Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bewegung auf einer kippenden Stange

Eine Punktmasse m bewege sich reibungsfrei auf einer kippenden Stange, deren Lage zum Zeitpunkt t durch

$$z = -\gamma t x \tag{1}$$

gegeben ist. Hierbei sind x und z Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems, und $\gamma > 0$ gibt an, wie schnell die Stange kippt. Auf die Punktmasse wirke das homogene Schwerefeld in negativer z-Richtung.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}, t)$ der Punktmasse mit x als generalisierter Koordinate. (5 Punkte)

b) Leiten Sie aus der gerade bestimmten Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung der Punktmasse her. (6 Punkte)
Zur Kontrolle: Setzt man ohne Beachtung der Einheiten $\gamma = 1$, so lautet die Bewegungsgleichung $(1 + t^2)\ddot{x} + 2t\dot{x} = gt\,.$

c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Punktmasse im Ursprung in Ruhe. Berechnen Sie die anschließende Bewegung $x(t)$. Hierzu ist es sinnvoll, zunächst die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $\dot{x}$ zu betrachten und eine homogene Lösung mit Hilfe der Trennung der Variablen zu bestimmen. (10 Punkte)
Zur Kontrolle: Setzt man ohne Beachtung der Einheiten $\gamma = 1$, so ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \frac{g}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right)\,.$$

d) Wie verändert sich die Höhe z der Punktmasse für kurze Zeiten? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem des freien Falls. (4 Punkte)
Hinweis: Es kann günstig sein, zunächst die Geschwindigkeit für kurze Zeiten zu betrachten und daraus die Zeitentwicklung der Höhe zu bestimmen.

Nützliche Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)$$

Aufgabe 2: Oszillierende Rotation

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einer ebenen Kreisbahn in der (x, y)-Ebene mit Radius R um den Ursprung. φ sei der Winkel zwischen der x-Achse und dem Ortsvektor des Teilchens. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Teilchen umläuft, sei abhängig von der Zeit t und gegeben durch

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_1 + a\cos(\omega_2 t), \tag{1}$$

wobei ω_1, ω_2 und a positive Konstanten sind mit $\omega_1 > a$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen bei $x = R$, $y = 0$ entsprechend $\varphi(t = 0) = 0$.

a) Geben Sie Ausdrücke für die (x, y)-Koordinaten des Teilchens als Funktion von t an. Berechnen Sie die (x, y)-Komponenten der Geschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y})$ und der Beschleunigung $(\ddot{x}, \ddot{y})$ des Teilchens als Funktion von $\varphi, \dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$. Wie lauten die an die Bahn tangentiale und radiale Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung? (8 Punkte)

b) Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_0$ des Teilchens um den Ursprung, sowie den Drehimpuls $\vec{L}_R$ um den Anfangspunkt der Bahn bei $x = R$, $y = 0$. (6 Punkte)

c) Nehmen Sie nun an, dass der Radius $R(t > 0)$ der Bahn auch zeitabhängig ist. Bestimmen Sie diejenige Form von $R(t)$, für die der Drehimpuls um den Ursprung konstant ist. Untersuchen Sie die Frage, ob dann auch die kinetische Energie eine Erhaltungsgröße ist. (11 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Magnetfeld zylindrischer Stromträger

Ein in der z-Richtung unendlich ausgedehnter sehr dünner Zylinder mit dem Radius a ist mit seiner Achse bei $x = a$, $y = 0$ angeordnet (siehe Skizze). Durch den Zylinder läuft ein Gesamtstrom I in negativer z-Richtung, wobei die Stromdichte homogen über die Oberfläche des Zylinders verteilt ist. Ein zweiter Zylinder mit vernachlässigbarer Dicke und Radius b (mit $b > 2a$) ist mit seinem Zentrum bei $x = 0$, $y = 0$ angeordnet. Durch diesen Zylinder läuft ein Strom gleicher Stärke in positiver z-Richtung. Auch hier ist die Stromdichte wieder gleichmäßig über die Oberfläche verteilt. Die Zylinder befinden sich im Vakuum.

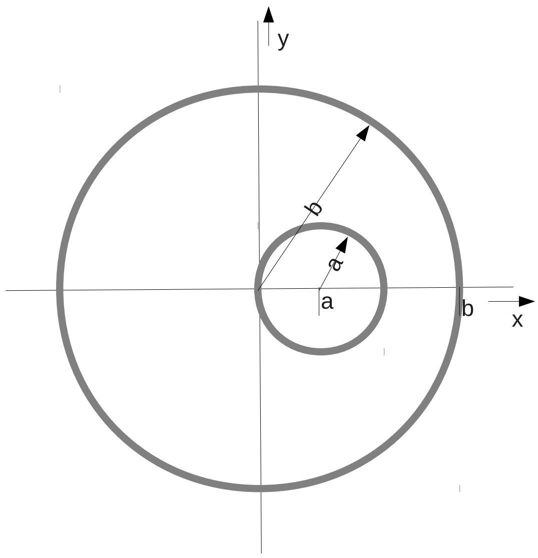

Abbildung 1: Skizze der verwendeten Geometrie

a) Berechnen Sie als Funktion von x und y die x- und y-Komponenten desjenigen Magnetfeldes, das alleine durch den zweiten Zylinder (Radius b) hervorgerufen wird, also dasjenige Magnetfeld, das sich in Abwesenheit des zusätzlichen Zylinders mit Radius a ergibt. Geben Sie das Ergebnis getrennt für die Bereiche innerhalb und außerhalb des Zylinders an. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie nun die x- und y-Komponenten des von beiden Zylindern hervorgerufenen Magnetfeldes als Funktion von x und y. Geben Sie das Ergebnis getrennt für die drei Bereiche innerhalb beider Zylinder, zwischen den Zylindern und außerhalb beider Zylinder an. (12 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Kraft pro Länge, die der Innenzylinder auf den Außenzylinder ausübt. (5 Punkte)

Aufgabe 2: **Faraday'sches Induktionsgesetz**

In dieser Aufgabe betrachten wir das vorgegebene magnetische Induktionsfeld

$$\vec{B}(\varrho, \varphi, z, t) = \begin{cases} B(t)\,\vec{e}_z & \text{für } \varrho < R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

ϱ, φ und z sind Zylinderkoordinaten, und $R > 0$. Die Ströme und Ladungen, die zur Erzeugung des Feldes benötigt werden, sollen nicht betrachtet werden. Auch sei die zeitliche Veränderung des Feldes so langsam, dass die Erzeugung elektromagnetischer Wellen vernachlässigt werden kann.

a) Berechnen Sie ausgehend von den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \tag{2}$$

das induzierte elektrische Feld. (10 Punkte)
Kontrolle: Das elektrische Feld hat die Form $\vec{E} = f(\varrho)\,\vec{e}_\varphi\,\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$.

Auf der Randlinie eines kreisförmigen Rades (Radius b) sei eine Ladung Q gleichmäßig verteilt. Das Rad sei um seine Achse drehbar aufgehängt. Innerhalb eines zylindrischen Gebietes vom Radius $a < b$ befinde sich orthogonal zum Rad ein homogenes Induktionsfeld der Stärke $\vec{B}_0$ (siehe auch Abb. 2). Das Rad befinde sich zunächst in Ruhe. Wird das Magnetfeld langsam abgeschaltet, so übt das induzierte elektrische Feld eine Kraft auf die Linienladung des Rades aus.

b) Berechnen Sie das resultierende Drehmoment um die Radachse. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie den Drehimpuls um die Radachse, der insgesamt auf das Rad übertragen wird. (5 Punkte)

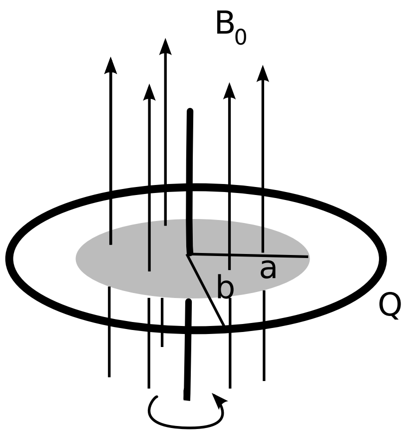

Abbildung 2: Die Anordnung für Aufgabe b: das Rad mit Linienladung Q

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Elastischer Körper

Ein elastischer Körper sei beschrieben durch die folgende Entropiefunktion

$$S(U, L, N) = 2cN^{1/2}U^{1/2}f(x), \qquad x = \frac{L - L_0}{L_0},$$

wobei U die Energie ist, L (L_0) die Länge des (un-)gedehnten Körpers und c eine positive Konstante. Es gelte außerdem $U > 0$ und $f(x) > 0$ im betrachteten Bereich $0 \leq |x| < 1$. Die Anzahl N von Atomen im Körper sei im Folgenden konstant.

a) Ist die gegebene Entropie extensiv? Ist die durch sie definierte Temperatur positiv? (4 Punkte)

b) Das Differential von S ist

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\,\mathrm{d}U - \frac{\sigma}{T}\,\mathrm{d}L\,.$$

Berechnen Sie $U(T, N, L)$ und $\sigma(T, N, L)$. Geben Sie die Dimension der Größe σ und deren physikalische Interpretation an. (7 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die durch die Größen T, N, L ausgedrückte Entropie die Form $S(T, L, N) = 2c^2 N f^2 T$ hat. (3 Punkte)

d) Der Körper werde bei konstanter Temperatur von $x = 0$ auf $x > 0$ gedehnt. Zeigen Sie, dass hierbei die Wärmemenge

$$\Delta Q = q(T, N)\left(f(x)^2 - f(0)^2\right)$$

ausgetauscht wird, und geben Sie die Funktion $q(T, N)$ an. (5 Punkte)

e) Es wird nun die spezielle Funktion

$$f(x) = (1 - x^2)^b \quad \text{mit} \quad b > 0 \tag{1}$$

für kleine Auslenkungen x mit $|x| \ll 1$ betrachtet. Bestimmen Sie ΔQ und σ in führender Ordnung in x. Geben Sie die Vorzeichen der erhaltenen Ausdrücke für ΔQ und σ an, und interpretieren Sie das Ergebnis. (6 Punkte)

Aufgabe 2: Gasverflüssigung

Ein Gasstrom wird durch ein thermisch isoliertes Rohr gepumpt. Im Rohr befindet sich eine poröse Membran, durch die das Gas gepresst wird. Vor der Membran hat das Gas den Druck p_1 und die Temperatur T_1, und dahinter die Werte p_2, T_2. Für die technischen Anwendungen dieses Drossel-Prozesses sollte die Endtemperatur T_2 kleiner als T_1 sein, damit beim wiederholten Durchlauf das Gas abgekühlt und schließlich flüssig wird.

$U(S,V)$ sei die innere Energie des Gases als Funktion des Volumens V und der Entropie S, mit dem Differential $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$. Betrachten Sie nun die Enthalpie $H = U + pV$.

a) Berechnen Sie das Differential $\mathrm{d}H$ der Enthalpie $H(S,p)$. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Ableitung $(\partial V/\partial S)_p$ mit Hilfe der Funktion $T(S,p)$. (4 Punkte)

c) Begründen Sie mithilfe der Energiebilanz, warum beim Drossel-Prozess die Enthalpie konstant bleibt. (3 Punkte)

d) Wie ändert sich die Temperatur eines einatomigen idealen Gases beim Drossel-Prozess? (4 Punkte)

Für ein reales Gas sind die thermische Ausdehnung $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ und die Wärmekapazität $C_p = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ tabelliert. Beim Drosselprozess sollte der Koeffizient $k = \left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ positiv sein, damit sich das Gas abkühlt.

e) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung $(\partial S/\partial p)_T = -V\alpha$. (5 Punkte)

f) Drücken Sie den Koeffizienten k durch die Größen C_p, α, T und V aus.
Hinweis: Es ist nützlich, die Funktion $H(S(T,p),p)$ zu untersuchen und die vorige Gleichung zu verwenden. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen über Potentialtopf

Betrachten Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Tiefe V_0, beschrieben durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad x \leq -x_0 \\ -V_0 & \text{wenn} \quad -x_0 < x < x_0 \\ 0 & \text{wenn} \quad x \geq x_0 \quad , \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$ gilt. Auf diesen Potentialtopf fällt von links, d. h. aus negativ Unendlich kommend, ein Teilchen der Masse m, das durch eine ebene Welle mit Amplitude 1 und Energie $E > 0$ beschrieben wird.

a) Stellen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung abschnittsweise in jedem der drei Bereiche $x < -x_0$, $-x_0 < x < x_0$ und $x > x_0$ auf. (3 Punkte)

b) Stellen Sie, ebenfalls abschnittsweise definiert in Analogie zu Teilaufgabe a), einen Lösungsansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$ zur Energie E auf. (6 Punkte)

c) Geben Sie das Verhältnis von transmittierter zu einfallender Stromdichte für den Fall $E \gg V_0$ an. Hier ist keine Rechnung gefragt, aber Sie sollen Ihre Antwort mit einem Argument in Worten begründen. (2 Punkte)

d) Im Folgenden sollen Sie die wesentlichen Schritte tun, um die stationäre Schrödinger-Gleichung für das gegebene Problem zu lösen. Bestimmen Sie dazu die im Ansatz auftretenden Wellenzahlen. Stellen Sie dann alle Gleichungen auf, die Sie zur Bestimmung der im Ansatz auftretenden Amplituden brauchen. Geben Sie explizit an, welche Amplituden bestimmt werden müssen und wie viele Gleichungen hierfür zur Verfügung stehen. Die explizite Bestimmung der Amplituden durch Auflösen der Gleichungen ist nicht erforderlich. (10 Punkte)

e) Skizzieren Sie qualitativ (d. h. Normierungs- und Amplituden-Vorfaktoren müssen nicht quantitativ aus der Skizze ablesbar sein) den Verlauf von $|\psi(x)|^2$. Die Skizze sollte das Verhalten von $|\psi(x)|^2$ sowohl im Potentialtopf als auch vor und hinter dem Potentialtopf wiedergeben. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Virialsatz für das Wasserstoff-Atom

Die Grundzustandswellenfunktion des Elektrons im Wasserstoffatom ist

$$\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{2}{a_B^{3/2}\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-r/a_B} \quad \text{mit} \quad a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m\,e^2}\,,$$

wobei a_B der Bohr'sche Radius und e die Elementarladung ist.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r^{-1}\rangle$. Was erhält man für den Erwartungswert $\langle V\rangle$ der potentiellen Energie im Grundzustand? (10 Punkte)

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle T\rangle$ der kinetischen Energie im Grundzustand. (10 Punkte)

c) Bestimmen Sie das Verhältnis des Erwartungswerts von potentieller Energie zum Erwartungswert von kinetischer Energie im Grundzustand. (5 Punkte)

Nützliche Formeln:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r$$

$$\Delta f(r) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

$$\langle\psi|AB|\psi\rangle = \langle A^\dagger\psi|B\psi\rangle$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^n \mathrm{d}x = n!$$