Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Kepler-Problem

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Kepler'schen Zentralpotential mit zugehöriger Newton'scher Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \qquad \text{Parameter } \mu > 0\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mittels der Bewegungsgleichung, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten ist. Folgern Sie, dass die Bewegung nur in einer Ebene stattfindet. (5 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die Bewegung in dieser Ebene in Polarkoordinaten (r, φ) auf. Bestimmen Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls senkrecht zur Ebene erhalten ist. Elimineren Sie nun den Winkel φ aus der Bewegungsgleichung für die Radialrichtung. (10 Punkte)

Ergebnis zum Weiterrechnen

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}\,, \qquad \dot{\varphi} = \ell/r^2\,, \qquad \text{Parameter } \ell \tag{2}$$

c) Bestimmen Sie nun die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ als Lösung von Gl. (2). Substituieren Sie hierfür $r = 1/u$, und zeigen Sie, dass $u(\varphi)$ die Differentialgleichung

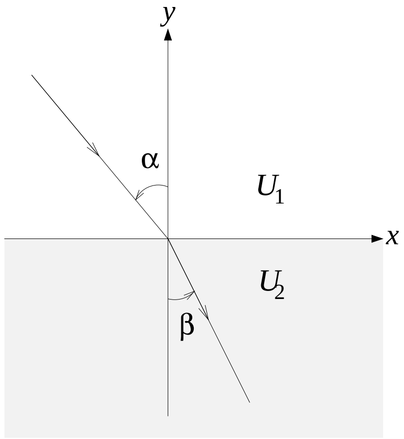
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}u(\varphi) + u(\varphi) = \frac{1}{p}\,, \qquad \text{Parameter } p \tag{3}$$

erfüllt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von Gl. (3), indem Sie zunächst eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung finden und dann die zugehörige homogene Differentialgleichung allgemein lösen. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Potentialstufe

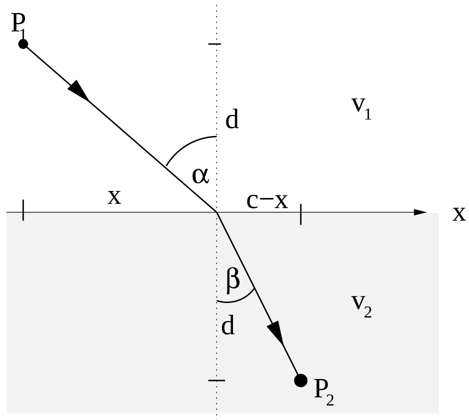
Ein Teilchen der Masse m laufe im Einfallswinkel α mit einer Geschwindigkeit vom Betrag v_1 auf eine Potenzialstufe zu (siehe Skizze). Seine potentielle Energie sei $U(x, y) = U_1$ konstant für $y > 0$ und $U(x, y) = U_2 < U_1$ konstant für $y \leq 0$.



a) Welche beiden Erhaltungsgrößen gibt es bei diesem Problem? (5 Punkte)

b) Berechnen Sie aus diesen Größen den Winkel β unter dem das Teilchen die Potentialschwelle verlässt. (8 Punkte)

Betrachten Sie nun ein Teilchen, dass sich vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 bewegt. Beide Punkte haben den Abstand d zur x-Achse. Im Bereich 1 bzw. 2 soll das Teilchen die Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 haben. Der Winkel α ist nun nicht mehr wie vorher vorgegeben, sondern α und β sollen bestimmt werden.



c) Berechnen Sie nun $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ aus der Bedingung, dass die Zeit, die das Teilchen benötigt, um von P_1 zu P_2 zu kommen, minimal wird. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Resultat aus Teilaufgabe b). (7 Punkte)

d) Aus welchem anderen Gebiet der Physik kennen Sie dieses Resultat? (2 Punkte)

e) In Teilaufgabe c) wurde die Gesamtzeit minimiert. Die Teilaufgab-e a) und b) kann man nach dem Hamilton-Prinzip ebenfalls als ein Minimierungsproblem formulieren. Welche Größe wird im letzteren Fall unter welchen Nebenbedingungen minimiert? (3 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Vektorpotential einer zylinderförmigen Stromverteilung

Gegeben sei ein unendlich langer, metallischer Vollzylinder mit Radius R, dessen Achse mit der z-Achse eines zylindrischen Koordinatensystems (ρ, φ, z) zusammenfällt. Der Leiter trage eine zeitlich konstante, homogene Stromverteilung $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ (mit $j_0 = 0$ für $\rho > R$).

Die Gleichungen der Magnetostatik lauten (in der Coulomb-Eichung)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,, \quad \Delta A = -\mu_0 \vec{j}$$

mit dem magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}$ und dem Vektorpotential $\vec{A}$.

a) Was kann man aufgrund der Symmetrie über die Richtungen und über die $\vec{r}$-Abhängigkeiten der Größen $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ sagen? (Begründungen!) (5 Punkte)

b) Wie hängt die Stromstärke I mit der Stromdichte j_0 zusammen? (3 Punkte)

c) Integrieren Sie die Poisson-Gleichung

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_0$$

mittels bestimmter Integration, und bestimmen Sie $A_z(\rho)$ für alle ρ mit der Randbedingung $\vec{A}(0) = 0$ und mit der Stetigkeit von $\vec{A}$ bei $\rho = R$. (14 Punkte)

d) Skizzieren Sie die ρ-Abhängigkeit des Vektorpotentials. (3 Punkte)

Hinweis: In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \det \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Delta A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\,. \tag{2}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Dipol in geerdeter Metallkugel

Ein Dipol $\vec{p}$ befinde sich am Ort $a\vec{e}_x\,(a > 0)$ innerhalb einer geerdeten Metallkugel mit Radius $R > a$. Es soll der zugehörige Bilddipol bestimmt werden.

a) Betrachten Sie zunächst eine einzelne Ladung q am Ort $a\vec{e}_x$. Zeigen Sie, dass sich die Randbedingung verschwindenden Potentials auf der Kugelinnenfläche erreichen lässt, wenn man eine Bildladung q' am Ort $(R^2/a)\vec{e}_x$ anbringt. Welchen Wert muss man für q' wählen? (7 Punkte)

b) Nun soll ein senkrecht zur Radialrichtung stehender Dipol $\vec{p} = p\vec{e}_y$ betrachtet werden. Um das Ergebnis des ersten Aufgabenteils verwenden zu können, nähern Sie den Dipol durch zwei betragsmäßig gleiche Ladungen an den Orten $a\vec{e}_x \pm \epsilon\vec{e}_y$ an. Wie müssen die Ladungen gewählt werden, damit im Grenzfall $\epsilon \to 0$ der Dipol richtig beschrieben wird? Bestimmen Sie nun das Bilddipolmoment. (13 Punkte)

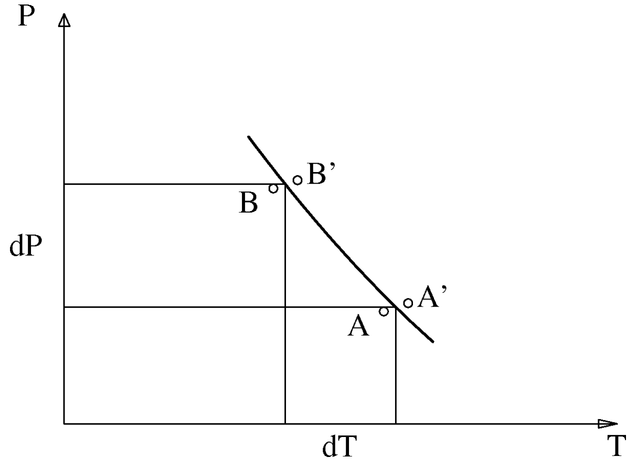
c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat, das Sie für einen Dipol vor einer unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatte erwarten. (5 Punkte)

   Hinweis: In diesem letzten Aufgabenteil ist keine explizite Rechnung erforderlich. Es genügen qualitative Überlegungen, um zum richtigen Ergebnis zu kommen.

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: **Anomalie des Wassers**



Die Abbildung zeigt schematisch einen Ausschnitt der Koexistenzkurve von flüssigem Wasser und Eis im (T, P)-Diagramm. Die Punkte A, B liegen in der festen, A', B' in der flüssigen Phase; $\mathrm{d}P = P_B - P_A$ und $\mathrm{d}T = T_B - T_A$ können als infinitesimal betrachtet werden.

a) Welche Bedingungen gelten für die chemischen Potentiale μ_A, $\mu_{A'}$ und μ_B, $\mu_{B'}$? Leiten Sie die Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{s' - s}{v' - v} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \tag{1}$$

für die Steigung der Koexistenzkurve her (s molare Entropie, v molares Volumen). Drücken Sie den Zähler durch die latente Wärme aus. (10 Punkte)

Hinweis: Gibbs-Duhem-Relation

$$\mathrm{d}\mu = -s\,\mathrm{d}T + v\,\mathrm{d}P. \tag{2}$$

b) Ein starrer Metallstab mit rechteckigem Profil und Masse M liegt so auf einem Eisblock, dass beide Enden überstehen. Die Kontaktfläche Stab/Eis betrage 1 mm $\times$ 25 cm. Das System befindet sich bei Atmosphärendruck und der Temperatur -1°C. Die latente Schmelzwärme des Eises beträgt 335 J/g. Eiswürfel schwimmen mit 4/5 ihres Volumens unter Wasser. Die Dichte von Wasser beträgt 1 g/cm^3, die Schwerebeschleunigung $g_{\mathrm{E}} = 9.81$ m/s^2. Wie groß muss M sein, damit der Metallstab durch das Eis hindurchschmilzt? (10 Punkte)

c) Ein Glas mit Eiswürfeln wird bis zum Rand mit Wasser aufgefüllt. Was passiert mit dem Wasserspiegel, wenn das Eis schmilzt? Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Physikalische Eigenschaften von realen Gasen

Ausgangspunkt ist die Zustandsgleichung für das reale Gas (Dieterici-Gas):

$$p = \frac{RT}{v - \beta}\, \mathrm{e}^{-\gamma/(vRT)} \,. \tag{1}$$

$v = N/V$ beschreibt das zur Verfügung stehende Volumen pro Teilchen, β beschreibt das Teilcheneigenvolumen und γ ein mittleres Potential.

a) Berechnen Sie die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \tag{2}$$

für das Dieterici-Gas. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie unter der Annahme $\gamma/(4RT) - \beta > 0$ die zwei Extrema $v_{1,2}$ entlang der Isothermen $p(v)$ für das Dieterici-Gas. Welche unphysikalische Eigenschaft besitzt κ_T im Intervall $v_1 < v < v_2$, und in welchem Zustand befindet sich das System in diesem Intervall? (7 Punkte)

c) Der thermische Ausdehnungskoeffizient ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \,. \tag{3}$$

Zeigen Sie zunächst, dass für das Verhältnis α/κ_T allgemein

$$\frac{\alpha}{\kappa_T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \tag{4}$$

gilt, und berechnen Sie hieraus $\alpha(T, v)$ für das Dieterici-Gas. Was erhält man für α im Grenzfall des idealen Gases? Wie verändert sich α in führender Ordnung als Funktion kleiner Werte von β und γ? (12 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Exponentielles Wellenpaket

Die Wellenfunktion eines eindimensionalen Wellenpakets sei über seine Zerlegung nach ebenen Wellen in der Form

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \tilde{\psi}(p) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x\right) \tag{1}$$

mit der normierten Wellenfunktion im Impulsraum

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \exp\left(-\frac{|p|}{2p_0}\right) \tag{2}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Ortsraumwellenfunktion $\psi(x)$ dieses Wellenpakets, und zeigen Sie, dass sie von der Form

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b^{3/2}}{x^2 + b^2} \tag{3}$$

ist. Was ergibt sich für b? Weisen Sie nach, dass die Ortsraumwellenfunktion normiert ist. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie die zweiten Momente von Orts- und Impulsoperator für das vorgegebene Wellenpaket. (12 Punkte)

Hinweis: Für die Berechnung von $\langle x^2 \rangle$ wird sinnvollerweise die Abkürzung b beibehalten. Die Berechnung von $\langle p^2 \rangle$ kann in der Impulsdarstellung durchgeführt werden.

c) Überprüfen Sie, ob das Wellenpaket der Heisenberg'schen Unschärferelation genügt. Handelt es sich um ein Wellenpaket mit minimaler Unschärfe? (5 Punkte)

Hinweis: Die folgenden Integrale können bei der Rechnung von Nutzen sein:

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x)$$

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right]$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Pöschl-Teller-Potential

Wir betrachten die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im anziehenden Pöschl-Teller-Potential,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{m\cosh^2(\alpha x)}\right)\psi_k(x) = E\psi_k(x), \quad \alpha > 0, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch

$$\psi_k(x) = C\left[\mathrm{i}k - \alpha\tanh(\alpha x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad C = \text{ const.} \tag{2}$$

Zur Erinnerung:

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}. \tag{3}$$

a) Welche zwei linear unabhängigen Lösungen zum selben Energieeigenwert $E > 0$ beinhalten Gleichungen (1) und (2)? Was beschreiben diese Lösungen physikalisch? (4 Punkte)

b) Skizzieren Sie das Pöschl-Teller-Potential qualitativ. Wie lautet die Asymptotik der Wellenfunktion (2) für $x \to \pm\infty$? Bestimmen Sie hieraus die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten. Welche Besonderheit zeigt sich hier im Vergleich zu einem typischen Streuproblem? (7 Punkte)

c) Die Lösung (2) bleibt auch dann eine Lösung der Differentialgleichung (1), wenn man k rein imaginär wählt ($E < 0$). Prüfen Sie nach, dass die resultierende Wellenfunktion für den speziellen Wert $k = \mathrm{i}\alpha$ normierbar ist und damit einen gebundenen Zustand des Pöschl-Teller-Potentials beschreibt. Vereinfachen Sie die Wellenfunktion des gebundenen Zustandes so weit wie möglich, und bestimmen Sie den Normierungsfaktor.

Hinweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}. \tag{4}$$

(7 Punkte)

d) Prüfen Sie nach, dass die Wellenfunktion des gebundenen Zustandes in der Tat der Schrödinger-Gleichung (1) mit dem entsprechenden Energieeigenwert genügt. (7 Punkte)