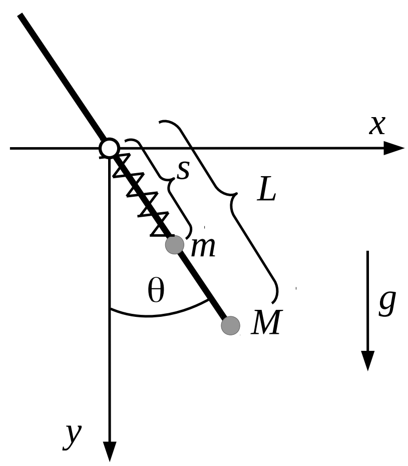
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Ebenes Pendel mit zwei Massen

Auf einer starren Pendelstange sind zwei Massen m und M angebracht (siehe Abbildung). Die erste Masse m kann sich reibungslos entlang des (masselosen) Stabes bewegen und ist am Drehpunkt an einer Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge ℓ befestigt. Die zweite Masse M ist fest im Abstand L vom Drehpunkt angebracht. Die Auslenkung s kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. In geeigneten Koordinaten findet die Bewegung in der (x, y)-Ebene statt, mit dem Drehpunkt im Ursprung. Auf die Massen wirkt die Schwerkraft in die y-Richtung.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den verallgemeinerten Koordinaten θ und s auf. Verwenden Sie die in der Skizze eingetragenen Koordinaten und Bezeichungen. (5 Punkte)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. (5 Punkte)

Hinweis zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: Für $m = M$ reduzieren sich die Gleichungen zu $m(s^2 + L^2)\ddot{\theta} + 2ms\dot{s}\dot{\theta} + mg(s + L)\sin\theta = 0$ und $m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(s - \ell) = 0$.

c) Im Folgenden wird $m = M$ gesetzt.
Geben Sie die drei zeitunabhängigen Lösungen der Bewegungsgleichungen an. (8 Punkte)

d) Geben Sie explizit eine einfache zeitabhängige Lösung $s(t)$ an. (7 Punkte)

Aufgabe 2: Bahn und Potential

Betrachtet werde die Bewegung eines Teilchens der Masse m in der (x, y)-Ebene unter dem Einfluss eines Zentralpotentials $V(r)$.

a) Zeigen Sie explizit, dass das Drehmoment $\vec{N}$ (bezüglich des Ursprungs) verschwindet. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Komponente L_z des Drehimpulses senkrecht zur Bewegungsebene und die Energie E in ebenen Polarkoordinaten r, φ an. (3 Punkte)

c) Das Teilchen bewege sich auf einer Bahn $r(\varphi)$. Zeigen Sie, dass man aus der Form der Bahn auf die potentielle Energie

$$V(r) = E - \frac{L_z^2}{2mr^4}\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right] \tag{1}$$

schließen kann. (5 Punkte)

d) Gegeben sei nun eine Bahn

$$r = 2R\cos\varphi \quad \text{mit} \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass diese Bahn eine Kreisbahn darstellt, welche durch den Ursprung verläuft. Fertigen Sie eine Skizze an. Bestimmen Sie die Position des Kreismittelpunktes. (4 Punkte)

e) Bestimmen Sie das Potential $V(r)$ für diese Bahn. (5 Punkte)

f) Skizzieren Sie das effektive Potential für die Radialbewegung sowie dessen zwei Anteile. Identifizieren Sie die Energie E für die durch (2) beschriebene Bahn. Welche qualitativ anderen Bewegungsformen sind in diesem Potential $V(r)$ möglich? (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Elektrischer Dipol vor geerdeter Metallplatte

Über einer in der (x, y)-Ebene liegenden, geerdeten (unendlich ausgedehnten) Metallplatte befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) ein in x-Richtung zeigender, elektrischer Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p, 0, 0)$.

a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Methode der Spiegelladungen das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$. Überprüfen Sie explizit, dass die Randbedingung auf der geerdeten Metallplatte erfüllt ist. (6 Punkte)

Hinweis: Das Potential eines am Ursprung platzierten elektrischen Dipols $\vec{p}$ lautet

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \, |\vec{r}\,|^3} \, .$$

b) Die Ladungsdichte auf einer Grenzfläche (mit Normalenvektor $\vec{n}$) ist durch den Sprung der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung bestimmt: $\sigma = \vec{n} \cdot \Delta\vec{D}$. Zeigen Sie, dass die auf der geerdeten Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ durch

$$\sigma(x, y) = -\frac{3pa\,x}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{5/2}}$$

gegeben ist. (8 Punkte)

c) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$, welche die Flächenladungsdichte auf der Metallplatte auf den elektrischen Dipol $\vec{p}$ am Ort $\vec{a}$ ausübt, indem Sie von der entsprechenden Gegenkraft ausgehen. Welche Richtung von $\vec{F}$ erwarten Sie rein aus Symmetrieüberlegungen? (11 Punkte)

Hinweis: Es ist vorteilhaft, das auftretende Flächenintegral in Polarkoordinaten auszuwerten. Benutzen Sie hierbei die Formel

$$\int \mathrm{d}\rho \, \frac{\rho^3}{(\rho^2 + a^2)^5} = -\frac{4\rho^2 + a^2}{24(\rho^2 + a^2)^4} \, .$$

Aufgabe 2: Potential in einer Diode

Zwei Metallplatten der Fläche A sind an den Punkten $x = 0$ und $x = \ell$ senkrecht zur x-Achse angebracht. Das elektrische Potential sei $\phi(x = 0) = 0$ auf der linken und $\phi(x = \ell) = \phi_0$ auf der rechten Platte. Das Medium zwischen den Platten sei das Vakuum. Die linke Platte emittiert Elektronen, die durch das elektrische Feld beschleunigt werden und sich zur rechten Platte bewegen. Es stellt sich ein zeitunabhängiger Zustand ein, in dem ein Gesamtstrom I zwischen den Platten fließt. Randeffekte können vernachlässigt werden.

a) Leiten Sie aus einer der Maxwell-Gleichungen die Poisson-Gleichung für das elektrische Potential $\phi(\vec{x})$ in kartesischen Koordinaten her:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \ .$$

Zeigen Sie explizit, dass das dem Potential $\phi(\vec{x})$ zugeordnete elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ auch die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0$ erfüllt. (4 Punkte)

b) Benutzen Sie die Symmetrie des Problems, um die Differentialgleichung für $\phi(\vec{x})$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen x zu reduzieren. Berechnen Sie aus dem Energiesatz die Geschwindigkeit $v_x(x)$ des Elektrons an der Stelle x in Abhängigkeit vom Potential $\phi(x)$, mit der Randbedingung $v_x(0) = 0$. (5 Punkte)

c) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Strom I, der Ladungsdichte $\rho(x)$ und der Geschwindigkeit $v(x)$ an. Leiten Sie hieraus eine Differentialgleichung für das Potential $\phi(x)$ her.

   Hinweis zur Kontrolle: $\mathrm{d}^2\phi(x)/\mathrm{d}x^2 + a\phi(x)^{-1/2} = 0$ für eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. (6 Punkte)

d) Lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Ansatz $\phi(x) = kx^n$, und bestimmen Sie das Potential $\phi(x)$ als Funktion von x und der Parameter ϕ_0, ℓ. (5 Punkte)

e) Geben Sie das elektrische Feld für den oben betrachteten Fall an, und vergleichen Sie es mit dem elektrischen Feld für den Fall, in dem keine Elektronen emittiert werden und die Raumladung $\rho(x)$ verschwindet, d.h. $\rho(x) = 0$. Skizzieren Sie die x-Abhängigkeit des Betrages der beiden Felder. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Gummifaden

Bei einem Gummifaden wird folgender Zusammenhang zwischen seiner Länge L, einer ausgeübten Zugkraft Z und seiner Temperatur T festgestellt:

$$L = L_0 + \frac{\alpha Z}{T} \qquad (L_0 > 0 \text{ und } \alpha > 0 \text{ sind positive Konstanten}).$$

Die Zugkraft $Z = mg$ wird durch ein angehängtes Gewicht der Masse m realisiert. Die Wärmekapazität des Fadens sei konstant, $C_L = C$, und für die innere Energie U gilt

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + Z\,\mathrm{d}L\,. \tag{1}$$

a) Wie verändert sich bei konstantem Zug Z die Fadenlänge L durch Erhöhung (Erniedrigung) der Temperatur? (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die innere Energie $U(T, L)$ und die Entropie $S(T, L)$.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von $\mathrm{d}F$ die Maxwell-Relation $-(\partial S/\partial L)_T = (\partial Z/\partial T)_L$, und benutzen Sie diese in der weiteren Rechnung. (14 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_Z bei konstanter Belastung Z. (10 Punkte)

Aufgabe 2: Temperaturausgleich

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei Körper mit der gleichen, als temperaturunabhängig angenommenen Wärmekapazität C. Der eine Körper habe die Temperatur T_1, der andere die Temperatur T_2. Wir betrachten im Folgenden einen Temperaturausgleich zwischen den beiden Körpern auf zwei verschiedenen Wegen:

a) Die beiden Körper werden in direkten thermischen Kontakt gebracht. Nach einiger Zeit stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand bei der Temperatur T_f ein. Berechnen Sie T_f und eine untere Schranke für die bei dem Prozess entstehende Entropieänderung $\Delta S > 0$. (10 Punkte)

b) Durch einen Carnot-Prozess wird Wärme von dem wärmeren auf den kälteren Körper übertragen und dabei Arbeit geleistet, bis beide Körper die gleiche Temperatur T_r erreicht haben. Berechnen Sie die Entropieänderung ΔS sowie die Temperatur T_r und die geleistete Arbeit W. (15 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Unschärferelation

Gegeben seien zwei hermitesche Operatoren A und B. Im Folgenden soll die Unschärferelation

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|\langle \mathrm{i}[A,B]\rangle|}{2}\ , \tag{1}$$

für die Standardabweichungen ΔA und ΔB untersucht und hergeleitet werden. Zwei weitere Operatoren A_0 und B_0 seien als die Differenzen $A_0 = A - \langle A\rangle$ und $B_0 = B - \langle B\rangle$ definiert.

Hinweis: $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$.

a) Werten Sie die Unschärferelation (1) explizit für die Operatoren $A = x$ und $B = p^2$ aus, wobei x den Orts- und p den Impulsoperator bezeichnet. (4 Punkte)

b) Ist A_0 hermitesch? Berechnen Sie den Erwartungswert von A_0, und zeigen Sie, dass $\langle A_0^2\rangle = (\Delta A)^2$ gilt. (4 Punkte)

c) Sei $|\psi\rangle$ ein normierter Zustandsvektor und $|\chi\rangle = (A_0 + \mathrm{i}\gamma B_0)|\psi\rangle$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$||\chi||^2 = \langle\chi|\chi\rangle = \langle A_0^2\rangle + \gamma^2\langle B_0\rangle^2 + \mathrm{i}\gamma\langle[A,B]\rangle \tag{2}$$

für die Norm dieses Zustandsvektors gilt, wobei die Erwartungswerte auf der rechten Seite mit dem Zustandsvektor $|\psi\rangle$ zu nehmen sind. (8 Punkte)

d) Welche Werte kann $||\chi||^2$ annehmen? Leiten Sie aus der Minimierung des Normquadrats in (2) die Unschärferelation (1) her. (9 Punkte)

Aufgabe 2: Wasserstoffatom in zwei Dimensionen

Für ein Wasserstoffatom, bei dem die Bewegung des Elektrons auf zwei Dimensionen eingeschränkt ist, lautet die stationäre Schrödinger-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) - \frac{\alpha\hbar c}{r} - E\right]\psi(r,\phi) = 0\,,$$

mit der Elektronenmasse m und der Stärke $\alpha\hbar c$ des anziehenden Coulombpotentials.

a) Welche Werte von μ sind bei dem Separationsansatz $\psi(r,\phi) = u(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\phi}$ zulässig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

b) Die Wellenfunktion des Grundzustands im zweidimensionalen Wasserstoffatom hat die Form $\psi_0(r,\phi) = N_0 \exp(-\nu_0 r/a_B)$ mit dem Bohrschen Radius $a_B = \hbar/(mc\alpha)$.
Bestimmen Sie den Faktor ν_0, die Grundzustandsenergie E_0 und die Normierungskonstante $N_0 > 0$. (7 Punkte)

c) Eine Wellenfunktion für den ersten angeregten Zustand im zweidimensionalen Wasserstoffatom ist gegeben durch $\psi_1(r,\phi) = N_1 r \exp(\mathrm{i}\phi - \nu_1 r/a_B)$.
Bestimmen Sie den Faktor ν_1, den Energieeigenwert E_1 und die Normierungskonstante $N_1 > 0$. (9 Punkte)

Zur Kontrolle: $\nu_1 = \nu_0/3$, $E_1 = E_0/9$ und $N_1 = 8/(9\sqrt{3\pi}a_B^2)$.

d) Berechnen Sie das Betragsquadrat des Matrixelements $\langle\psi_0|\vec{r}\,|\psi_1\rangle$ für den Dipolübergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand. Werten Sie zuerst die Winkelintegrale aus. (7 Punkte)

Nützliche Integralformel: $\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u^n \mathrm{e}^{-u} = n!$