Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Rotierender, mit Wasser gefüllter Eimer

Ein zylinderförmiger Eimer (Radius R, Höhe H) ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Er rotiert gleichförmig um seine (senkrechte) Symmetrieachse im Schwerefeld der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

a) Welche Form nimmt die Wasseroberfläche an? Bestimmen Sie das Profil einschließlich der Integrationskonstanten. Sie können sich auf den Fall beschränken, dass der Boden des Eimers vollständig bedeckt bleibt.

   Hinweis: Betrachten Sie die Kräfte, die auf ein Flüssigkeitselement an der Wasseroberfläche wirken. Die resultierende Kraft steht überall senkrecht auf der Oberfläche. Nutzen Sie die Rotationssymmetrie des Problems aus. (9 Punkte)

b) Ab einer gewissen, kritischen Winkelgeschwindigkeit ω_{krit} wird der Boden des Eimers nicht mehr vollständig bedeckt sein. Wie hoch darf man den Eimer maximal füllen, damit bei $\omega = \omega_{\text{krit}}$ noch keine Flüssigkeit über den oberen Rand des Eimers austritt?

   Zur Kontrolle: Das radiale Profil bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit lautet

$$z(r) = \frac{2hr^2}{R^2} \qquad (\omega = \omega_{\text{krit}}). \tag{1}$$

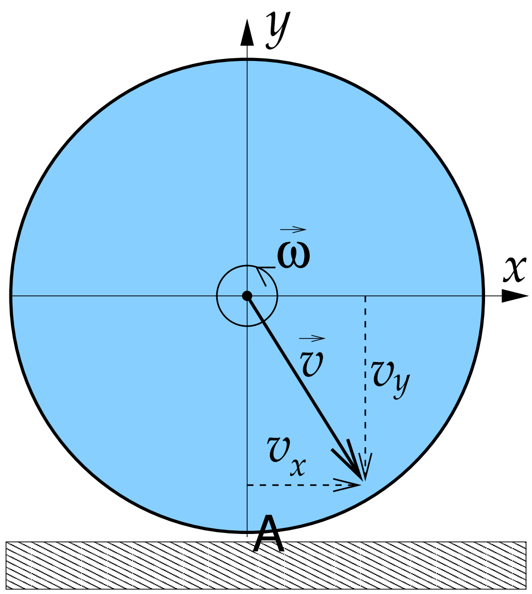
   (7 Punkte)

c) Berechnen Sie die mechanische Energie des Systems bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit. Vergleichen Sie diese mit der Arbeit, die nötig ist, um den Eimer anzuheben, indem Sie eine äquivalente Höhe d angeben. Der Beitrag des Eimers zur Energie sei vernachlässigbar. (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Superelastischer Ball

Der Schwerpunkt eines isotropen Balles mit der Masse M, dem Radius R und dem Trägheitsmoment $\Theta = \gamma M R^2$ ($\gamma < 1$) bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ wie skizziert in der (x, y)-Ebene; der Ball rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ (die z-Achse zeigt aus der Zeichenebene heraus). Der Ball werde superelastisch an einer starren Wand parallel zur (x, z)-Ebene reflektiert, d.h., der Geschwindigkeitsvektor des Berührungspunktes A (siehe Skizze) des Balls mit der Wand kehrt sich um, und die Energie bleibt erhalten. Es seien v_x und v_y die Komponenten des Schwerpunktsgeschwindigkeitsvektors (parallel bzw. senkrecht zur Wand) vor dem Auftreffen auf die Wand; nach dem Auftreffen auf die Wand seien die Größen mit ω', v'_x und v'_y bezeichnet. (Gravitationskräfte werden vernachlässigt.)



a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Berührungspunktes A auf dem Ball unmittelbar vor dem Auftreffen auf die Wand. Zeigen Sie, dass für die Größen v_x und ω unmittelbar vor dem Auftreffen auf die Wand und v'_x und ω' unmittelbar danach der Zusammenhang

$$v_x + v'_x + R\omega + R\omega' = 0$$

gilt. (5 Punkte)

b) Geben Sie den Energieerhaltungssatz an. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie v'_x als Funktion von v_x und ω. (10 Punkte)

Hinweis: Sie erhalten u.U. eine quadratische Gleichung; bestimmen Sie die nicht-triviale Lösung.

d) Unter welcher Bedingung an die Größen ω', v'_x und v'_y springt der Ball auf dem gleichen Weg zurück wie er eingetroffen ist? (5 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Vektorpotential eines geraden stromdurchflossenen Leiters

In der Magnetostatik ist der Zusammenhang zwischen der magnetischen Induktion $\vec{B}$ und der Stromdichte $\vec{j}$ durch

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

gegeben. Das Vektorpotential $\vec{A}$ ist über die Beziehung $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ definiert. Im Folgenden soll das Vektorpotential eines geraden stromdurchflossenen Leiters mit der Stromdichte $\vec{j} = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$ untersucht werden.

a) Zeigen Sie, dass in einer geeigneten Eichung das Vektorpotential durch

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

bestimmt werden kann. Wie muss die Eichbedingung gewählt werden? (4 Punkte)

b) Im Folgenden darf vorausgesetzt werden, dass das Vektorpotential nur eine z-Komponente besitzt. Warum hängt A_z für die vorgegebene Stromverteilung nur vom senkrechten Abstand ρ vom Leiter ab? Bestimmen Sie die Form dieser Abhängigkeit im stromfreien Bereich. (10 Punkte)

c) Verwenden Sie den Satz von Gauß, um das Vektorpotential für die vorgegebene Stromverteilung bis auf einen konstanten Vektor zu bestimmen. (11 Punkte)

Hinweis: Es ist sinnvoll, ein Vektorfeld $\vec{C} = \mathrm{grad}A_z$ einzuführen.

Nützliche Formeln:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

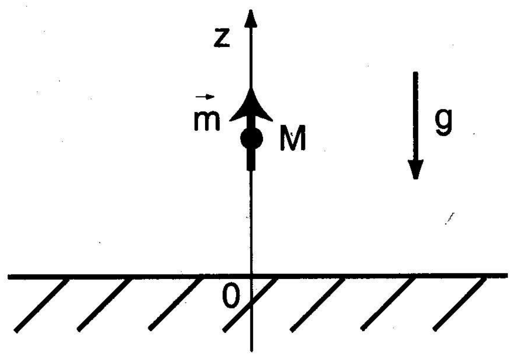
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Bilddipol (Meissner-Effekt)

Ein Punktdipol bei $z = h$ mit nach oben gerichtetem magnetischen Moment $\vec{m} = m\,\vec{e}_z$, $m > 0$ und Masse M befinde sich im Gravitationsfeld mit Erdbeschleunigung g über einem Supraleiter, der sich im Halbraum $z \leq 0$ befinde (s. Skizze). Das vom Dipol und dem Supraleiter insgesamt verursachte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ muss im Supraleiter, d. h. im Halbraum $z < 0$, identisch verschwinden (das ist der so genannte Meissner-Effekt).

m



a) Die Bedingung eines verschwindenden Magnetfeldes im Halbraum $z < 0$ lässt sich durch die Einführung eines Bilddipols mit magnetischem Moment $\vec{m}_\mathrm{B} = -m\,\vec{e}_z$ bei $z = -h$ erfüllen. Bestimmen Sie damit das magnetische Feld $\vec{B}$ im Halbraum $z \geq 0$ explizit in Zylinderkoordinaten r, z mit $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. (Die Winkelkoordinate φ spielt wegen der Rotationssymmetrie um die z-Achse keine Rolle und kann daher o.B.d.A. gleich Null gesetzt werden.) (8 Punkte)

Hinweis: Ein Punktdipol $\vec{m}$ am Punkt $\vec{r}\,'$ erzeugt am Ort $\vec{r}$ ein magnetisches Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3\,[\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]\,(\vec{r}-\vec{r}\,') - \vec{m}\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass das magnetische Feld $\vec{B}(r, z = 0) = B(r)\vec{e}_r$ in der Ebene $z = 0$ rein radiale Richtung hat. Wieso muss die Normalkomponente B_z in dieser Ebene verschwinden? (5 Punkte)

c) Berechnen Sie das Feld $\vec{B}_\mathrm{B}(r = 0, z)$ des Bilddipols auf der z-Achse, und bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtshöhe h_0 des stromführenden Kreisrings über dem Supraleiter aus dem Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und der repulsiven Kraft $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}_\mathrm{B})$ auf sein magnetisches Moment $\vec{m}$ im inhomogenen Feld des Bilddipols. (6 Punkte)

d) Berechnen Sie die Flächenstromdichte $\vec{K}$ der Abschirmströme auf der Oberfläche des Supraleiters, die für das Verschwinden des Magnetfeldes im Bereich $z < 0$ verantwortlich sind. (6 Punkte)

Hinweis: Eine Flächenstromdichte $\vec{K}$ in einer Fläche mit Normalenvektor $\vec{n}$ führt aufgrund des Ampere'schen Gesetzes zu einem Sprung des Magnetfelds zwischen der unteren ($\vec{B}_-$) und der oberen ($\vec{B}_+$) Seite der Grenzfläche

$$\vec{B}_+ - \vec{B}_- = \mu_0\,\vec{K}\times\vec{n}\,.$$

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Thermodynamische Potentiale und Hohlraumstrahlung

Für elektromagnetische Hohlraumstrahlung gilt die Relation

$$S = \frac{4}{3}(bVU^3)^{1/4} \tag{1}$$

zwischen den extensiven Variablen Entropie S, Volumen V und innerer Energie U. Teilchenzahl und chemisches Potential spielen hier bekanntlich keine Rolle.

a) Leiten Sie aus Gl. (1) die Zustandsgleichungen (Druck P, Temperatur T)

$$U = bVT^4, \qquad PV = \frac{1}{3}U \tag{2}$$

her. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie die freie Energie $F(T,V)$ über eine Legendre-Transformation, ausgehend von $U(S,V)$. (6 Punkte)

c) Berechnen Sie die freie Energie auf eine alternative Weise, indem Sie die Euler-Relation

$$U = TS - PV \tag{3}$$

für $U(S,V)$ sowie die Zustandsgleichungen (2) ausnutzen. (6 Punkte)

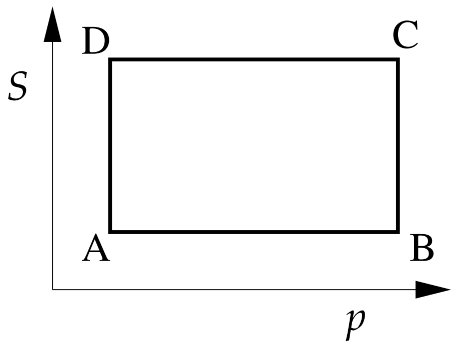
d) Die Konstante b kann mikroskopisch betrachtet nur von den dimensionsbehafteten Naturkonstanten k_{B}, $\hbar$ und c abhängen. Geben Sie diese Abhängigkeit aufgrund einer Dimensionsbetrachtung an, d.h. bestimmen Sie b bis auf einen reinen Zahlenfaktor. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Der Brayton(Joule)-Kreisprozess**

Der Brayton- oder Joule-Kreisprozess besteht aus je zwei alternierend isentropen und isobaren Prozess-Schritten wie in der Skizze gezeigt. Für ein ideales Gas gilt

$$S(T,p) - S(T_0,p_0) = C_p \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\frac{p}{p_0} \quad (1)$$



a) Skizzieren Sie den Kreisprozess im (p,S)-Diagramm und im (p,V)-Diagramm; der Umlaufsinn soll so angegeben werden, dass der Prozess eine Wärmekraftmaschine beschreibt.
(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass entlang einer Adiabaten die Gleichung

$$\frac{T}{p^\delta} = Y \quad (2)$$

mit einer von der Entropie abhängigen Konstanten Y gilt. Bestimmen Sie den Adiabaten-Exponenten δ.
(6 Punkte)

c) Bestimmen Sie die zu- oder abgeführten Wärmen in den einzelnen Prozess-Schritten.
(6 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad als Funktion der Drücke p_{A} und p_{B}. (7 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Bewegung eines Teilchens im unendlich tiefen Potentialtopf

Es soll die Dynamik eines Teilchens in einem unendlich tiefen eindimensionalen Potentialtopf, dessen Mittelpunkt bei $x = 0$ liege, untersucht werden. Der Anfangszustand sei durch

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

gegeben, wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die Zustandsvektoren von Grundzustand bzw. erstem angeregtem Zustand sind. Die Winkel $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ legen relatives Gewicht und relative Phase der beiden Zustände fest. Die Energiedifferenz zwischen dem ersten angeregten Zustand und Grundzustand sei ΔE.

a) Skizzieren Sie die Wellenfunktionen $\langle x|0\rangle$ des Grundzustands und $\langle x|1\rangle$ des ersten angeregten Zustands im unendlich tiefen Potentialtopf. Für die weiteren Aufgabenteile benötigen Sie keine weitere Information über die Wellenfunktionen. (4 Punkte)

b) Welche der Matrixelemente $\langle 0|x|0\rangle$, $\langle 0|x|1\rangle$, $\langle 1|x|1\rangle$, $\langle 0|p|0\rangle$, $\mathrm{i}\langle 0|p|1\rangle$ und $\langle 1|p|1\rangle$ sind von Null verschieden? Begründen Sie Ihre Antwort. Zeigen Sie für die von Null verschiedenen Matrixelemente, dass diese reell sind, und bestimmen Sie deren Vorzeichen unter Verwendung der in Teilaufgabe a skizzierten Wellenfunktionen. (8 Punkte)

c) Geben Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ als Funktion der Zeit an, und bestimmen Sie daraus die Zeitabhängigkeit der ersten Momente $\langle x(t)\rangle$ des Orts und $\langle p(t)\rangle$ des Impulses. Für welchen Wert von θ wird die Amplitude maximal? Bei welchen Zeiten liegen die Maxima von $\langle x(t)\rangle$ und $\langle p(t)\rangle$? (11 Punkte)

d) Welcher Zusammenhang ergibt sich mit Hilfe des Ehrenfest'schen Theorems zwischen den Matrixelementen $\langle 0|p|1\rangle$ und $\langle 0|x|1\rangle$? (2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Wasserstoff-Elektron**

Ein Elektron bewege sich im Coulomb-Potential des Protons. Seine Grundzustandsenergie ist bekanntlich ein Rydberg, $E_1 = -R_y$, und seine stationären Zustände werden durch $|n, l, m\rangle$ beschrieben, wobei n, l und m die Quantenzahlen der Energie, des Quadrates bzw. der z-Komponente des Drehimpulses L sind.

Zur Zeit $t = 0$ habe das Elektron den Zustandsvektor

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{6}\left[3\,|1,0,0\rangle - 4\,|2,1,1\rangle + \sqrt{10}\,|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\right] . \qquad (1)$$

a) Welche möglichen Messwerte liefert eine Energiemessung an diesem Zustand? (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Energie, des Quadrates des Drehimpulses und der z-Komponente des Drehimpulses. (4 Punkte)

c) Geben Sie den zeitabhängigen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ an, wobei Sie die Abkürzung $\omega = R_y/\hbar$ einführen sollten. (6 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W_1(t)$, dass sich das Elektron zur Zeit t im Grundzustand befindet? (4 Punkte)

e) Geben Sie die explizite Zeitabhängigkeit für die Wahrscheinlichkeit $W_0(t)$ dafür an, dass sich das Elektron zur Zeit t im Anfangszustand befindet. (7 Punkte)