

Themenschwerpunkt AMechanikAufgabe 1: Freies Teilchen auf Kegel

Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich kräftefrei auf einem Kegel, der in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  durch  $z = \alpha r$  mit  $\alpha > 0$  definiert ist. Die Bewegung des Teilchens sei auf  $z > 0$  beschränkt.

- a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ . (6 Punkte)
- b) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion der vorigen Teilaufgabe die Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\varphi$  her. (8 Punkte)
- c) Weisen Sie nach, dass der Drehimpuls  $L_z$  um die  $z$ -Achse erhalten ist. Zeigen Sie ferner, dass der Energieerhaltungssatz in der Form

$$Ar^2 + \frac{B}{r^2} = E \quad (1)$$

gilt. Was ergibt sich für die Konstanten  $A$  und  $B$ ? (5 Punkte)

- d) Begründen Sie, dass  $\dot{r} = \dot{\varphi}(dr/d\varphi)$  gilt. Verwenden Sie diese Beziehung zusammen mit (1), um die Bahnkurve  $r(\varphi)$  zu bestimmen. Welche minimale Höhe erreicht das Teilchen bei gegebenem Drehimpuls  $L$  und gegebener Energie  $E$ ? (6 Punkte)

*Nützliche Formel:*

$$\int dx \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{a}{x}\right)$$

**Aufgabe 2: Relativistische Bewegung**

- a) In der nichtrelativistischen Mechanik ändern sich beim Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes die räumlichen Koordinaten, aber die Abstände zwischen Raumpunkten sind invariant. In der relativistischen Mechanik gibt es eine andere Größe, die als invarianter Abstand zweier Ereignisse interpretiert wird.

Geben Sie diese Größe für zwei Ereignisse an, die bei  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  stattfinden.

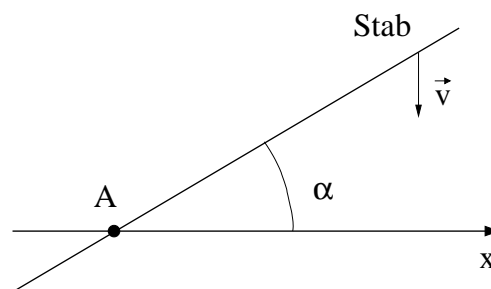
Es gibt instabile Elementarteilchen, die nach einer gewissen Zeit zerfallen. Als Halbwertszeit solcher Teilchen wird die Zeitspanne bezeichnet, nach der von ursprünglich  $N$  Teilchen im Mittel  $N/2$  zerfallen sind, wobei die Halbwertszeit im Ruhesystem der Teilchen zu messen ist bzw. angegeben wird.

- c) Betrachten Sie einen Strahl instabiler Teilchen, die mit  $v = 0.9 c$  zwei Zähler passieren, die im Labor entlang der  $z$ -Achse stehen und einen Abstand von 9 m haben. Der erste Zähler detektiert 1000 Teilchen, der zweite Zähler nur 250.

Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Teilchen in deren Ruhesystem. Für die Größe der Lichtgeschwindigkeit können Sie den Wert  $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  verwenden. (15 Punkte)

- d) Betrachten Sie nun einen extrem langen, geraden Stab, der um einen Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigt ist (siehe Abb.) und sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $v$  nach unten bewegt.

Geben Sie die Geschwindigkeit  $v_A$  an (in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $v$ ), mit der sich der Schnittpunkt  $A$  nach rechts bewegt. Kann diese Geschwindigkeit im Prinzip, d.h. geometrisch betrachtet, größer als die Lichtgeschwindigkeit werden? Kann mit einem real existierenden Stab durch Hin- und Herbewegen ein Signal mit Überlichtgeschwindigkeit übermittelt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (10 Punkte)



## Themenschwerpunkt B

### Elektrodynamik/Optik

#### Aufgabe 1: Punktladung im Zentrum einer Kugelschale

Eine Punktladung  $Q$  befindet sich im Zentrum einer dünnen, ideal leitenden Kugelschale vom Radius  $R$  (Dicke vernachlässigbar). Die Kugelschale sei zunächst ungeladen.

- Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke und das elektrostatische Potential für diese Anordnung. Erklären Sie das Ergebnis physikalisch. (9 Punkte)
- Wie ändern sich die Ergebnisse von Teilaufgabe a), wenn (zusätzlich zur Punktladung) die Kugelschale selbst die Ladung  $-Q$  trägt? Nehmen Sie an, dass es sich um eine homogene Ladungsverteilung handelt. (8 Punkte)
- Der Unterschied zwischen der elektrostatischen Energie des Gesamtsystems und derjenigen der beiden getrennten Einzelsysteme (Punktladung und Kugelschale) stellt die Bindungsenergie der Anordnung aus Teilaufgabe b) dar. Berechnen Sie diese Bindungsenergie.

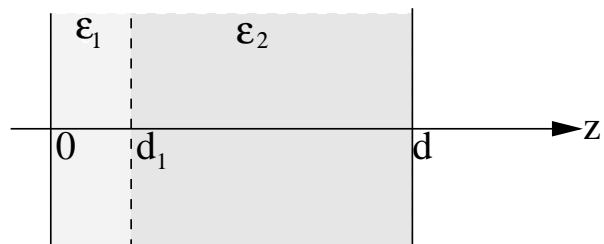
*Hinweis:* Die elektrostatische Energie ist gegeben durch

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2. \quad (1)$$

(8 Punkte)

#### Aufgabe 2: Dielektrika im Plattenkondensator

Bei einem Paar unendlich ausgedehnter, ebener Kondensatorplatten (vgl. Skizze), deren Flächen senkrecht zur  $z$ -Achse stehen, sei die linke Platte bei  $z = 0$  und trage die Flächenladungsdichte  $+\sigma$  (mit  $\sigma > 0$ ), die rechte Platte sei bei  $z = d$  und trage die Flächenladungsdichte  $-\sigma$ . Das Potential der linken Platte sei Null.



Der Raum zwischen den Platten sei mit zwei Schichten dielektrischer Materials ausgefüllt, wobei die linke Schicht die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  und Dicke  $d_1$  habe. Die andere Schicht habe die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$ .

- Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(z)$  und die Polarisation  $\vec{P}(z)$  zwischen den Kondensatorplatten. (12 Punkte)
- Berechnen Sie den Verlauf des Potentials  $\phi(z)$  im Kondensator, und skizzieren Sie ihn unter der Annahme  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . (8 Punkte)
- Geben Sie die Kapazität pro Fläche des Kondensators an. (5 Punkte)

## Themenschwerpunkt C

### Thermodynamik

#### Aufgabe 1: Bose-Kondensat

Bei tiefen Temperaturen bildet sich für nicht wechselwirkende Bosonen eine neue Phase, das sogenannte Bose-Kondensat. Hier sollen die thermodynamischen Eigenschaften des Bose-Kondensats diskutiert werden.

Gegeben sei die Wärmekapazität  $C_V$  eines Systems von  $N$  Bosonen bei konstantem Volumen  $V$  bei tiefen Temperaturen

$$C_V = C_V(T, V, N) = KT^{3/2}V. \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet  $K$  eine Konstante. Die Teilchenzahl  $N$  ist für diese Aufgabe durchweg konstant.

- a) Bestimmen Sie die zugehörige Entropie als Funktion der Temperatur und des Volumens unter Berücksichtigung des dritten Hauptsatzes. (5 Punkte)
- b) Berechnen Sie die freie Energie  $F(T, V, N)$  des Systems, und leiten Sie daraus die thermische Zustandsgleichung  $P = P(T, V, N)$  ab. Beachten Sie, dass für nicht wechselwirkende Teilchen die innere Energie am absoluten Nullpunkt identisch Null ist. Zeigen Sie, dass die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} \quad (2)$$

in der gesamten Tieftemperaturphase divergiert. (12 Punkte)

*Zwischenergebnis zur Kontrolle:* Bis auf einen dimensionslosen Faktor ist die freie Energie durch  $C_V T$  gegeben.

- c) Zeigen Sie die thermodynamische Identität

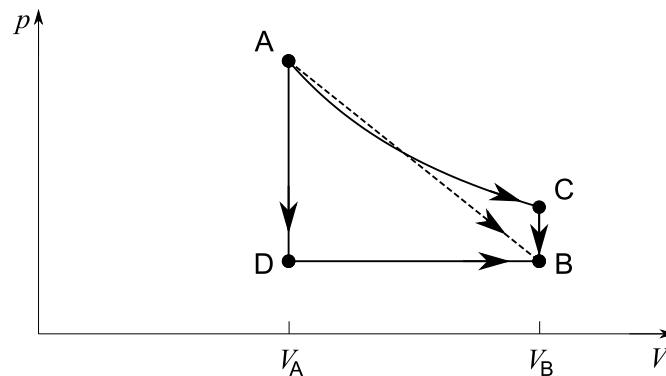
$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{\alpha}{\kappa_T}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} \quad (3)$$

den thermischen Ausdehnungskoeffizienten bezeichnet. Berechnen Sie  $(\partial P / \partial T)_{V,N}$ . Welche Schlussfolgerung ziehen Sie für  $\alpha$ ? (8 Punkte)

### Aufgabe 2: Reversible Expansion eines Gases

Ein Gas expandiert vom Volumen  $V_A$  zum doppelten Volumen  $V_B = 2V_A$  und leistet dabei mechanische Arbeit. Betrachten Sie die drei skizzierten thermodynamischen Prozesse, die vom Zustand A mit dem Druck  $p_A$  und dem Volumen  $V_A$  zum Zustand B mit dem Volumen  $V_B$  und Druck  $p_B$  führen. Es seien  $A \rightarrow C$  isotherm,  $D \rightarrow B$  isobar,  $C \rightarrow B$  und  $A \rightarrow D$  isochor, und die gestrichelte Kurve  $A \rightarrow B$  ist eine Gerade im  $p, V$ -Diagramm.

Diese Prozesse sollen reversibel ablaufen, und  $p_A$  und  $V_A$  seien bekannt. Ferner soll gelten, dass der Zustand A mit dem Zustand B ebenso durch einen adiabatischen Prozess, also ohne Wärmeübertrag verbunden werden kann, der nicht eingezeichnet ist. Das Gas soll durch ein ideales Gas beschrieben werden, also durch die Gesetze  $U = (3/2) Nk_B T$  und  $pV = Nk_B T$ , wobei  $U$  die innere Energie,  $N$  die Teilchenzahl und  $T$  die Temperatur des Gases ist.



- Berechnen Sie die relative Änderung des Druckes  $p_B/p_A$  und der Temperatur  $T_B/T_A$  bei diesem Prozess. (7 Punkte)
- Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie  $U_B - U_A$ . Hängt diese Größe vom jeweiligen Prozess ab? (7 Punkte)
- Bei welchen der drei Prozesse wird Wärme vom Gas aufgenommen, und bei welchen wird Wärme abgegeben (ohne Rechnung)? (5 Punkte)
- Berechnen Sie diese Wärme  $Q$  und die dabei geleistete Arbeit  $W$  für die drei Prozesse als Funktion von  $p_A V_A$ . (6 Punkte)

**Themenschwerpunkt D****Quantenmechanik****Aufgabe 1: Attraktives  $\delta$ -Potential**

Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}g\delta(x), \quad g > 0. \quad (1)$$

Die Wellenfunktion  $\varphi(x)$ , welche die stationäre Schrödinger-Gleichung erfüllt, gehorcht der Bedingung

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} [\varphi'(+\epsilon) - \varphi'(-\epsilon)] = -g\varphi(0) \quad (2)$$

mit  $\varphi'(x) = d\varphi(x)/dx$ .

- a) Welche Einheit hat die Größe  $g$ ? (2 Punkte)
- b) Wie verhält sich die Wellenfunktion als Funktion von  $x$  für einen gebundenen Zustand im Bereich  $x \neq 0$  bei gegebener Energie  $E < 0$ ?  
Bestimmen Sie die Grundzustandswellenfunktion (ohne Normierung) und die Grundzustandsenergie  $E_0$  unter Verwendung der Bedingung (2). (7 Punkte)

Im Folgenden soll eine von links ( $x < 0$ ) einfallende Welle

$$\varphi_{\text{ein}}(x) = A e^{ikx}$$

betrachtet und der Transmissionskoeffizient untersucht werden.

- c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in den Bereichen  $x < 0$  und  $x > 0$ . Eine Normierung ist nicht nötig. (7 Punkte)
- d) Bestimmen Sie die Stromdichten der einfallenden und transmittierten Welle. Bestimmen und skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten als Funktion der Energie. (9 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 2: Quantenkreisel**

Die Rotationsenergie eines quantenmechanischen Teilchens soll durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = a (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) + b \hat{L}_z^2$$

mit reellen Parametern  $0 < a \leq b$  beschrieben werden.  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  und  $\hat{L}_z$  sind die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators  $\hat{\vec{L}}$ .

- a) Welche physikalische Bedeutung haben die Parameter  $a$  und  $b$ , und welches Teilchen könnte dieser Hamilton-Operator beschreiben? (5 Punkte)
- b) Drücken Sie den Hamilton-Operator  $\hat{H}$  durch die Operatoren  $\hat{L}^2$  und  $\hat{L}_z$  aus, und berechnen Sie die Energien der stationären Zustände. (6 Punkte)
- c) Geben Sie den Entartungsgrad der Eigenenergien an, und zwar für
  - (i)  $a = b$  und für
  - (ii)  $0 < b - a \ll a$ .

Zufällige Entartungen sollen dabei nicht berücksichtigt werden. (4 Punkte)

Die Eigenzustandsvektoren zu den Operatoren  $\hat{L}^2$  und  $\hat{L}_z$  mit den entsprechenden Quantenzahlen  $l$  und  $m$  seien die normierten Vektoren  $|l, m\rangle$ . Betrachten Sie nun den Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|1, 0\rangle + \frac{1}{2}|2, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 2\rangle.$$

- d) Welche Energiewerte werden in diesem Zustand gemessen, und mit welcher Wahrscheinlichkeit? (5 Punkte)
- e) Berechnen Sie den Mittelwert und die Schwankung des Operators  $\hat{L}_z$  für diesem Zustand. (5 Punkte)