Superpositionseigenschaften quantenmechanischer Wellenfunktionen und der sogenannten Bellschen Ungleichungen, mit denen sich die merkwürdigen Konsequenzen der Quantenmechanik überprüfen lassen, zu modernen Verschlüsselungsverfahren führen?

Die Theoretischen Physiker werden oft als Botschaftenträger gefordert, die dabei helfen, wissenschaftlichen Laien die Vorstellungen der Physik von der Natur und der Welt zu vermitteln. Denkt man an Theoretiker wie Carl Friedrich von Weizsäcker oder Stephen Hawking, so scheint es fast, als hätten sie die Sehnsüchte der nachdenkenden Menschen zu stillen nach dem, "was die Welt im Innersten zusammenhält". Besonders beeindruckt die Sicherheit der mathematischen Schlüsse, Argumente und Ergebnisse, die auf die physikalische Theorie übertragen wird: Diese Sicherheit strahlt Verlässlichkeit aus und verleiht Autorität. Und dennoch muss sich die Theorie immer wieder in der Konfrontation mit dem Experiment bewähren.

Die Theoretische und Mathematische Physik, mit ihrem Reichtum an Ideen und geistigen Herausforderungen, mit ihrer inneren Logik und Konsistenz, mit ihrer Eleganz und Schönheit, übt sehr große Faszination gerade auch auf wissensdurstige junge Menschen aus, die nach tiefen Erkenntnissen streben, zu denen allein die mathematische Formulierung einen Zugang verschafft.