Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Erzwungene Schwingung

Betrachtet wird ein Punktteilchen in einer Dimension mit Ortskoordinate x und Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = b\,\cos(c\,t)\ , \tag{1}$$

für vier reelle, positive Konstanten (ω, λ, b, c) mit $\lambda < \omega$.

a) Geben Sie die physikalische Bedeutung der vier Konstanten und ihre Maßeinheiten an. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass eine komplexe Lösung $x(t)$ der homogenen Bewegungsgleichung für $b = 0$ von der Form

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}\,,$$

existiert, und bestimmen Sie die möglichen komplexen Exponenten α. (4 Punkte)

c) Geben Sie nun die allgemeine *reelle* Lösung $x_H(t)$ der homogenen Bewegungsgleichung für $b = 0$ an. (4 Punkte)

d) Betrachten Sie die nun die inhomogene Gleichung, zunächst für den Spezialfall $c = 0$. Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für diesen Fall an, und interpretieren Sie diese. (5 Punkte)

e) Bestimmen Sie nun eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichung für $c \neq 0$. Betrachten Sie hierzu zunächst wieder eine komplexe Lösung der Gleichung $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\,t}$, und erläutern Sie, warum der Realteil der komplexen Lösung die Gleichung (1) löst. Schreiben Sie den Realteil in der Form

$$x_S(t) = A_S \cos(ct + \delta_S)\,, \tag{2}$$

und geben Sie die Abhängigkeit der Parameter (A_S, δ_S) von den vier Konstanten (ω, λ, b, c) an. Wie lautet die allgemeine (reelle) Lösung der Bewegungsgleichung (1) ausgedrückt durch x_H und x_S? (8 Punkte)

Aufgabe 2: Zweidimensionales harmonisches Potential

Eine Masse m bewege sich in zwei Dimensionen in einem isotropen harmonischen Potential der Form

$$V(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2 \,, \tag{1}$$

wobei r der Abstand vom Koordinatenursprung sei.

a) Welche zwei Erhaltungsgrößen gibt es in diesem Problem? Geben Sie die entsprechenden Ausdrücke in Polarkoordinaten (r, φ) an. (5 Punkte)

b) Leiten Sie aus den Ausdrücken von Teilaufgabe a) das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ für die Radialbewegung her. Skizzieren Sie das effektive Potential. (5 Punkte)

c) Das Potential (1) lässt eine Kreisbewegung um den Koordinatenursprung zu. Bestimmen Sie den zugehörigen Radius R mit Hilfe des effektiven Potentials aus Teilaufgabe b). Beschreiben Sie, wie sich dieser Radius mit Hilfe einer Kraftbetrachtung bestimmen lässt. (5 Punkte)

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des effektiven Potentials die Umkehrpunkte $r_\pm$ der Radialbewegung mit $r_+ > r_-$ bei gegebener Energie E. Nutzen Sie dann den Energieerhaltungssatz für die Radialbewegung, um eine Lösung $r^2(t)$ zu bestimmen, für die zur Zeit $t = 0$ der Abstand vom Ursprung maximal ist. Welche Zeit T benötigt die Masse, um von einem Punkt maximalen Abstands vom Ursprung zum Punkt minimalen Abstands zu gelangen? (10 Punkte)

   Hinweis: Folgendes Integral mit $u_- \le u \le u_+$ kann bei der Rechnung nützlich sein

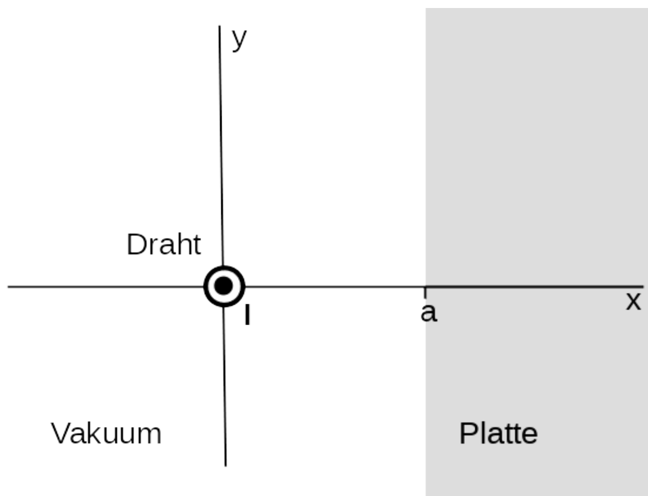
$$\int_{u_+}^{u} \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{(u_+ - u')(u' - u_-)}} = -\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{2u - u_+ - u_-}{u_+ - u_-}\right) . \tag{2}$$

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Magnetische Induktion bei einer Draht-Platten-Kombination

Ein dünner Draht befindet sich auf der z-Achse. Durch ihn fließt ein Strom I in positive z-Richtung. Die Oberfläche einer Platte liegt parallel zur (y, z)-Ebene bei $x = a$ (siehe Skizze), und es wird angenommen, dass die Platte den Bereich $x \geq a$ füllt. Die Permeabilität in der Platte $\mu_0\mu_P$ sei viel größer als im Vakuum, d.h. die relative Permeabilität ist sehr groß, mit $\mu_P \to \infty$. Nehmen Sie an, dass es keine freien Ladungen im Bereich $x \geq a$ gibt.



a) Berechnen Sie im kartesischen Koordinatensystem die drei Komponenten der magnetischen Induktion $\vec{B}$ außerhalb des Drahtes, die (nur) durch den Strom I im Draht in Abwesenheit der Platte erzeugt wird. (Hinweis: $\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$) (6 Punkte)

b) Welche Randbedingungen müssen für die Normalkomponente und die Tangentialkomponenten der magnetischen Induktion $\vec{B}$ auf der Plattenoberfläche bei $x = a$ gelten? (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im Vakuum, d.h. im Bereich $x < a$, in Anwesenheit der Platte. (Hinweis: Spiegelmethode) (6 Punkte)

d) Welche Kraft übt die Platte auf den Draht pro Längeneinheit des Drahtes aus? (Hinweis: Stromdichte im Draht $\vec{J} = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$) (6 Punkte)

Aufgabe 2: Feld einer Halbkugelschale

In dieser Aufgabe soll das elektrostatische Potential mit bestimmten Randbedingungen untersucht werden. Dazu sei zunächst angemerkt, dass die allgemeine axialsymmetrische Lösung der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ die Form

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

hat, wobei Kugelkoordinaten r, θ, φ mit der z-Achse als Symmetrieachse gewählt wurden. Die Legendre-Polynome $P_l(x)$ und ihre Normierung sind durch

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x, \dots, \qquad \int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \tag{2}$$

gegeben.

a) Geben Sie die Maxwellgleichung an, die für eine statische Situation die Existenz eines Potentials $\Phi(\vec{x})$ für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ garantiert. Zeigen Sie mithilfe einer weiteren Maxwellgleichung, dass dann gilt:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \tag{3}$$

(4 Punkte)

b) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für das elektrostatische Potential Φ im Außenraum einer im Ursprung zentrierten Kugelschale S_R mit Radius R:

$$\Phi(r = R, \theta, \phi) = V(\theta) \qquad \text{und} \qquad \Phi(r, \theta, \phi) \longrightarrow 0 \text{ für } r \to \infty. \tag{4}$$

Geben Sie eine Entwicklung von Φ in Potenzen von r^{-1} an, indem Sie die Koeffizienten in (1) geeignet wählen, bzw. durch $V(\theta)$ ausdrücken. Hinweis: Sie können z.B. die Entwicklung von $V(\theta)$ in die $P_l(\theta)$ betrachten. (9 Punkte)

Kontrolle:

$$B_l \propto R^{l+1} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) V(\theta) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

c) Zeigen Sie für den Spezialfall $V(\theta) = q/(4\pi\epsilon_0 R)$, dass die Entwicklung aus Teilaufgabe b) das Coulombpotential einer Punktladung q reproduziert. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie für eine Halbkugelschale mit konstantem Potential, d.h.

$$V(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{R} & \text{für } 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}, \tag{6}$$

die zwei für große r führenden Terme (Monopol- und Dipolterm) der Entwicklung des Potentials $\Phi(r,\theta)$ aus Teilaufgabe b).

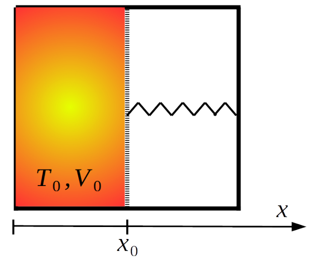
(6 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Expansion eines Photonengases

Ein Photonengas der Temperatur T_0 mit Volumen V_0 befindet sich in einem thermisch isolierten Gefäß, das durch eine anfangs fixierte Trennwand der Fläche A in zwei Hälften geteilt ist. An der Wand ist eine Feder befestigt, die anfangs ungespannt ist, und die Federkonstante f hat. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Fixierung gelöst, sodass das Gas die Wand gegen den Widerstand der Feder nach rechts drückt.



Nachdem sich ein neues Gleichgewicht eingestellt hat, ist die Wand um $\Delta x = x - x_0 > 0$ nach rechts verschoben. Die Zustandsgleichungen für das Gas sind

$$U = \sigma T^4 V, \qquad P = \frac{\sigma}{3} T^4, \qquad S = \frac{4\sigma}{3} V T^3 \ ,$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante σ. Berechnet werden sollen die Zustandsgrößen P_1, T_1, V_1, S_1 des Photonengases im neuen Gleichgewichtszustand.

a) Stellen Sie die Gleichung für das Kräftegleichgewicht in diesem Zustand auf. (3 Punkte)

b) Verwenden Sie einen Hauptsatz, um die innere Energie U_1 des Photonengases im Gleichgewichtszustand nach Lösen der Fixierung in Abhängigkeit von Δx zu berechnen. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie aus der Energieerhaltung und dem Kräftegleichgewicht die Auslenkung Δx der Wand in Abhängigkeit von x_0 und U_0. (9 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass das Resultat aus Teilaufgabe a) auch aus der Maximierung der Entropie $S(U, V)$ bezüglich der Auslenkung Δx folgt. (9 Punkte)

Aufgabe 2: Kritisches Verhalten des van der Waals-Gases

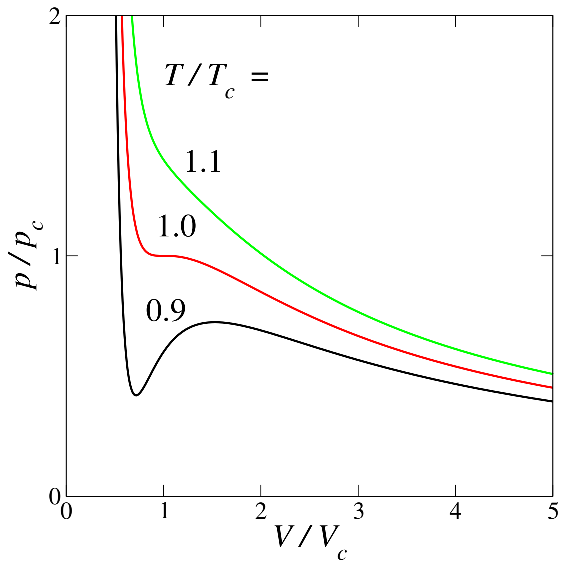
Die Zustandsgleichung des van der Waals-Gases ist

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT\,, \tag{1}$$

mit der Gaskonstante R und der Molzahl n. Die Koeffizienten κ_T der isothermen Kompressibilität und α der thermischen isobaren Volumenausdehnung sind gegeben durch

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\,, \tag{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\,. \tag{3}$$



a) Zeigen Sie die alternative Form

$$\alpha = \kappa_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\,. \tag{4}$$

(4 Punkte)

Am kritischen Punkt der van der Waals-Isotherme verschwinden deren Steigung und Krümmung.

b) Zeigen Sie den Zusammenhang der Konstanten a und b mit den kritischen Größen V_c und T_c,

$$a = \frac{9}{8n}RT_cV_c\,, \tag{5}$$

$$b = \frac{1}{3n}V_c\,. \tag{6}$$

Bestimmen Sie p_c. (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie κ_T als Funktion von T für $V = V_c$. Wie verhält sich κ_T als Funktion von T bei festem V_c? (4 Punkte)

d) Warum kann das obige Ergebnis für κ_T nur für Temperaturen $T \geq T_c$ gelten? Was passiert mit einem realen Gas in der Nähe der Divergenz von κ_T? (6 Punkte)

e) Bestimmen Sie den Koeffizienten α als Funktion von T für $V \geq V_c$. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen im Dreieckspotential

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, dessen zugänglicher Bereich wegen einer undurchdringlichen Wand bei $x = 0$ auf den Bereich $x \geq 0$ beschränkt ist, und dort dem Einfluss einer potentiellen Energie der Form

$$V(x) = \frac{\hbar^2 w^3}{2m} x \quad \text{mit} \quad w > 0 \tag{1}$$

unterliegt.

Zur Abschätzung der Grundzustandsenergie soll für die zugehörige Wellenfunktion ein Ansatz der Form

$$\phi(x) = N x \, \mathrm{e}^{-x/a} \tag{2}$$

mit einem reellen Parameter a gemacht werden.

a) Welche Einheiten tragen die Konstanten w und a? (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N der Wellenfunktion $\phi(x)$. (3 Punkte)

c) Wie lautet die (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung? Bestimmen Sie den zu der angegebenen Wellenfunktion gehörigen Erwartungswert $\langle H \rangle = E$ der Energie. (8 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Konstante a so, dass der Erwartungswert $\langle H \rangle = E$ der Energie minimal wird. (Ritz'sches Variationsverfahren). (5 Punkte)

e) Fertigen Sie eine Skizze mit dem Potential V, dem Erwartungswert $\langle H \rangle = E$ der Energie, und der Wellenfunktion ϕ an. Ohne weitere Rechnung (siehe Teilaufgabe c)) kann man angeben, an welcher Stelle $x = x_0$ die Krümmung von $\phi(x)$ das Vorzeichen wechselt. Warum ist hier $V(x_0) = E$ nicht erfüllt? (7 Punkte)

Hinweis:

$$\int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = n! \, .$$

Aufgabe 2: Drehimpuls Messung

Der Drehimpulsoperator $\vec{L}$ hat die drei Komponenten L_x, L_y, L_z. Die Eigenzustände $|lm\rangle$ zu den Operatoren $\vec{L}^2$ und L_z bilden eine Basis des entsprechenden Hilbert-Raums.

a) Welche Eigenwerte haben die beiden Operatoren $\vec{L}^2$ und L_z? (3 Punkte)

b) Berechnen Sie das Schwankungsquadrat $\Delta^2 L_x = \langle (L_x - \langle L_x \rangle)^2 \rangle$ für die Zustände $|lm\rangle$. Sie dürfen verwenden, dass in diesen Zuständen die folgenden Eigenschaften gelten: $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ und $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle$. (8 Punkte)

Kontrolle: $\Delta^2 L_x = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2]$

c) Im Folgenden werden nur die beiden Eigenzustände $|11\rangle$ und $|10\rangle$ zu $l = 1$ und $m = 1, 0$ betrachtet. Entwickeln Sie diese beiden Zustände jeweils nach der Eigenbasis zu L_x: $|1m_x\rangle$ mit $m_x = 1, 0, -1$. Verwenden Sie das vorige Ergebnis zu $\langle L_x^2 \rangle$, um die Betragsquadrate der drei Entwicklungskoeffizienten zu berechnen. (9 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in den beiden Eigenzuständen zu L_z bei einer Messung von L_x die Werte $+\hbar, 0, -\hbar$ zu messen? (5 Punkte)