Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Reibung

Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ in x-Richtung und soll durch die Reibungskraft $F = -\gamma v^n$ abgebremst werden, wobei γ eine Reibungskonstante ist.

a) Skizzieren Sie für die drei Fälle $n = 1/2$, $n = 1$ und $n = 2$ die Reibungskraft als Funktion der Geschwindigkeit. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie für die drei Fälle $n = 1/2, n = 1$ und $n = 2$ die Geschwindigkeit $v(t)$. (11 Punkte)

c) Zeigen Sie für den Fall $n = 1/2$: Das Teilchen kommt nach einer Zeit t_s und nach einer Strecke x_s vollständig zur Ruhe. Berechnen Sie t_s und x_s. (4 Punkte)

d) Zeigen Sie für den Fall der Newton-Reibung $n = 2$: Das Teilchen kommt nie zur Ruhe, und es bewegt sich unendlich weit. (4 Punkte)

e) Zeigen Sie für den Fall der Stokes-Reibung $n = 1$: Das Teilchen kommt zwar nie zur Ruhe, aber es nähert sich exponentiell langsam einem Ort x_s. Berechnen Sie x_s. Wieviel Prozent seiner anfänglichen kinetischen Energie hat das Teilchen zur Zeit $t = m/r$ verloren? (4 Punkte)

Aufgabe 2: Kräftefreie Bewegung auf einer Kugel

Eine Punktmasse m bewege sich kräftefrei auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R.

a) Leiten Sie die Lagrange-Funktion $L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi})$ als Funktion der Winkel ϑ und φ in Kugelkoordinaten sowie deren Zeitableitungen her. Bestimmen Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen. (7 Punkte)

Hinweis: Für das Geschwindigkeitsquadrat gilt $v^2 = R^2 \left[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta)\right]$.

b) Zeigen Sie, dass es eine zyklische Koordinate gibt, und geben Sie die dazugehörige Erhaltungsgröße an. Gibt es neben dieser Erhaltungsgröße und der kinetischen Energie noch weitere Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche? Begründen Sie Ihre Antwort in Worten. (6 Punkte)

c) Leiten Sie aus den Ergebnissen der beiden vorherigen Teilaufgaben eine Bewegungsgleichung allein für den Winkel ϑ her, und bestimmen Sie das dazugehörige effektive Potential. (6 Punkte)

d) Die Punktmasse bewege sich ausgehend vom Punkt $\varphi = 0$, $\vartheta = \pi/2$ mit den anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}(0)$ und $\dot{\vartheta}(0)$. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses der vorigen Teilaufgabe den Extremwert des Winkels ϑ, den die Punktmasse erreicht. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Gyromagnetisches Verhältnis

Ein kugelsymmetrischer, starrer Körper habe die Ladungsdichte $\rho_q(r)$ (Gesamtladung Q) und die Massendichte $\rho_m(r)$ (Gesamtmasse M). Er rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Achse durch seinen Mittelpunkt.

a) Wie lautet der Ausdruck für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$? Zeigen Sie, dass die Divergenz von $\vec{j}$ verschwindet. Wie kann man dieses Ergebnis physikalisch verstehen? (7 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass sich das magnetische Dipolmoment

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{r} \times \vec{j} \tag{1}$$

des Körpers durch den Mittelwert von r^2 bezüglich der Ladungsverteilung,

$$\langle r^2 \rangle_q = \frac{1}{Q} \int \mathrm{d}^3 r \, r^2 \rho_q(r), \tag{2}$$

ausdrücken lässt. (9 Punkte)

Hinweis:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \tag{3}$$

c) Drücken Sie den Drehimpuls $\vec{L}$ des Körpers analog aus durch die Masse und den Mittelwert $\langle r^2 \rangle_m$ von r^2 bezüglich der Massenverteilung,

$$\langle r^2 \rangle_m = \frac{1}{M} \int \mathrm{d}^3 r \, r^2 \rho_m(r). \tag{4}$$

Von welchen Größen hängt das gyromagnetische Verhältnis $g = |\vec{\mu}|/|\vec{L}|$ eines kugelsymmetrischen, starren Körpers demnach ab? (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Elektrolytlösung

In einer Elektrolytlösung befinden sich frei bewegliche, positiv und negativ geladene Ionen. Das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ genügt der Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2\Phi = \rho(\vec{r})/\epsilon_0\,, \tag{1}$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Ladungsdichte der Ionen darstellt.

Betrachtet sei jeweils eine Sorte Kationen mit Ladung $q_+ > 0$ und Anionen der Ladung $q_- < 0$ und mittleren Teilchendichten n_+ bzw. n_-. Da die Lösung insgesamt ladungsneutral ist, gilt

$$q_+n_+ + q_-n_- = 0\,. \tag{2}$$

Für die Ladungsverteilung im Elektrolyten gelten nun folgende Modellgleichungen (Poisson-Boltzmann)

$$\rho(\vec{r}) \;\;=\;\; \rho_+(\vec{r}) + \rho_-(\vec{r})\,, \qquad \rho_\pm(\vec{r}) = q_\pm n_\pm \exp\left(-\frac{q_\pm\Phi(\vec{r})}{k_BT}\right)\,. \tag{3}$$

a) Linearisieren Sie die Modellgleichungen (3) bezüglich des elektrostatischen Potentials, und zeigen Sie, dass

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda^2}\Phi(\vec{r}) = 0\,, \tag{4}$$

gilt. Bestimmen Sie die sogenannte Abschirmlänge $\lambda > 0$. (10 Punkte)

Die Elektrolytlösung füllt nun den inneren Bereich eines Plattenkondensators. Die Platten haben den Abstand d, und es liegt die Spannung V an. In geeigneten Koordinaten hängt dann das Potential nur von der z-Koordinate ab, $\Phi = \Phi(z)$, und als Randbedingung für das Potential gilt damit $\Phi(z = \pm d/2) = \pm V/2$.

b) Bestimmen Sie das Potential, das elektrische Feld $\vec{E}$ sowie die Ladungsverteilung ρ im Inneren des Kondensators $|z| < d/2$. In welchen Bereichen akkumulieren Kationen und Anionen? (15 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Osmotischer Druck

Bei verdünnten Lösungen gilt für das chemische Potential der Lösung

$$\mu_L(p,T,c) = \mu_0(p,T) - ck_BT \ ,$$

wobei μ_0 das chemische Potential des reinen Lösungsmittels ist und c die Konzentration des gelösten Stoffes (Druck p, Temperatur T, Boltzmann-Konstante k_B).

Wenn durch eine semipermeable Membran zwischen zwei Teilen (1 und 2) eines Flüssigkeitsgefäßes nur das Lösungsmittel, nicht aber der darin gelöste Stoff treten kann, baut sich eine Druckdifferenz auf, falls die Konzentrationen des gelösten Stoffes in beiden Teilen unterschiedlich sind. Diese Druckdifferenz heißt osmotischer Druck.

a) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen im thermodynamischen Gleichgewicht an. Begründen Sie, warum das chemische Potential des gelösten Stoffes auf beiden Seiten der Membran im Allgemeinen verschieden ist. (6 Punkte)

b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingung für das chemische Potential der Lösung explizit an. (4 Punkte)

c) Es werden nun *kleine* Druckdifferenzen, $\Delta p = p_1 - p_2$, betrachtet. Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall die Beziehung

$$\Delta p = k_BT\Delta c/v$$

mit dem spezifischen Volumen v und $\Delta c = c_1 - c_2$ ergibt. (10 Punkte)

Hinweis: $\mathrm{d}\mu = -s\,\mathrm{d}T + v\,\mathrm{d}p$ (Gibbs-Duhem-Relation)

d) Was ergibt sich aus der in Teilaufgabe c) hergeleiteten Beziehung für den osmotischen Druck, wenn der Stoff auf nur einer Seite der Membran gelöst ist? (Diese Beziehung ist in der Physikalischen Chemie als van 't Hoff'sches Gesetz bekannt. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Entropie des idealen Gases, Maxwell's Dämon

a) Leiten Sie aus der allgemein gültigen Beziehung $\mathrm{d}S = \mathrm{d}U/T + p\,\mathrm{d}V/T$ und den Gleichungen für Energie und Druck des einatomigen, idealen Gases die Abhängigkeit der entsprechenden Entropie $S_{id}(U, V)$ von der Energie U und vom Volumen V bei einer festen Teilchenzahl N ab. (8 Punkte)

Das ideale Gas werde nun durch eine Trennwand in zwei Teilvolumina A und B jeweils mit Volumen $V/2$ getrennt. Neben einem kleinen Loch in der Wand sitzt Maxwell's Dämon und lässt nur Teilchen von A nach B, aber keine von B nach A. Nach einiger Zeit befinden sich also alle Teilchen in B.

b) Berechnen Sie die vom Dämon insgesamt bewirkte Änderung der Energie und der Entropie des Gases. (6 Punkte)

c) Um wieviel muss die Entropie des Dämons mindestens zunehmen, wenn der zweite Hauptsatz nicht verletzt werden soll? (5 Punkte)

Hinweis: Gas plus Dämon sollen als abgeschlossenes System betrachtet werden.

d) Bestimmen Sie, bis auf eine dimensionslose additive Konstante, den absoluten Wert $S_{id}(U, V, N)$ der Entropie eines idealen Gases aus der Boltzmann-Beziehung $S = k_B \ln W$ der statistischen Physik. Dabei bezeichnet $W(U, V, N)$ die Zahl der Mikrozustände mit gegebener Energie U, Volumen V und Teilchenzahl N. (6 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Entropie pro Teilchen nur von den beiden intensiven Variablen $u = U/N$ und $v = V/N$ abhängen kann, und machen Sie $W_{id}(U, V, N)$ dimensionslos durch einen Faktor $\hbar^2/m$, der die Dimension Energie mal Länge^2 besitzt.

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Harmonisch gebundene Ladung im Magnetfeld

Ein Teilchen mit Masse M und Ladung q bewege sich in der (x, y)-Ebene in einem harmonischen Potential und sei zudem einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung ausgesetzt. Der zugehörige Hamilton-Operator lautet

$$H = \frac{1}{2M}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + \frac{M}{2}\omega^2\vec{r}^{\,2}\,. \tag{1}$$

Zunächst soll der Fall ohne Magnetfeld betrachtet werden, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ verschwindet.

a) Geben Sie die Energie des Grundzustands und der ersten beiden angeregten Zustände in Abwesenheit des Vektorpotentials an (ohne Rechnung). (4 Punkte)

b) Die Eigenfunktionen zu den niedrigsten Eigenenergien lauten

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M\omega}{2\hbar}\left(x^2 + y^2\right)\right)\,, \\ \psi_{\pm 1}(x, y) &= \left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \left(x \pm \mathrm{i}y\right)\psi_0(x, y)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass hierdurch Eigenzustände des Drehimpulsoperators L_z beschrieben werden, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte. (10 Punkte)

Im Folgenden werde das homogene Magnetfeld in z-Richtung mit Hilfe des Vektorpotentials

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}B\left(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y\right)$$

berücksichtigt.

c) Zeigen Sie, dass durch das Magnetfeld im Hamilton-Operator (1) zwei Terme auftreten, wovon sich einer durch den Drehimpulsoperator L_z ausdrücken lässt und der andere ein zusätzliches harmonisches Potential liefert. (4 Punkte)

d) Nach geeigneter Ersetzung der Frequenz ω beschreiben die Wellenfunktionen (2) auch in Anwesenheit des homogenen Magnetfelds Energieeigenzustände. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenenergien als Funktion der magnetischen Induktion B, und skizzieren Sie diese Abhängigkeiten. (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Delta-Potential mit Potentialstufe

Gegeben sei ein eindimensionales Quantensystem mit einem Teilchen der Masse m, das sich im Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} g\,\delta(x) + V_0\,\Theta(x) \tag{1}$$

bewegt. Dabei ist

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

die Stufenfunktion. Die Potentialstufe sei positiv, $V_0 \geq 0$.

a) Leiten Sie aus der Schrödinger-Gleichung die Sprungbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ ab. (5 Punkte)

b) Betrachten Sie jetzt eine von links ($x < 0$) einfallende Streulösung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit Energie $E \geq V_0$. Geben Sie die Form der Wellenfunktion für $x < 0$ und $x > 0$ an (mit Begründung). Zeigen Sie, dass die Reflexionsamplitude durch den Ausdruck

$$r = \frac{-g + \mathrm{i}(k' - k)}{g - \mathrm{i}(k' + k)} \tag{3}$$

gegeben ist, wobei k und k' die Wellenvektoren für $x < 0$ bzw. $x > 0$ sind. Welchen Wert nimmt die Reflexionswahrscheinlichkeit für die Energie $E = V_0$ an? (10 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für ein attraktives Delta-Potential (d.h. $g < 0$) nur oberhalb einer kritischen Grenze

$$\frac{\hbar^2}{2m} g^2 > V_0 \tag{4}$$

ein gebundener Zustand existiert. (10 Punkte)