## Themenschwerpunkt A

### Mechanik

### Aufgabe 1: Anharmonische Feder

Eine Masse $m$ wird im Schwerefeld der Erde an einer anharmonischen Feder aufgehängt. In der Ruhelage der Masse wird die Feder durch die Masse um die Länge $z_0$ gedehnt. Die masselose Feder soll die potentielle Auslenkungsenergie

$$V(z) = \frac{C}{4} z^4$$

haben, wobei $z$ die Länge der gedehnten Feder bezeichnet und $C$ eine dimensionsbehaftete Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Auslenkung $z_0$ der Feder im Potenzial $-mgz$ der Schwerkraft, wenn die Masse anschließend ruht. Dabei soll die positive $z$-Achse in Richtung der Schwerkraft zeigen.
(3 Punkte)

b) Betrachten Sie nun *kleine* Schwingungen $u(t) = z(t) - z_0$ um die Ruhelage $z_0$. Zur Zeit $t = 0$ soll sich die Masse in Ruhe am Ort $z(0)$ befinden.

Berechnen Sie die Auslenkung $z(t)$ der Schwingung als Funktion der Zeit $t$. Geben Sie die Frequenz $\omega$ der harmonischen Schwingung an.
(7 Punkte)

c) Nun sollen größere Auslenkungen betrachtet werden. $E$ sei die Gesamtenergie des Teilchens. Zeigen Sie, dass das Teilchen für $E = 0$ zwischen $z = 0$ und $z = A$ schwingt und berechnen Sie die Amplitude $A$.
(5 Punkte)

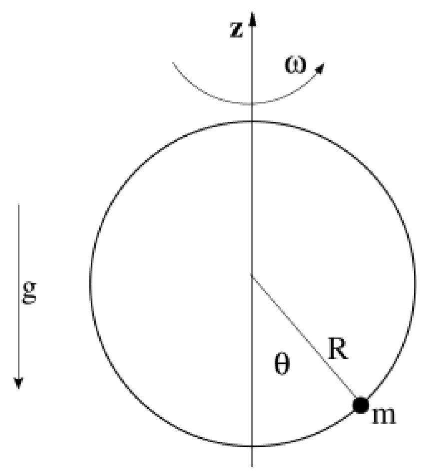
d) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer $T$ für $E = 0$ durch den Ausdruck

$$T = 2\left(\frac{m}{2Cg^2}\right)^{1/6} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^4}}.$$

bestimmt ist. (10 Punkte)

**Aufgabe 2: Masse auf rotierendem Ring**

Eine Punktmasse $m$ gleitet reibungsfrei auf einem Ring mit Radius $R$, der um die vertikale $z$-Achse durch den Mittelpunkt des Ringes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotiert.




a) Wählen Sie für den Ort der Masse $m$ die Darstellung $\vec{r} = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$. Berechnen Sie damit die Lagrangefunktion. Wie lautet das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\theta)$ für $m$? (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung mit $\omega_c^2 = g/R$ folgende Form hat:

$$\ddot{\theta} + \left(\omega_c^2 - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0\,. \tag{1}$$

(3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die stationären Lösungen $\theta_s$ der Bewegungsgleichungen für $\omega > \omega_c$ und für $\omega < \omega_c$. Zeigen Sie, welche dieser stationären Lösungen stabil sind.

Hinweis: Entwickeln Sie hierfür z. B. $V_{\text{eff}}(\theta)$ mit $\theta = \theta_s + \vartheta$ bis zur Ordnung $\vartheta^2$. (9 Punkte)

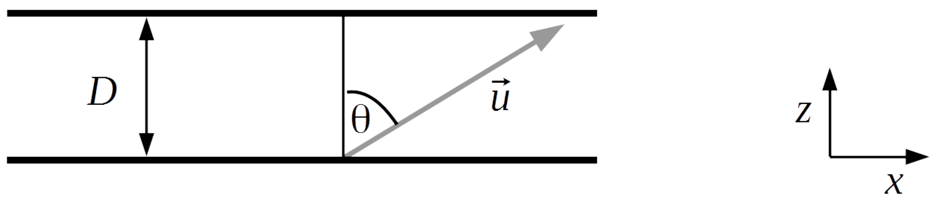
d) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz $\Omega$ für kleine Schwingungen $\vartheta(t)$ um die jeweilige stabile Lösung. (7 Punkte)

## Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

### Aufgabe 1: Unendliche Leiterplatten und Wellen

Zwei zur $(x, y)$-Ebene parallele, unendlich ausgedehnte Platten aus ideal leitendem Material sind bei $z = 0$ und $z = D$ angebracht, dazwischen befinde sich ein Vakuum.




a) Welche Randbedingungen erfüllt das elektrische Feld $\vec{E}$ an den beiden Leiterplatten? (Begründung) (2 Punkte)

b) Das elektrische Feld im Raum zwischen den Platten soll durch die Überlagerung

$$\vec{E} = \vec{e}_y \,\mathrm{Re}\left(A_- E^{(-)} + A_+ E^{(+)}\right) , \qquad E^{(\pm)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega t + \beta x \pm \alpha z)} , \tag{1}$$

zweier ebener Wellen beschrieben sein, mit reellen, positiven Parametern $\alpha, \beta, \omega$, und komplexen Amplituden $A_\pm$. Geben Sie die Wellengleichung an, und zeigen Sie die Beziehung $\omega^2 = c^2(\alpha^2 + \beta^2)$. Für welche Parameter $A_\pm$ und $\alpha$ sind die Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = D$ erfüllt? (5 Punkte)

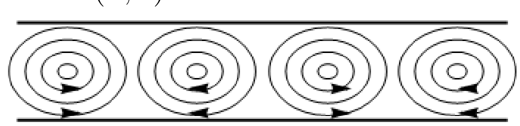
c) Bestimmen Sie die Ebenen konstanter Phase der Welle $\vec{E}^{(+)}$. Zeigen Sie, dass der Winkel $\theta$ zwischen der $z$-Achse und der Ausbreitungsrichtung $\vec{u}$ der Ebenen konstanter Phase die Relation

$$\cos\theta = \frac{\alpha c}{\omega} , \tag{2}$$

erfüllt. (7 Punkte)

d) Leiten Sie aus der Gleichung (2) eine untere Grenze für die Frequenz $\omega$ der ebenen Wellen her. Interpretieren Sie diese Bedingung im Zusammenhang mit der Ausbreitung der Welle. (7 Punkte)

e) Die folgende qualitative Skizze zeigt eine mögliche Mode für die magnetische Induktion $\vec{B}$ zwischen den Leiterplatten in der $(x, z)$-Ebene für feste Zeit $t$.



Begründen Sie die wesentlichen Aspekte des Verlaufs der Magnetfeldlinien. (4 Punkte)

## Aufgabe 2: Dielektrischer Zylinder in homogenem elektrischem Feld

Ein unendlich langer dielektrischer Zylinder mit Radius $R$ und Ausrichtung entlang der $z$-Achse sei durch eine homogene relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_\mathrm{r}$ charakterisiert. Außerhalb des Zylinders sei $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$. Der Zylinder befinde sich in einem externen homogenen elektrischen Feld $\vec{E}^\mathrm{ext} = E_0\vec{e}_x$. Es soll das elektrische Potential der Anordnung unter Berücksichtigung der im Zylinder auftretenden Polarisation berechnet werden.

a) Begründen Sie unter Verwendung geeigneter Maxwellgleichungen und Integralsätze in Worten, dass an der Oberfläche des Zylinders die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ stetig sind. Geben Sie dabei auch die verwendete Integrationskontur bzw. das Integrationsvolumen sowie die sich damit ergebenden Integralbeiträge an. (8 Punkte)

b) Das elektrische Potential der gesamten Anordnung hat in Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z)$ die Form $\Phi(\rho, \varphi, z) = \Phi^\mathrm{ext}(\rho, \varphi, z) + f(\rho)\cos(\varphi)$. Geben Sie das externe Potential $\Phi^\mathrm{ext}$ in Zylinderkoordinaten an, wobei das Potential im Ursprung verschwinden soll. Begründen Sie zudem, warum der zweite Term nicht von $z$ abhängen darf. (3 Punkte)

c) Welcher Gleichung muss das Potential im Zylinderinnern und außerhalb des Zylinders genügen? Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzansatzes die zulässigen Funktionen $f(\rho)$. Wie lautet damit die allgemeine Form der Potentiale $\Phi^{(\mathrm{i})}$ innerhalb und $\Phi^{(\mathrm{a})}$ außerhalb des Zylinders? (7 Punkte)

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Anschlussbedingungen auf dem Zylindermantel das Potential $\Phi(\rho, \phi, z)$ im gesamten Raum. Was ergibt sich für das Potential im Zylinderinnern im Grenzfall $\varepsilon_\mathrm{r} \to \infty$? (7 Punkte)

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

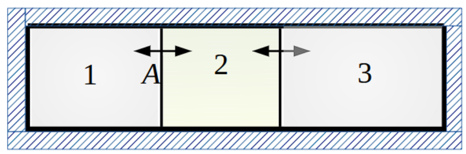
$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

## Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

### Aufgabe 1: Gleichgewicht

Ein Volumen $V$ sei von der Umgebung thermisch isoliert und undurchlässig. Es ist anfangs durch thermisch isolierte und undurchlässige Wände an festen Positionen in drei Teilräume $V_i$, $i = 1, 2, 3$ aufgeteilt, in denen sich jeweils $N_i$ Teilchen dreier *nicht-idealer* Gase der inneren Energien $U_i$ befinden.

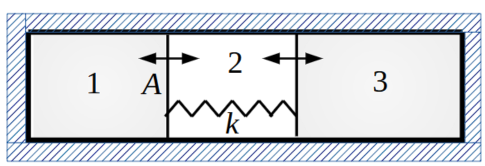



Zur Zeit $t = 0$ werden die Wände horizontal beweglich gemacht und die thermische Isolierung entfernt, sodass die Teilräume Volumen und Wärmeenergie austauschen können. Berechnet werden soll der Gleichgewichtszustand, der sich nach einiger Zeit einstellt. Die Fläche der Wände sei $A$, die Breite des Volumens $V_2$ sei $x$.

a) Geben Sie drei Erhaltungsgrößen des Gesamtsystems während der Zustandsänderung an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand als das Extremum des geeigneten thermodynamischen Potentials, und geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an die Zustandsvariablen in den drei Volumina an. (10 Punkte)

c) In einer modifizierten Anordnung wird das Gas im Volumen 2 durch eine ideale Feder der Ruhelänge $x_0$ und der Federkonstanten $k$ ersetzt.




Es finde nach wie vor Volumen- und Wärmeaustausch zwischen den einzelnen Kammern statt. Geben Sie die Berechnung des Gleichgewichtszustandes für diesen Fall an, und interpretieren Sie die erhaltenen Gleichungen. Ist das Gleichgewicht eindeutig? (12 Punkte)

## Aufgabe 2: Joule'scher Kreisprozess

Der reversible Joule'sche Kreisprozess setzt sich zusammen aus zwei Isobaren $p = p_{1,2}$ (mit $p_1 > p_2$) und zwei Adiabaten. Die Arbeitssubstanz sei ein ideales Gas mit konstanten Wärmekapazitäten $C_V$ und $C_p$. In dieser Aufgabe soll der Wirkungsgrad $\eta$ des Joule'schen Kreisprozesses bestimmt werden.

a) Skizzieren Sie den Joule'schen Kreisprozess im $pV$-Diagramm mit dem richtigen Umlaufsinn, wenn damit Wärme (teilweise) in Arbeit umgewandelt wird. (2 Punkte)

b) Weisen Sie die Beziehung $C_p = C_V + Nk$ zwischen den Wärmekapazitäten nach. Hierbei ist $N$ die Anzahl der Gasmoleküle und $k$ die Boltzmann-Konstante. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass längs einer Adiabate des idealen Gases das Produkt $pV^\gamma$ konstant ist. Welchen Wert hat der Exponent $\gamma$? (5 Punkte)

d) Drücken Sie die pro Zyklus zu- und abgeführten Wärmemengen $Q_1$ und $Q_2$ sowie den Wirkungsgrad $\eta$ durch die Temperaturen $T_{1,2}$ bei $p_1$ und $T_{3,4}$ bei $p_2$ (im Umlaufsinn) an den vier Eckpunkten des Kreisprozesses aus. (5 Punkte)

e) Leiten Sie mithilfe des zweiten Hauptsatzes eine Beziehung zwischen diesen vier Temperaturen her. Folgern Sie hieraus, dass der Wirkungsgrad $\eta$ nur vom Verhältnis der Temperaturen an zwei Eckpunkten auf einer Adiabate abhängt. (5 Punkte)

f) Zeigen Sie schließlich, dass der Wirkungsgrad $\eta$ folgendermaßen als Funktion des Druckverhältnisses $p_2/p_1 < 1$ geschrieben werden kann:

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}$$

(4 Punkte)

# Themenschwerpunkt D

## Quantenmechanik

**Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator mit Störpotential**

Bei einem eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz $\omega$ lautet die Eigenwertgleichung für die Energieeigenwerte und normierten Eigenzustände: $H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle = \hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big)|n\rangle$ mit $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
Der Absteigeoperator $\hat{b}$ ist über die Relation $\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ definiert.

a) Leiten Sie durch Betrachtung des Komplex-konjugierten eines geeigneten Matrixelements von $\hat{b}$ die Beziehung $\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ für den adjungierten Aufsteigeoperator $\hat{b}^\dagger$ her. (5 Punkte)

b) Nun werde zum Hamiltonoperator $H_0$ ein Störpotential der Form:

$$\delta V = \lambda x\,, \qquad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$$

addiert. Die Energieeigenwerte von $H_0 + \delta V$ lassen sich nach Ordnungen des Störpotentials entwickeln: $E_n = E_n^{(0)} + \delta E_n^{(1)} + \delta E_n^{(2)} + \dots$ Zeigen Sie, dass die Energieverschiebung in erster Ordnung $\delta E_n^{(1)} = \langle n|\delta V|n\rangle$ verschwindet. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Energieverschiebung im $n$-ten Niveau in zweiter Ordnung mittels der Formel:

$$\delta E_n^{(2)} = \sum_{n' \neq n} \frac{|\langle n'|\delta V|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'}}$$

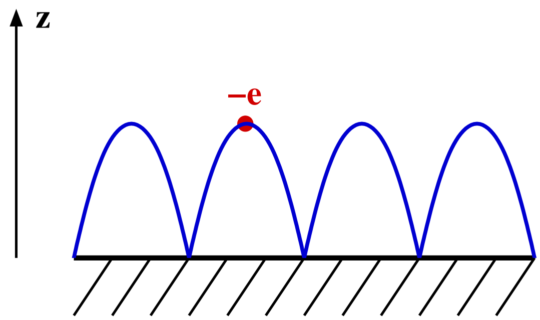
(7 Punkte)

*Zur Kontrolle:* $\delta E_n^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$

d) Zeigen Sie durch Betrachtung des gesamten Hamiltonoperators $H_0 + \delta V$ in der Ortsdarstellung, dass sich mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c) bereits das exakte Energiespektrum $E_n$ ergibt. Reproduzieren Sie dieses Resultat, in dem Sie von der Operatordarstellung $H_0 = \hbar\omega(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2})$ ausgehen. Konstruieren Sie hierzu verschobene Operatoren $\hat{b} + c$ und $\hat{b}^\dagger + c$ mit $c$ einer Zahl. (8 Punkte)

## Aufgabe 2: Elektron über leitendem Block

Wir betrachten ein Elektron der Ladung $-e$ und Masse $m_e$, das auf einem ebenen (in der $x$-$y$-Ebene), leitenden, geerdeten Block unendlicher Dicke hüpft, siehe Abbildung, in den es nicht eindringen kann. Dieses Hüpfen kommt dadurch zustande, dass das Elektron von seiner Spiegelladung $e$ angezogen wird, aber an der leitenden Platte elastisch abprallt. Die Gravitation wird vernachlässigt. Das resultierende Potential, das das Elektron fühlt, ist $V(z) = -C/4z$ mit $C = e^2/4\pi\epsilon_0$. Die primäre Aufgabe ist die Bestimmung des niedrigsten Energieeigenwerts und der zugehörigen Wellenfunktion.




a) Wie lautet die (dreidimensionale) Schrödingergleichung in kartesischen Koordinaten, die die Energieeigenzustände erfüllen müssen? (2 Punkte)

b) Wie kann man die Wellenfunktion (maximal) faktorisieren? Wie sehen die Schrödingergleichungen aus, die die verschiedenen Faktoren erfüllen müssen? Was sind die möglichen Energieeigenwerte und Eigenfunktionen der Bewegung in $x$- und $y$-Richtung. Bezeichnen Sie die auftretende Funktion von $z$ als $Z(z)$ (7 Punkte)

c) Welche Randbedingung muss $Z(z)$ erfüllen? (2 Punkte)

d) Für das Wasserstoff-Problem (Elektron, gebunden an eine unendlich schwere Punktladung mit Ladung $Qe$) lautet die Schrödingergleichung für die Radialfunktion $R(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\,\frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}\Big(r\;R(r)\Big) \;-\; \frac{QC}{r}\,R(r) \;+\; \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m_e r^2}\,R(r) = E_r\;R(r) \quad .$$

Durch welche Wahl von $Q$ und $\ell$ und Substitution für $R(r)$ kann man dies in die Form der Schrödigergleichung für $Z(z)$ bringen? (6 Punkte)

e) Der Grundzustand des Wasserstoff-Problems hat die Energie und radiale Wellenfunktion:

$$E_1 = -\frac{CQ^2}{2a_B}$$

$$R(r) = 2\left(\frac{Q}{a_B}\right)^{3/2} e^{-\frac{Qr}{a_B}}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_B = \hbar^2/m_e C$. Lesen Sie durch Vergleich mit den Schrödinger-Gleichungen des hüpfenden Elektrons dessen niedrigste Energie und die dazugehörende Wellenfunktion $Z(z)$ ab. (4 Punkte)

f) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $z$ in diesem Zustand. (*Hinweis: hierbei sollten sich etwaige Normierungsfaktoren kürzen*) (4 Punkte)