Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Zerfall eines Teilchens

Ein punktförmiger Atomkern der Masse M fliege ohne äußere Kräfte im Laborsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_l$. Zusätzlich zu seiner kinetischen Energie hat er eine innere Energie E_i. Plötzlich zerfällt er in zwei einzelne Teilchen mit den Massen m_1, m_2, den Geschwindigkeiten $\vec{v}_{l1}, \vec{v}_{l2}$ und den inneren Energien E_{i1}, E_{i2}. Im Labor wird die kinetische Energie T_{l1} des Teilchens mit der Masse m_1 gemessen; dabei wird eine breite Verteilung der Messwerte T_{l1} beobachtet.

Im Folgenden seien die Größen $M, m_1, m_2, v_l = |\vec{v}_l|$ und $\Delta E = (E_i - E_{i1} - E_{i2})$ gegeben, und der Zerfall soll mit der klassischen nichtrelativistischen Mechanik untersucht werden.

a) Welche Gleichungen gibt es für die Erhaltungsgrößen im Laborsystem? (3 Punkte)

b) Das Koordinatensystem S des Schwerpunktes bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_l$ gegen das Laborsystem. Darin haben die beiden Massen die Geschwindigkeiten $\vec{v}_{s1}, \vec{v}_{s2}$. Formulieren Sie die Gleichungen für die Erhaltungsgrößen im System S. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie T_{s1} des Teilchens mit der Masse m_1 im Schwerpunktssystem nur einen einzigen Wert hat, und drücken Sie diesen Wert durch die gegebenen Größen aus. (7 Punkte)

d) Im Labor wird eine Verteilung von T_{l1} gemessen. Zeigen Sie, dass die Werte von T_{l1} zwischen $\frac{m_1}{2}(v_l - v_{s1})^2$ und $\frac{m_1}{2}(v_l + v_{s1})^2$ liegen, und berechnen Sie v_{s1} aus den gegebenen Größen. (6 Punkte)

e) Für den Fall $v_l > v_{s1}$ gibt es einen maximalen Ablenkungswinkel $\theta_{\max}$ zwischen $\vec{v}_l$ und $\vec{v}_{l1}$. Zeigen Sie $\theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{1}{v_l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{\frac{2\Delta E}{m_1+m_2}}\right)$. (6 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeiten transformieren sich mit der Galilei-Transformation $\vec{v}_{l1} = \vec{v}_{s1} + \vec{v}_l$.

Aufgabe 2: Punktteilchen im periodischen Potential

Betrachtet wird die Bewegung eines punktförmigen Körpers der Masse m in einer Dimension (Koordinate x) im Potential

$$V(x) = -V_0 \sin^2(y/2) \;, \qquad y = x/x_0 \;,$$

wobei V_0 und x_0 positive, dimensionsbehaftete Konstanten sind.

a) Welche Einheiten haben die Konstanten V_0 und x_0? Bestimmen Sie die Minima und Maxima des Potentials, und skizzieren Sie das Potential im Bereich $0 \leq y \leq 4\pi$. (4 Punkte)

b) Leiten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{a}{\sqrt{2\epsilon + b\sin^2(y/2)}} \tag{1}$$

für die Zeit $t(y)$ als Funktion des Ortes her. Bestimmen Sie Konstanten ϵ, a und b, und geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters ϵ an. (6 Punkte)

c) Betrachten Sie den Ansatz

$$y(t) = 4\arctan(\mathrm{e}^{t/t_0}) + 4\pi k \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,, \tag{2}$$

wobei t_0 eine positive, dimensionsbehaftete Konstante ist. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Teilaufgabe, dass die Funktion $y(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung darstellt. Bestimmen Sie die zugehörige Energie E.
Hinweis: Betrachten Sie die inverse Funktion $t(y)$. (7 Punkte)

d) Ein Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ an einem Potential-Minimum und habe die Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Form (2) diese Randbedingungen für eine geeignete Wahl des Parameters t_0 beschreiben kann. Erreicht das Teilchen das nächste Maximum und, wenn ja, zu welcher Zeit t? (8 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Rotierender elektrisch geladener langer Hohlzylinder

Ein unendlich langer, unendlich dünner Hohlzylinder vom Radius R sei homogen geladen mit der elektrischen Flächenladungsdichte σ_0. Der Zylinder rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\varphi$ um seine Symmetrieachse, sodass die Flächenstromdichte $\vec{K} = \sigma_0 \omega R \, \vec{e}_\varphi$ ist.
Verwenden Sie im Folgenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z).

a) Was kann man aufgrund der Symmetrie des Problems über das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ und über das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ sagen? (Begründungen!)

Hinweis: Die Laplace-Gleichung für das Vektorpotential ist $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Zylinders mit dem Satz von Stokes. Das Magnetfeld verschwinde in großem Abstand von der Zylinderachse. (8 Punkte)

c) Bestimmen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des Zylinders mit dem Satz von Stokes. Das Vektorpotential verschwinde auf der Zylinderachse. (9 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Abstandsabhängigkeiten der Beträge von Magnetfeld und Vektorpotential. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Fallender Ring im Magnetfeld eines Kreisstroms

Es soll das Magnetfeld von stromdurchflossenen Leitern im Vakuum untersucht werden.

Zunächst werde ein in z-Richtung liegender, unendlich langer und unendlich dünner geradliniger Leiter betrachtet, in dem ein Strom I in positiver z-Richtung fließe.

a) Begründen Sie unter Verwendung der Symmetrien des Problems und mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes, dass sich die magnetische Induktion in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) in der Form $\vec{B} = B(\varrho)\,\vec{e}_\varphi$ ausdrücken lässt. Verwenden Sie den Satz von Stokes, um die radiale Abhängigkeit $B(\varrho)$ zu berechnen. (7 Punkte)

b) Verifizieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s}\,)}{|\vec{r} - \vec{s}\,|^3} \,,$$

wobei die Integration entlang des Leiters $\mathcal{L}$ erfolgt.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,(1 + x^2)^{-3/2} = 2$ (5 Punkte)

Nun werde ein in der (x, y)-Ebene liegender, am Ursprung zentrierter kreisförmiger Drahtring mit Radius R und vernachlässigbar kleinem Drahtquerschnitt betrachtet, der von einem Strom I im mathematisch positiven Sinn durchflossen werde. Es soll die in einem zweiten Drahtring induzierte Spannung berechnet werden, wenn dieser Drahtring entlang der z-Achse im Gravitationsfeld fällt.

c) Berechnen Sie zunächst die magnetische Induktion $\vec{B}(\varrho = 0, z)$ auf der z-Achse für den ersten stromdurchflossenen Drahtring mit Radius R.

Zur Kontrolle: $|\vec{B}(\varrho = 0, z)| \sim (R^2 + z^2)^{-3/2}$. (6 Punkte)

d) Es werde nun ein zweiter kleiner kreisförmiger Drahtring so am Ursprung zentriert positioniert, dass die Normale der Kreisfläche in z-Richtung zeigt. Dessen Kreisfläche A sei so klein, dass das Magnetfeld über die gesamte Fläche als konstant angenommen werden kann. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der im zweiten Ring induzierten Spannung, wenn dieser Ring zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe losgelassen wird und dann aufgrund der Erdbeschleunigung $-g\vec{e}_z$ beschleunigt fällt. Das durch den fallenden Drahtring erzeugte Magnetfeld kann dabei außer Betracht bleiben. Zu welchem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung maximal? (7 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Entropie des van der Waals-Gases

Gegeben sei ein Mol eines kompressiblen Systems (z.B. eines Gases) mit dem Molvolumen v, dem Druck p, der Temperatur T und der molaren Entropie s.

a) Beweisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v .$$

(4 Punkte)

Im Folgenden sei das System ein van der Waals-Gas mit der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die (molare) Wärmekapazität c_v des van der Waals-Gases unabhängig vom Volumen v ist, d.h. dass $(\partial c_v/\partial v)_T = 0$ gilt. (6 Punkte)

Im Weiteren soll nun angenommen werden, dass die (molare) Wärmekapazität c_v auch unabhängig von der Temperatur ist.

c) Bestimmen Sie die molare Entropie $s(T, v)$ mit $s(T_0, v_0) = s_0$. (7 Punkte)

d) Bestimmen Sie die molare Entropie $s(p, v)$ und die (p, v)-Relation der Adiabaten-Gleichung. Wie lautet die Adiabaten-Gleichung für das ideale Gas? Skizzieren und bezeichnen Sie die Adiabaten des idealen Gases für zwei unterschiedlich große Entropien $S^<$ und $S^>$ mit $S^< < S^>$. (8 Punkte)

Aufgabe 2: Joule'scher Kreisprozess mit idealem Gas

Gegeben sei ein ideales Teilchen-Gas mit der konstanten, isochoren Wärmekapazität $C_V = fNk/2$, wobei f die Zahl der thermisch aktiven Freiheitsgrade bezeichnet und N die Teilchenzahl ist.

a) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_p bei konstantem Druck für das ideale Teilchen-Gas (mit f Freiheitsgraden). (5 Punkte)

b) Leiten Sie für das ideale Gas (mit f Freiheitsgraden) die Adiabatengleichung ab. Stellen Sie das Ergebnis dar in der Form
Temperatur T als Funktion des Volumens V, sowie
Temperatur T als Funktion des Druckes p.
Zur Kontrolle: $T^f V^2 = \text{const.}$ (6 Punkte)

Das ideale Gas wird nun als Arbeitssubstanz in einem reversiblen Joule'schen Kreisprozess zur Umwandlung von Wärme in Arbeit verwendet. Der betrachtete Kreisprozess setzt sich aus zwei Isobaren ($p = p_{1,2}$ mit $p_1 > p_2$) und zwei Adiabaten zusammen.

c) Skizzieren Sie den Joule'schen Kreisprozess mit Umlaufrichtung in einem (p, V)-Diagramm. (2 Punkte)

d) Geben Sie die in einem Zyklus zugeführte Wärme Q_{zu} und abgeführte Wärme Q_{ab} in Abhängigkeit von den Temperaturen an den Ecken des Kreisprozesses an. Bestimmen Sie damit den Wirkungsgrad η_J des Joule'schen Kreisprozesses. (5 Punkte)

e) Benutzen Sie die Gleichungen der beiden Adiabaten, um den Wirkungsgrad η_J allein durch das Druckverhältnis $p_2/p_1 < 1$ auszudrücken:

$$\eta_J = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\chi} .$$

Wie hängt der Exponent χ von der Zahl der Freiheitsgrade f ab? (7 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Variation

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in dem eindimensionalen Potentiial $V(x) = kx^4$. Der Hamilton-Operator lautet somit

$$H = \frac{p^2}{2m} + kx^4 \,. \tag{1}$$

Da sich das Problem nicht analytisch lösen lässt, suchen wir eine gute Näherung für die Grundzustandsenergie E_0 des Teilchens. Dazu betrachten wir eine Menge von Zustandsvektoren $|\psi_\lambda\rangle$ und minimieren die mittlere Energie $\langle\psi_\lambda|H|\psi_\lambda\rangle$ in dieser Menge.

Im Ortsraum betrachten wir dazu die Menge der Wellenfunktionen

$$\psi_\lambda(x) = A(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x^2} \qquad \text{mit dem Parameter} \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \lambda > 0\,. \tag{2}$$

a) Berechnen Sie zunächst die Konstante $A(\lambda)$ aus der Normierungsbedingung. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie, $\langle\psi_\lambda|H|\psi_\lambda\rangle$, für diese Wellenfunktionen. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie den Parameter λ, für den dieser Erwartungswert der Energie ein Minimum annimmt. Bestimmen Sie den Wert der mittleren Energie am Minimum als Näherung für die exakte Grundzustandsenergie E_0. (5 Punkte)

d) Beweisen Sie für alle Zustandsvektoren $|\psi_\lambda\rangle$ die Ungleichung

$$\langle\psi_\lambda|H|\psi_\lambda\rangle \geq E_0\,. \tag{3}$$

Hinweis: Entwicklung nach dem Eigensystem $E_n, |\phi_n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots$ des Hamilton-Operators mit $E_0 < E_1 \leq E_2, \ldots$. (7 Punkte)

Hinweis: Folgende Integrale dürfen Sie verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\,x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-a\,x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-a\,x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}\,.$$

Aufgabe 2: **Teilchen im Zylinder**

Ein Teilchen der Masse M sei in einen unendlich langen Zylinder vom Radius r_0 eingeschlossen. Das Potential sei $V = 0$ innerhalb des Zylinders und $V = \infty$ außerhalb.
Verwenden Sie Zylinderkoordinaten mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf. Zeigen Sie, dass das Problem in den drei Koordinaten separiert werden kann, und bestimmen Sie die Form der drei Eigenfunktionsanteile. Welche zwei Bedingungen, abgesehen von der Normierbarkeit, muss die Gesamt-Wellenfunktion erfüllen?

Hinweis: Beginnen Sie mit der Separation der z-Abhängigkeit von der φ- und r-Abhängigkeit, und setzen Sie mit der Separation der letzteren Abhängigkeiten fort. (12 Punkte)

Zur Kontrolle: Die Wellenfunktion hat die Form

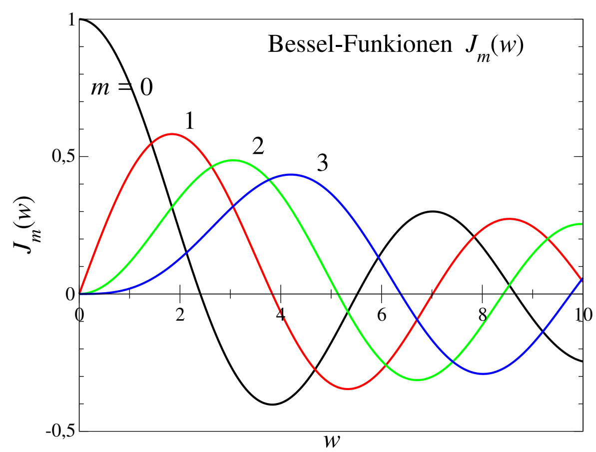
$$\Phi(r,\varphi,z) = R(r)\,P(\varphi)\,Z(z) \quad \text{mit} \quad P(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \quad \text{und} \quad Z(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\,. \tag{1}$$

b) Bringen Sie die Differentialgleichung für die Funktion $R(r)$ auf die dimensionslose Form

$$\left(w^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}w^2} + w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + w^2 - m^2\right) J_m(w) = 0\,. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie $E = \hbar^2\kappa^2/(2M)$. (4 Punkte)

Die normierbaren Lösungen der Differentialgleichung (2) sind die nebenstehend teilweise gezeigten Bessel-Funktionen $J_m(w)$ (mit $m \in \mathbb{N}_0$), von denen Sie nicht mehr wissen müssen, als dass die n-te Nullstelle der Bessel-Funktion J_m bei $w = w_{m,n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) liegt, siehe die nebenstehende Abbildung.



c) Geben Sie die Eigenenergien und Eigenfunktionen für die Quantenzahlen n, m, und k an. Mit welchen Erhaltungsgrößen sind diese Quantenzahlen verknüpft? Welche Quantenzahlen beschreiben den Grundzustand? Skizzieren Sie den Radialanteil $R(r)$ der Grundzustandswellenfunktion. (9 Punkte)