Themenschwerpunkt A

Mechanik

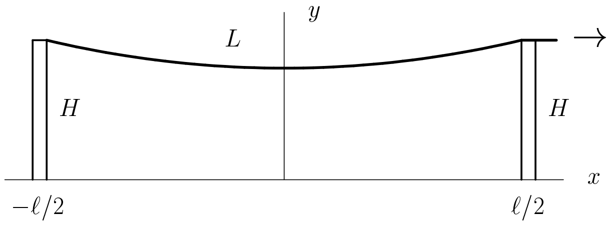
Aufgabe 1: Durchhängendes Seil mit schwacher Krümmung

Ein undehnbares, biegsames Seil der Länge L hängt statisch im homogenen Schwerefeld der Erde zwischen zwei Pfosten der Höhe H im Abstand ℓ. Die Anordnung befinde sich in der (x, y)-Ebene, symmetrisch zum Koordinatenursprung. Ferner sei $(L - \ell) \ll \ell$, sodass die Krümmung schwach ist. Die Kettenlinie, die das Seil im Gleichgewicht beschreibt, kann dann durch eine Parabel

$$y(x) = a + bx^2 \tag{1}$$

angenähert werden. Die Tatsache, dass das Seil schwach gekrümmt ist, impliziert

$$b\ell \ll 1. \tag{2}$$



a) Bestimmen Sie die Parameter a und b aus den bekannten Größen L, ℓ und H. Setzen Sie dabei $L = \ell(1 + \epsilon)$ (mit $\epsilon \ll 1$), und rechnen Sie nur in führender Ordnung in ϵ, unter Ausnutzung von Ungleichung (2). Geben Sie auch $H - a$ an, d.h. die Strecke, um die das Seil durchhängt.

   Hinweis: Die Länge eines infinitesimalen Seilelementes ist gegeben durch

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{3}$$

   Ergebnis zur Kontrolle: $H - a = \ell\sqrt{6\epsilon}/4$. (9 Punkte)

b) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Seils als Funktion von L, ℓ und H, wiederum in führender Ordnung in ϵ. Verwenden Sie hierzu die entlang des Seils konstante lineare Massendichte

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}. \tag{4}$$

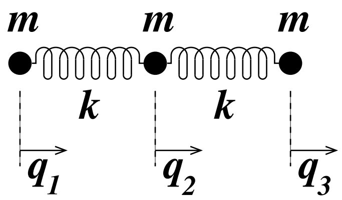
   Wo befindet sich der Schwerpunkt des Seils? (9 Punkte)

c) Das eine Ende des Seils gleite nun reibungsfrei über den Pfosten. Welche Arbeit ist nötig, um das durchhängende Seil durch horizontales Ziehen um ein kleines δL zu verkürzen? Wie groß ist demnach die horizontale Komponente der Kraft, die das Seil auf einen Pfosten ausübt, an dem es befestigt ist? (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Eigenschwingungen

Es sollen die Longitudinalschwingungen eines linearen drei-atomigen Moleküls berechnet werden. Das Molekül habe drei gleiche Massen, und die Kräfte sollen durch Federkräfte mit der Kraftkonstanten k modelliert werden. Die Skizze zeigt die Ruhekonfiguration. Die Auslenkungen aus den Ruhelagen werden mit q_1, q_2 bzw. q_3 bezeichnet.



a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System und die daraus folgenden Bewegungsgleichungen. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren dieses Systems, und skizzieren Sie die Auslenkungen der drei Atome in den drei verschiedenen Normalmoden. (10 Punkte)

c) Sie werden feststellen, dass es hier eine sogenannte Nullmode gibt, d. h. eine Lösung der Eigenwertgleichung mit $\omega = 0$. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Nullmode? (4 Punkte)

d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen? Wieviele freie Parameter hat diese Lösung, und woraus können diese Parameter berechnet werden? (5 Punkte)

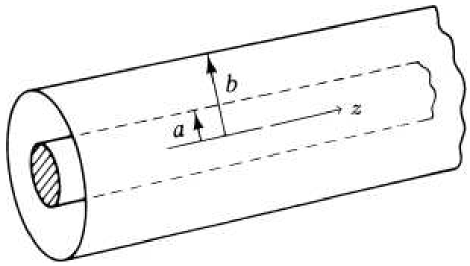
Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: TEM-Moden in einem Koaxial-Leiter

Betrachten Sie einen Koaxial-Leiter mit zwei unendlich langen, perfekt leitenden Zylinderflächen (siehe Skizze). Eine elektromagnetische Welle im Vakuum zwischen den beiden Zylinderflächen, die sich entlang der z-Achse ausbreitet, wird beschrieben durch den Ansatz

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{x},t) \\ \vec{B}(\vec{x},t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}_0(x,y) \\ \vec{B}_0(x,y) \end{Bmatrix} \exp\left[\mathrm{i}\,(kz - \omega(k)t)\right] .$$



a) Berechnen Sie die Dispersion $\omega(k)$ von TEM-Moden, also Moden mit $E_z = B_z \equiv 0$, aus den x- und y-Komponenten der Maxwell-Gleichungen $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ und $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \partial_t \vec{E}/c^2$ im Vakuum.

   Hinweis: $(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y$ und $(\mathrm{rot}\,\vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z$ (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Felder $\vec{E}_0(x,y)$ und $\vec{B}_0(x,y)$ senkrecht aufeinander stehen und dass $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ gilt. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie $\vec{E}_0(x,y)$ und $\vec{B}_0(x,y)$ explizit in Polarkoordinaten r, φ unter der Annahme, dass die Felder unabhängig vom Winkel φ sind, aus den Gleichungen $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 = \mathrm{div}\,\vec{B}$.

   Hinweis: Die Richtung der Felder ist durch die Randbedingungen bei $r = a$ und $r = b$ festgelegt, nämlich rein radial für das elektrische und rein azimuthal für das magnetische Feld. Die Divergenz in ebenen Polarkoordinaten hat die Form

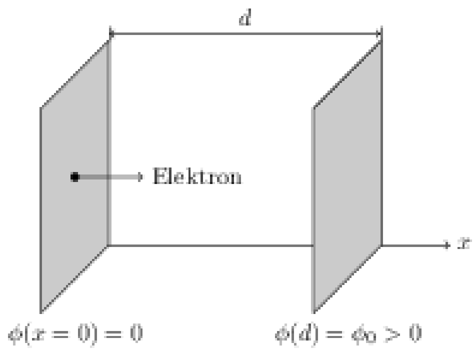
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} .$$

(10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Vakuumdiode

In einer Vakuumdiode treten Elektronen (Ladung $-e$, Masse m) aus einer heißen Kathode aus, die sich bei $x = 0$ befinde und das Potential $\phi(0) = 0$ habe (siehe Skizze). Sie werden dann auf die Anode bei $x = d$ mit dem Potential $\phi_0 > 0$ hin beschleunigt. Die Elektronen bauen im Zwischenraum zwischen den beiden Elektroden eine Raumladungsdichte $\rho(x)$ auf, die das elektrische Feld an der Kathode zum Verschwinden bringt. In diesem stationären Zustand fließt ein räumlich und zeitlich konstanter Strom mit Stromdichte $j = \rho(x)v(x) < 0$. Dabei wird angenommen, dass alle Größen nur von der Koordinate x abhängen.



a) Wie lautet die Poisson-Gleichung für das Potential $\phi(x)$ zwischen den beiden Platten bei gegebener Raumladungsdichte $\rho(x)$? (3 Punkte)

b) Welche Geschwindigkeit $v(x)$ besitzt ein Elektron an einem beliebigen Punkt x (mit $0 \leq x \leq d$) mit Potential $\phi(x)$, wenn es mit Anfangsgeschwindigkeit Null bei $x = 0$ startet? (4 Punkte)

Hinweis: Energieerhaltungssatz

c) Im stationären Zustand ist die Stromdichte $j = \rho(x)v(x)$ unabhängig von x. Leiten Sie mit den Ergebnissen aus den beiden vorhergehenden Teilaufgaben daraus eine Differentialgleichung für $\phi(x)$ bei einem gegebenem Wert von j ab, in der $\rho(x)$ und $v(x)$ nicht mehr vorkommen. (7 Punkte)

Ergebnis zur Kontrolle:

$$\epsilon_0 \phi''(x) = |j| \sqrt{m/[2e\phi(x)]} \tag{1}$$

d) Bestimmen Sie die räumliche Abhängigkeit des Potentials $\phi(x)$ explizit durch Integration der Differentialgleichung (1). (7 Punkte)

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit $\phi'(x)$, um das erste Integral zu erhalten, und verwenden Sie, dass sowohl $\phi(x)$ als auch $E = -\phi'(x)$ bei $x = 0$ verschwinden. Das zweite Integral ist dann mit Hilfe der Separationsmethode elementar ausführbar.

e) Zeigen Sie, dass Strom und Spannung über das Child-Langmuir-Gesetz $|j| = K\phi_0^{3/2}$ verbunden sind, und geben Sie explizit die Konstante K an. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Zustandsgleichung und Photonengas

Gegeben sei ein System mit bekannten Zustandsgleichungen $p = p(V,T)$ und $U = U(V,T)$.

a) Wie lautet das Differential $\mathrm{d}S$ der Entropie $S(V,T)$? Zeigen Sie hierzu die Gültigkeit der Gleichungen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V , \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] .$$

Da die funktionellen Abhängigkeiten $p(V,T)$ und $U(V,T)$ komplett bekannt sind, sind nun auch die partiellen Ableitungen von S nach T und nach V über die obigen Gleichungen vollständig gegeben. (7 Punkte)

Die Energiedichte u und der Druck p des Photonengases seien nun gegeben durch

$$U(T,V) = u(T)V \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{1}{3}u(T) .$$

b) Berechnen Sie die ersten Ableitungen $(\partial S/\partial T)_V$ und $(\partial S/\partial V)_T$ für diesen Fall. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie nun das Stefan-Boltzmann-Gesetz,

$$u(T) = \sigma T^4 ,$$

wobei σ eine Konstante ist. Leiten Sie hierzu zunächst aus der gemischten zweiten Ableitung der Entropie nach T und V eine Differentialgleichung für $u(T)$ her. (7 Punkte)

d) Bestimmen Sie nun die Entropie $S(T,V)$ für das Photonengas. (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Thermodynamische Potentiale und Joule-Thomson-Effekt für reales Gas

Die freie Enthalpie eines realen Gases mit positiven Konstanten a und b sei

$$G(T,p) = Nk_BT\ln(p) + Np\left(b - \frac{a}{k_BT}\right) . \tag{1}$$

a) Geben Sie das vollständige Differential dG für die freie Enthalpie an, und berechnen Sie die Entropie $S(T,p)$, das Volumen $V(T,p)$ und damit die Zustandsgleichung $p = p(V,T)$. (9 Punkte)

Ergebnis zur Kontrolle:

$$p = \frac{Nk_BT}{V - N\left(b - \frac{a}{k_BT}\right)}$$

b) Berechnen Sie die Enthalpie $H(T,p)$ und damit aus dH die Wärmekapazität $C_p(T,p)$. (8 Punkte)

c) Der Joule-Thomson-Prozess ist eine Expansion bei konstanter Enthalpie. Welches Vorzeichen muss der Joule-Thomson-Koeffizient

$$\mu_{\mathrm{JT}} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H \tag{2}$$

haben, damit man eine Abkühlung erhält? In welchem Temperaturbereich $T(a,b)$ bekommt man für das reale Gas der vorherhigen Teilaufgaben beim Joule-Thomson-Prozess einen Kühleffekt? (8 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Grundzustand des Wasserstoffatoms

Das Elektron im Wasserstoffatom habe im Grundzustand die Wellenfunktion

$$\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{2}{a_B^{3/2}\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{-r/a_B},$$

wobei a_B der Bohr'sche Radius ist.

a) Überprüfen Sie die Normierung von $\Psi(r,\vartheta,\varphi)$. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle r\rangle$ und die Schwankungsbreite $\Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$ des Abstandes im Grundzustand. (11 Punkte)

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilung $P(r)$ des Abstandes r. $P(r)\,\mathrm{d}r$ sei also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Messwert für den Abstand im Intervall $[r, r+\mathrm{d}r]$ liegt. Vergleichen Sie den Abstand beim Maximum von $P(r)$ mit dem Mittelwert $\langle r\rangle$. (8 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n!\,.$

Aufgabe 2: **Teilchen auf einem Ring mit $\boldsymbol{\delta}$-Potential**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einem Ring mit Radius R. Die Position des Teilchens werde durch den Winkel φ, der zwischen 0 und 2π läuft, beschrieben. Auf dem Ring existiere bei $\varphi = 0$ ein δ-Potential der Stärke $g > 0$, so dass der Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2} g\delta(\varphi)$$

lautet.

a) Zunächst werde der Fall ohne δ-Potential, also für $g = 0$, betrachtet. Bestimmen Sie die normierten Eigenfunktionen und die zugehörigen Energieeigenwerte. (8 Punkte)

b) Neben der Stetigkeit der Wellenfunktion muss man bei Anwesenheit des δ-Potentials, also für $g > 0$, noch die Anschlussbedingung

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=2\pi} = g\psi(0)$$

für die Wellenfunktion $\psi(\varphi)$ fordern. Zeigen Sie, dass sich für die stationären Lösungen der Schrödinger-Gleichung die Eigenwertbedingung

$$\cos(2\pi k) + \frac{g}{2k}\sin(2\pi k) = 1$$

ergibt. (9 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der gerade hergeleiteten Eigenwertbedingung die Eigenenergien für ein unendlich starkes δ-Potential, also $g = \infty$. Skizzieren Sie qualitativ die Abhängigkeit der Energieeigenwerte von der Stärke g des δ-Potentials. Betrachten Sie dazu insbesondere die Grenzfälle $g = 0$ und $g = \infty$. (8 Punkte)