Themenschwerpunkt A

Mechanik

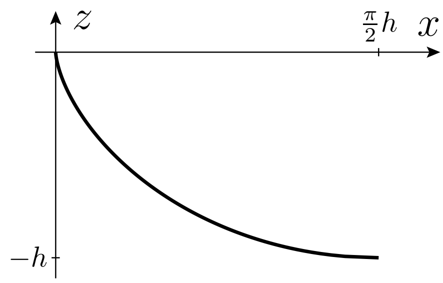
Aufgabe 1: Bewegung auf der Brachistochrone

Ein Punktteilchen der Masse m bewege sich in der (x, z)-Ebene reibungsfrei auf einer Schiene in einem homogenen Gravitationsfeld, das in die negative z-Richtung wirkt. Die Schiene verbinde den Ursprung mit dem Punkt $(\pi h/2, -h)$, wobei $h > 0$ sei.

a) Nehmen Sie zunächst an, dass Anfangs- und Endpunkt durch eine gerade Schiene verbunden sind, und berechnen Sie die Zeit T_1, welche die Punktmasse benötigt, um aus der Ruhe startend unter dem Einfluss der Gewichtskraft vom Anfangs- zum Endpunkt zu gelangen. (8 Punkte)

Nun soll die Schiene durch die folgende parametrische Darstellung gegeben sein, in welcher der Parameter u von 0 bis 1 läuft:

$$x(u) = h\big(\arcsin(u) - u\sqrt{1-u^2}\big)$$
$$z(u) = -hu^2\,.$$



Diese in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Bahnform wird auch als Brachistochrone bezeichnet.

b) Berechnen Sie die Ableitungen von x und z nach u, und bestimmen Sie daraus die Steigung der Schiene am Anfangs- und Endpunkt.
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (5 Punkte)

c) Wählen Sie u als verallgemeinerte Koordinate, und bestimmen Sie die Gesamtenergie $E(u, \dot{u})$ der Punktmasse. Berechnen Sie daraus die Zeit T_2, welche die aus der Ruhe startende Punktmasse benötigt, um vom Anfangs- zum Endpunkt der Schiene zu gelangen.
Zur Kontrolle: Der Ausdruck für die Energie hat die Form $E = A\frac{u^2}{1-u^2}\dot{u}^2 - Bu^2$. (10 Punkte)

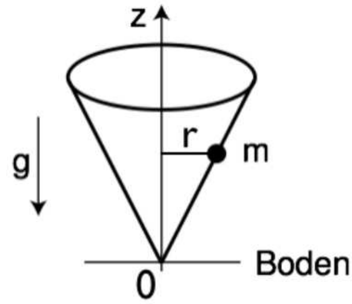
d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für T_2 mit der Zeit T_1, die Sie in Teilaufgabe a erhalten haben. (2 Punkte)

Aufgabe 2: **Teilchen in kegelförmiger Schale**

Auf der Innenseite des Kegelmantels, definiert durch die Gleichung

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{mit} \quad a > 0\,, \tag{1}$$

soll sich eine Punktmasse m reibungsfrei bewegen. Die z-Achse ist dem homogenen Schwerefeld (Erdbeschleunigung g) entgegengerichtet. Die Bewegung soll in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) beschrieben werden.



a) Wieviele Freiheitsgrade hat der Massenpunkt beim Gleiten auf dem Kegelmantel? (3 Punkte)

b) Wie lautet die Lagrange-Funktion in den Koordinaten r und φ? (5 Punkte)

c) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. (5 Punkte)

d) Welche Erhaltungssätze der Bewegung gibt es? (4 Punkte)

e) Wie groß muss die z-Komponente des Drehimpulses $L_z(h)$ sein, damit sich der Massenpunkt auf einer horizontalen Kreisbahn in der Höhe h über dem Boden bewegt? (3 Punkte)

f) Berechnen Sie die Frequenz ω von kleinen Schwingungen um diese Kreisbahn bei festem $L_z(h)$ durch eine Entwicklung der Bewegungsgleichungen in linearer Ordnung von $\delta r = r - h/a$.

(5 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Die wichtigsten Eigenschaften elektromagnetischer Wellen im Vakuum sollen anhand der Maxwell-Gleichungen diskutiert werden.

a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ an. (5 Punkte)

Lösen Sie nun die Maxwell-Gleichungen mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\,, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_{\vec{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \tag{1}$$

und beantworten Sie die folgenden Fragen anhand Ihrer Lösung:

b) Welche Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen garantieren, dass man sie überhaupt mit einem Exponentialansatz vom Typ (1) lösen kann?

c) Warum ist es legitim, einen komplexen Ansatz für die Felder zu verwenden?

d) Leiten Sie die Dispersionsrelation zwischen ω und $\vec{k}$ her.

e) Charakterisieren Sie die relative Orientierung der Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$.

f) In welche Richtung weist der Poynting-Vektor (Energiestrom)?

g) Wie viele unabhängige Polarisationszustände hat die elektromagnetische Welle im Vakuum?

h) Bestimmen Sie das Verhältnis der Beträge von $\vec{E}_{\vec{k}}$ und $\vec{B}_{\vec{k}}$.

i) Wie lautet die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

($8 \times 2.5 = 20$ Punkte)

Aufgabe 2: **Elektrisch geladener langer Zylinder**

Ein unendlich langer Zylinder mit Radius R sei homogen geladen mit der elektrischen Raumladungsdichte ρ_0. Verwenden Sie im Folgenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z).

a) Was kann man aufgrund der Symmetrie des Problems über das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das elektrische Skalarpotential $\phi(\vec{r})$ aussagen? (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des Zylinders mit dem Gesetz von Gauß. Führen Sie τ als Ladung pro Länge ein. (8 Punkte)

   Hinweis: Für die Verwendung des Gesetzes von Gauß betrachen Sie einen (anderen) Zylinder endlicher Länge L.

c) Bestimmen Sie das elektrische Skalarpotential $\phi(\vec{r})$ mit der Randbedingung $\phi(0) = 0$ innerhalb und außerhalb des Zylinders aus dem elektrischen Feld. (9 Punkte)

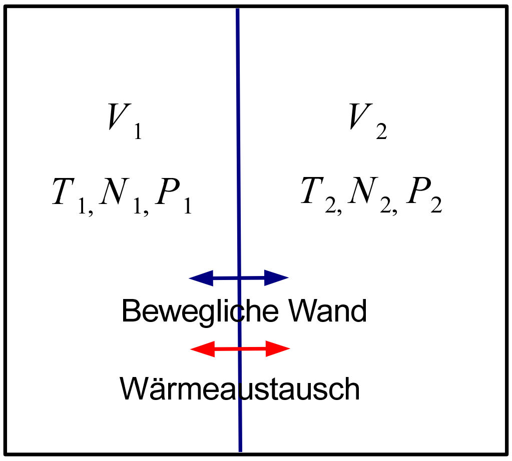
d) Skizzieren Sie die radiale Ortsabhängigkeit von $E = \left|\vec{E}\right|$ und ϕ. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Wärmeaustausch

Ein kastenförmiges Volumen V ist durch eine reibungsfrei bewegliche Wand in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 getrennt. In den Volumina V_i befinde sich jeweils ein ideales Gas aus $N_1 = N_2 = N$ Teilchen bei der Temperatur T_i, mit $i = 1, 2$. Zur Zeit $t = 0$ sei $T_1 > T_2$ und der Druck in beiden Gasen gleich P_0. In der Folge tauschen die beiden Systeme durch die Wand Wärme aus, bis sich ein Temperaturgleichgewicht bei der Temperatur T einstellt. Dabei verschiebt sich die Wand so, dass sich ein Kräftegleichgewicht einstellt. Der Prozess wird als quasi-statisch angenommen. Das System ist geschlossen und nach außen thermisch isoliert.



a) Geben Sie drei einfache extensive Zustandsgrößen an, die in diesem Prozess erhalten sind. (3 Punkte)

b) Begründen Sie allgemein aus dem zweiten Hauptsatz, warum die Entropie keine Erhaltungsgröße sein kann. Zeigen Sie genauer, dass zu jedem Zeitpunkt $\mathrm{d}S \geq 0$ gilt. (5 Punkte)

Es wird nun angenommen, dass die Wärmekapazität der beiden Gase gleich ist, $C_{V,1} = C_{V,2} = C_V$.

c) Berechnen Sie die Gleichgewichtstemperatur T. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie die Drücke P_i^* in den beiden Teilvolumina am Ende des Prozesses als Funktion des Anfangsdrucks P_0. (4 Punkte)

e) Berechnen Sie die Entropieänderung ΔS des gesamten Prozesses aus dem zweiten Hauptsatz, und überprüfen Sie, dass $\Delta S > 0$ gilt. (6 Punkte)

f) Zeichnen Sie den Prozess für das System 1 in ein (T, V)-Diagramm. Wie in Teilaufgabe d) gezeigt wurde, ist der Druck P_1 des Systems während des Prozesses konstant. Geben Sie die Temperatur an den beiden Endpunkten im Diagramm an. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Photonen-Gas

Gegeben sei ein Photonen-Gas mit den Zustandsgleichungen

$$U = 3pV \quad \text{und} \quad p = \tfrac{1}{3}\sigma T^4 \,.$$

a) Bestimmen Sie die Entropie $S(p, V)$ und $S(T, V)$ mithilfe der Euler-Relation $U = TS - pV$ (das chemische Potential verschwindet für ein Photonen-Gas). (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wärmekapazität $C_V(T, V)$. (3 Punkte)

c) Das Photonen-Gas bei einem Anfangsdruck von p_0 und Anfangsvolumen V_0 werde auf ein Endvolumen $V_1 = \frac{1}{2}V_0$ komprimiert. Bestimmen Sie die Arbeiten $\Delta A = -\int p\,\mathrm{d}V$, welche an dem Gas bei einem isobaren, bei einem isothermen und schließlich bei einem adiabatischen Prozess verrichtet werden (jeweils als Funktion von p_0 und V_0). (16 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Teilchen im Zentralpotential

Betrachtet wird ein Teilchen in drei Dimensionen in einem Zentralpotential $V(r)$, von dem bekannt ist, dass es nur vom Radius $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt. Der ortsabhängige Teil der Wellenfunktion in einem stationären Zustand sei gegeben durch

$$\psi(x,y,z) = C\,xy\,\mathrm{e}^{-\alpha r} \qquad 0 < \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

mit einer Normierungskonstanten C.

a) Die z-Kompnente des Drehimpulsoperators ist $L_z = xp_y - yp_x$, wobei p_i die Komponenten des Impulsoperators bezeichnen. Berechnen Sie den Eigenwert des Operators L_z^2 im gegebenen Zustand.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $L_z r = 0$, und verwenden Sie diese Relation zur Vereinfachung der Ableitungen.
Ergebnis zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: Der Eigenwert ist $4\hbar^2$.) (5 Punkte)

b) Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Erwartungswert des Operators L_z an, und zeigen Sie, dass er im gegebenen Zustand verschwindet. Leiten Sie hieraus und aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a) die möglichen Messwerte für den Operator L_z und deren Wahrscheinlichkeiten ab. (5 Punkte)

c) Im betrachteten Zustand ist der Eigenwert von L_x^2 gleich $\hbar^2$. Welchen Eigenwert hat der Operator $\vec{L}^2$, wobei $\vec{L}$ den Gesamtdrehimpulsoperator bezeichnet? (5 Punkte)

Die Wirkung des Laplace-Operators $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{\partial}{\partial z})^2$ auf die Wellenfunktion ψ in (1) ergibt

$$\Delta\psi = \left(-\frac{6\alpha}{r} + \alpha^2\right)\psi\,.$$

d) Bestimmen Sie nun das Potential $V(r)$, für das die Wellenfunktion ψ in (1) eine Energieeigenfunktion darstellt. Bestimmen Sie den konstanten Teil von $V(r)$ aus der Randbedingung $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$. Geben Sie ein physikalisches Beispiel, in dem ein Potential dieser Art auftritt. (5 Punkte)

e) Für welchen Bereich der Energie E erwartet man Bindungszustände? Welche Energie hat der betrachtete Zustand? Ist er gebunden? (5 Punkte)

Aufgabe 2: Teilchen im Kasten

Ein Teilchen der Masse m, das sich in einem eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| < a \\ \infty & \text{für} \quad |x| \geq a \end{cases}$$

bewegt, habe die normierte Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{a^5}}\left(a^2 - x^2\right) \times \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leq a\,, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a\,. \end{cases}$$

a) Aus welchem physikalischen Grund muss die Wellenfunktion normiert sein, $||\Psi|| = 1$? (4 Punkte)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W_1, das Teilchen im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}a\right]$ anzutreffen? (6 Punkte)

c) Berechnen Sie die Unschärfen Δp des Impulses und Δx des Ortes in diesem Zustand, und überprüfen Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation. (8 Punkte)

d) Der Grundzustand des Teilchens wird bekanntlich durch die normierte Wellenfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\frac{\pi x}{2a}$$

mit der Energie

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

beschrieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W_2, den Energiewert E_1 am Zustand $\Psi(x)$ zu messen?
Hinweis: Es gilt $\int_{-1}^{1}\left(1 - u^2\right)\cos\frac{\pi u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{32}{\pi^3}$. (7 Punkte)