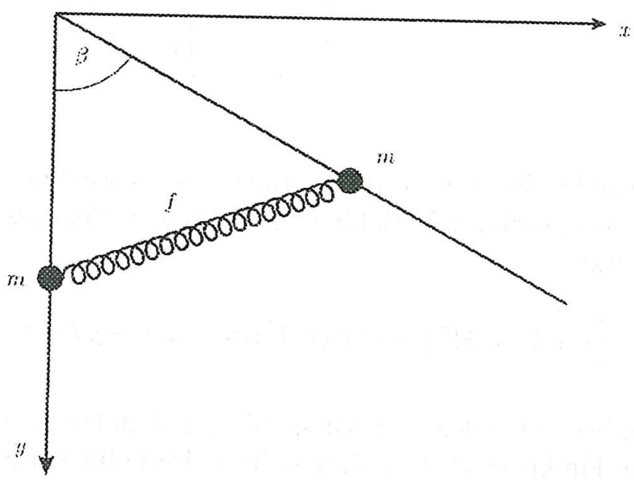
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bewegung zweier gekoppelter Massenpunkte

Zwei Massenpunkte der Masse m bewegen sich reibungsfrei in der (x, y)-Ebene. Der erste Massenpunkt gleitet auf der vertikalen y-Achse und der zweite auf einer um den Winkel β seitwärts geneigten Geraden. Die Massen stehen unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_g = mg\,\vec{e}_y$ und sind mit einer idealen Feder (Federkonstante f und ungestreckte Länge $l_0 = 0$) verbunden.



a) Geben Sie die Zwangsbedingungen an. (2 Punkte)

b) Stellen Sie in den Vertikalpositionen (y_1, y_2) der Massen die Lagrangefunktion L des Systems auf. Benutzen Sie zur Vereinfachung den Parameter $b = 1/\cos^2\beta$. (6 Punkte)

c) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab, und bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (y_1^0, y_2^0). (5 Punkte)

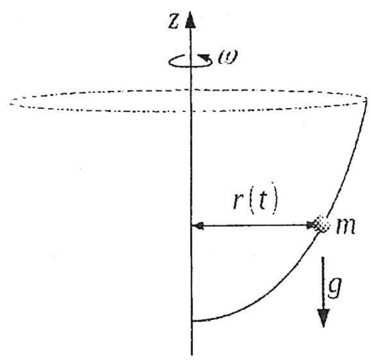
d) Führen Sie neue Koordinaten (η_1, η_2) für die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ein und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen dann folgende Form haben: (3 Punkte)

$$m\ddot{\eta}_1 + f(\eta_1 - \eta_2) = 0\,, \qquad b\,m\,\ddot{\eta}_2 + f(b\,\eta_2 - \eta_1) = 0\,.$$

e) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen $\omega_{1,2}$ und zugehörigen (unnormierten) Eigenvektoren $\vec{A}_{1,2}$ für Schwingungen des Systems. (9 Punkte)

Aufgabe 2: Perle auf rotierendem Draht

Eine für $r \geq 0$ vorgegebene stetig differenzierbare Funktion $z = f(r)$ rotiert, aus Draht geformt, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um die z-Achse. Auf dem Draht gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft eine Perle mit der Masse m.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Lagrangesche Bewegungsgleichung unter Verwendung der in der Abbildung gezeigten Variable $r(t)$ auf. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung die folgende Form besitzt: (9 Punkte)

$$\ddot{r}\left(1 + \left(f'(r)\right)^2\right) + \dot{r}^2 f'(r) f''(r) - \omega^2 r + g f'(r) = 0$$

b) Die Perle befindet sich in einem Gleichgewichtspunkt auf dem Draht, wenn $r(t)$ zeitunabhängig ist. Bestimmen Sie die Funktion $f(r)$ so, dass sich die Perle für vorgegebene Winkelgeschwindigkeit ω überall auf dem Draht im Gleichgewicht befindet. (4 Punkte)

c) Sei nun $f(r) = ar^4$, wobei a konstant ist. Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte auf dem Draht.
Zur Kontrolle: Die Gleichgewichtspunkte sind $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{\omega}{2\sqrt{ag}}$ (3 Punkte)

d) Welche dieser Gleichgewichtspunkte sind stabil? Bestimmen Sie für den oder die stabilen Punkte die Schwingungsfrequenz Ω für kleine Auslenkungen um die Ruhelage. (9 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Teilchen im elektromagnetischen Feld

In dieser Aufgabe soll die gebundene Bahn eines Teilchens der Ladung $q > 0$ und der Masse m in einem externen, statischen elektromagnetischen Feld betrachtet werden. Die magnetische Induktion sei $\vec{B} = -B\vec{e}_z$, mit einer Konstanten $B > 0$. Das elektrische Potential sei gegeben durch

$$\phi(x, y, z) = \frac{\alpha}{2}(-x^2 - y^2 + \beta z^2)\,, \qquad \alpha, \beta > 0\,. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$, und zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen im Vakuum nur für die Wahl $\beta = 2$ erfüllt sind. (3 Punkte)

b) Betrachten Sie nun die Bewegung des Teilchens nur im Feld $\vec{E}$, d.h. für den Fall $B = 0$. Geben Sie die allgemeine Lösung für die Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ bei $t = 0$ an. In welche Richtungen ist die Bewegung gebunden, und mit welcher Frequenz ω_E oszilliert das Teilchen? (7 Punkte)

c) Betrachten Sie nun den Fall mit $B \neq 0$, aber ohne elektrisches Feld, $\alpha = 0$. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und bestimmen Sie hieraus die Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}$ für die Anfangsbedingung $v_x(0) = 0$ bei $t = 0$. Zeigen Sie, dass die Bewegung in bestimmte Richtungen mit einer von $\vec{B}$ abhängigen Frequenz ω_B oszillatorisch gebunden ist. (9 Punkte)

d) Um eine vollständig gebundene Bewegung zu erreichen, sollen nun beide Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gleichzeitig vorliegen. Betrachten Sie dazu den Ansatz

$$x(t) = R\cos(\omega t)\,, \quad y(t) = R\sin(\omega t)\,, \quad z(t) = r\sin(\omega' t)\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Frequenzen ω und ω' so, dass der Ansatz die Bewegungsgleichungen in die x- und die z-Richtung löst. Welche Bedingung ergibt sich an die Frequenzen ω_E und ω_B, damit die Bewegung vollständig gebunden ist? Welche physikalischen Anfangsbedingungen bestimmen die Parameter R und r? (6 Punkte)

Hinweis: Die Lösung der Bewegungsgleichung in die y-Richtung folgt aus der x-Richtung, und braucht nicht extra überprüft zu werden.

Aufgabe 2: Ladungsverschiebung

Eine metallische Kugel mit einem Radius R_1 sei mit einer Ladung Q geladen. Die Ladung befindet sich an der Oberfläche der Kugel.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im gesamten Raum. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die elektrostatische Energie W dieser Kugel.
Hinweis: Die Energiedichte ist $w = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$. (4 Punkte)

Jetzt wird eine zweite metallische Kugel hinzugefügt. Sie habe den Radius $R_2 < R_1$, sei ungeladen und so weit von der ersten Kugel entfernt, dass sich die Ladungen nicht gegenseitig verschieben. Mit einem Draht werden nun beide Kugeln verbunden. Dadurch gleichen sich deren Potentiale an, eine Ladung Q_2 fließt auf die kleine Kugel, und die große Kugel verringert ihre Ladung zu $Q_1 = Q - Q_2$. Der Draht wird wieder entfernt.

c) Wieviel Ladung Q_2 hat die kleine Kugel erhalten? (8 Punkte)

d) Nach dem Ladungsausgleich sei der Betrag des elektrischen Feldes E_1 bzw. E_2 an der Oberfläche jeder Kugel. Berechnen Sie das Verhältnis E_2/E_1 als Funktion von R_1 und R_2. Was wird im Grenzfall einer sehr kleinen Kugel $R_2 \to 0$ (Spitzeneffekt) gemessen? (4 Punkte)

e) Um welchen Faktor verringert sich die Gesamtenergie nach dem Potentialausgleich? (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Abschirmung der Schwarzkörperstrahlung einer Kugel

a) Leiten Sie unter Verwendung eines geeigneten thermodynamischen Potentials die Maxwellrelation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{1}$$

her.

(5 Punkte)

b) Für ein thermisches Photonengas gilt die thermische Zustandsgleichung

$$p = \frac{U(V,T)}{3V}.$$

Wie hängt die innere Energie U des Photonengases vom Volumen ab? Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Hauptsätze und der Maxwellrelation (1) ferner ihre Temperaturabhängigkeit.

(10 Punkte)

c) Mit Hilfe der Temperaturabhängigkeit der inneren Energie lässt sich zeigen, dass die von einem Flächenelement dA abgestrahlte Leistung dP eines schwarzen Körpers mit Temperatur T durch

$$\mathrm{d}P = \sigma T^4 \mathrm{d}A$$

gegeben ist, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante bezeichnet. Es werde nun ein kugelförmiger schwarzer Körper mit Radius R_1 und Temperatur T betrachtet, der sich in einer Umgebung mit Temperatur T_0 befindet. Begründen Sie, warum die Nettoabstrahlung des gesamten schwarzen Körpers durch die Leistung

$$\Delta P = 4\pi\sigma R_1^2 (T^4 - T_0^4)$$

gegeben ist.

(4 Punkte)

d) Nun sei der schwarzer Körper von einer konzentrischen dünnen Kugelschale mit Radius $R_2 > R_1$ umgeben, die ebenfalls als schwarzer Körper betrachtet werden kann. Die Temperatur im Raum außerhalb der Kugelschale sei T_0. Bestimmen Sie die Temperatur T_2 der Kugelschale im stationären Zustand und daraus den Faktor, um den die Nettoabstrahlung der inneren Kugel durch die Kugelschale reduziert wird.

(6 Punkte)

Hinweis: Der in Teilaufgabe c) angegebene Ausdruck für die Nettoabstrahlung der Kugel gilt auch, wenn die Kugel von einem beliebig geformten schwarzen Körper mit Temperatur T_0 eingeschlossen ist.

Aufgabe 2: Wärmekapazität und Kompressibilität

In dieser Aufgabe geht es um einen Zusammenhang zwischen der isochoren und isobaren Wärmekapazität pro Teilchen

$$c_V = \frac{T}{N}\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_V, \qquad c_p = \frac{T}{N}\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_p \tag{1}$$

einerseits und der adiabatischen und isothermen Kompressibilität

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_S, \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_T \tag{2}$$

andererseits. Betrachtet wird zunächst ein ideales Gas.

a) Bestimmen Sie κ_T für das ideale Gas. (3 Punkte)

b) Die Entropie des idealen Gases kann als $S(T, V, N) = Nk\ln(VT^{c_V/k}/f(N))$ mit einer hier nicht näher bestimmten Funktion f geschrieben werden. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass für eine reversible adiabatische Zustandsänderung des idealen Gases

$$pV^\gamma = \text{const. mit } \gamma = \frac{c_p}{c_V} \tag{3}$$

gilt. (8 Punkte)

c) Bestimmen Sie κ_S für das ideale Gas und zeigen Sie

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{c_p}{c_V}. \tag{4}$$

(3 Punkte)

Im Folgenden soll (4) allgemein gezeigt werden. Wir betrachten also nicht mehr nur das ideale Gas.

d) Zeigen Sie

$$\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_S = -\frac{\frac{\partial S}{\partial p}\big|_V}{\frac{\partial S}{\partial V}\big|_p} \tag{5}$$

und eine analoge Relation für $\partial V/\partial p$ bei konstantem T. Standardrelationen für partielle Ableitungen dürfen dabei ohne Beweis verwendet werden. (6 Punkte)

e) Verwenden Sie schließlich (1) und die Relationen aus d) um (4) allgemein zu zeigen. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Wellenfunktion und Potential

Betrachtet wird ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einem unbekannten Potential $V(x)$. Die beiden Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des zeitunabhängigen Hamiltonoperators mit den niedrigsten Energieeigenwerten $E_0 = 2\hbar^2/mL^2$ und $E_1 > E_0$ seien

$$\psi_0(x) = a_0 \sin^2(X)\,, \qquad \psi_1(x) = a_1 \sin^2(X) \cos X\,, \qquad X = \frac{x}{L}\,. \tag{1}$$

Zur Vereinfachung wurde in den Argumenten der Funktionen die dimensionslose Größe $X = x/L$ verwendet, wobei L eine Längenskala ist.

a) Berechnen Sie das Potential $V(x)$. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Energieeigenwert E_1 für die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ den Wert $E_1 = \frac{9\hbar^2}{2mL^2}$ hat. (6 Punkte)

c) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$. Bestimmen Sie die Periodizität in x und legen Sie einen sinnvollen Wertebereich für die Ortskoordinate x fest, der $x = \frac{\pi}{2}L$ enthält. (4 Punkte)

d) Berechnen Sie das Verhältnis des Erwartungswertes $\bar{E}_{\text{pot}}$ der potentiellen Energie zum Erwartungswert $\bar{E}_{\text{kin}}$ der kinetischen Energie im Zustand mit Wellenfunktion ψ_0. (5 Punkte)

e) Die Energieeigenwerte der angeregten Zustände des Potentials sind allgemein von der Form $E_n = c(n+2)^2$, mit einer Konstanten c. Für welche Zustände und welches L ergibt sich eine Übereinstimmung mit denen des unendlichen Kastenpotentials mit Breite L? (4 Punkte)

Hilfreiche Integrale:

$$\int_0^{\pi} \sin^4(y)\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{8}\,, \qquad \int_0^{\pi} \sin^2(y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 2: Sequenz von Messungen

Gegeben sei ein quantenmechanisches Spin-$\frac{1}{2}$-System mit Basiszuständen

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei ferner

$$M_\phi = \cos(2\phi)\sigma^z + \sin(2\phi)\sigma^y$$

ein von einem Winkelparameter ϕ abhängiger Messoperator, wobei

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen sind.

a) Zeigen Sie, dass M_ϕ hermitesch ist, und berechnen Sie dessen Eigenwerte λ_1 und λ_2. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie dazugehörige normierte Eigenvektoren $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$.
Hinweis: Es gilt $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi$ sowie $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$. (5 Punkte)
Zur Kontrolle: $|\phi\rangle_1 = \cos\phi|\uparrow\rangle + i\sin\phi|\downarrow\rangle$

c) An dem System, das sich anfangs im Zustand $|\uparrow\rangle$ befindet, wird eine Messung mit M_ϕ durchgeführt. In welchen Zuständen befindet sich das System nach der Messung mit welcher Wahrscheinlichkeit? (3 Punkte)

d) Nehmen Sie an, dass sich das System nach der ersten Messung im Zustand $|\phi\rangle_1$ befindet. Es wird nun eine weitere Messung mit $M_{\phi+\epsilon}$ durchgeführt, wobei $0 < \epsilon \ll 1$ ist. Berechnen Sie die Zustände des Systems und deren Wahrscheinlichkeiten nach der zweiten Messung bis zur zweiten Ordnung in ϵ. (7 Punkte)

e) Betrachten Sie ausgehend vom Zustand $|\uparrow\rangle$ eine Sequenz von N Messungen mit den Messoperatoren $M_\epsilon, M_{2\epsilon}, M_{3\epsilon}, \ldots, M_{N\epsilon}$, wobei $\epsilon = \frac{\pi}{2N}$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(N)$, bei *jeder* dieser Messungen den Eigenwert 1 zu erhalten? Welchen Endzustand erhält man im Limes $N \to \infty$? Wie interpretieren Sie das Resultat? (5 Punkte)