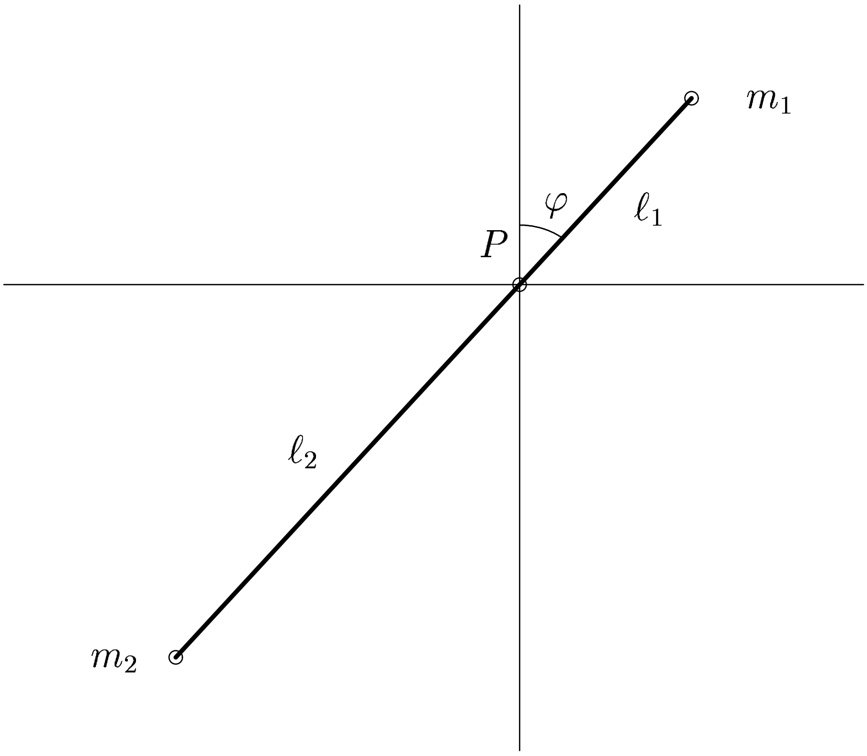
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Pendel

Zwei Massepunkte m_1, m_2 befinden sich an den Enden eines starren, masselosen Stabes. Der Stab ist in einem Punkt P so gelagert, dass er sich in einer vertikalen Ebene um P drehen kann. Die Abstände der Massepunkte von P seien ℓ_1 und ℓ_2. Es wirke die Schwerkraft.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ auf. (9 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen, und diskutieren Sie deren Stabilität. (8 Punkte)

c) Wie groß ist die Frequenz kleiner Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage? Für welche Parameter des Pendels verschwindet die Frequenz? Beschreiben Sie die Form der Bewegung für diesen Spezialfall. (8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Elliptische Bahn

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Raum je nach Anfangsbedingungen auf den Bahnen

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)\vec{e}_y,$$

wobei $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ orthonormale Einheitsvektoren und r_0, v_0 die Beträge der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit $t = 0$ sind.

a) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$, die auf das Teilchen wirkt. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass diese Kraft konservativ ist. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie ein Potential $U(\vec{r})$ zu dieser Kraft. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie das auf das Teilchen wirkende Drehmoment sowie seinen Drehimpuls. (5 Punkte)

e) Berechnen Sie die gesamte Energie des Teilchens.
Mit welcher Periode ändert sich seine kinetische Energie? (5 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Felder einer linearen Ladungsverteilung

Die gesamte z-Achse sei mit einer konstanten linearen Ladungsdichte ρ_L belegt, die sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung steigender z-Werte bewegt. Es fließt also ein Strom $I = \rho_\mathrm{L} v$ entlang der z-Achse.

a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$, die durch den Strom I erzeugt wird. (6 Punkte)

b) Die Ladungsverteilung ρ_L führt auch zu einem elektrischen Feld $\vec{E}$. Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ in Zylinderkoordinaten nur eine Radialkomponenten besitzt, und bestimmen Sie das elektrische Feld mit Hilfe des Satzes von Gauß. Es ist hierzu sinnvoll, einen geeignet gewählten Zylinder als Integrationsvolumen heranzuziehen. (8 Punkte)

c) Man kann zeigen, dass $\vec{B}^2 - (1/c^2)\vec{E}^2$ in jedem Inertialsystem den gleichen Wert besitzt. Was folgt daraus für den Betrag des elektrischen Feldes im Ruhesystem der Ladungsverteilung? Welche lineare Ladungsdichte ρ_L^0 beobachtet man demnach im mitbewegten Bezugssystem? Erklären Sie den Unterschied zwischen ρ_L und ρ_L^0. (11 Punkte)

Zur Erinnerung: Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \qquad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Drude-Modell

Das Drude-Modell stellt ein einfaches Modell für elektronischen Transport in Metallen dar. Hierbei wird angenommen, dass freie Elektronen mit der Ladung $-e$ und mit der effektiven Masse m^* einem zeitabhängigen externen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$ ausgesetzt sind. Zusätzlich wirkt eine phänomenologische Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ der Elektronen ist. Für ein einzelnes Elektron gilt also die Bewegungsgleichung

$$m^*\dot{\vec{v}}(t) + \gamma\vec{v}(t) = -e\vec{E}(t)\,. \tag{1}$$

Die Stromdichte ergibt sich als $\vec{j}(t) = -ne\vec{v}(t)$, wobei n die Dichte der freien Elektronen im Metall darstellt.

a) Formulieren Sie aus Gleichung (1) die Bewegungsgleichung

$$\partial_t\vec{j}(t) + \frac{1}{\tau}\vec{j}(t) = \omega_p^2\epsilon_0\vec{E}(t) \tag{2}$$

für die Stromdichte $\vec{j}(t)$, und bestimmen Sie die charakteristische Zeitskala τ sowie die sogenannte Plasmafrequenz ω_p aus den Parametern m^* und n.
Berechnen Sie die Plasmafrequenz für Aluminium; die zugehörige freie Elektronendichte beträgt $n = 1{,}81 \times 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$, und die effektive Masse m^* der Elektronen stimmt näherungsweise mit der Masse m freier Elektronen überein. (6 Punkte)

b) Führen Sie eine Fourier-Transformation,

$$\vec{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{j}(t)\,, \qquad \vec{j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\vec{j}_\omega$$

durch, und zeigen Sie, dass im Frequenzraum $\vec{j}_\omega = \sigma_\omega\vec{E}_\omega$ gilt. Bestimmen Sie die komplexe frequenzabhängige Leitfähigkeit σ_ω. (8 Punkte)

c) Zerlegen Sie die Leitfähigkeit in Real- und Imaginarteil, $\sigma_\omega = \sigma'_\omega + \mathrm{i}\sigma''_\omega$, und fertigen Sie eine Skizze von σ'_ω und σ''_ω als Funktion von ω an. Diskutieren Sie das Verhalten für kleine und große Frequenzen ω. Welche Terme der Gleichung (2) dominieren jeweils das Nieder- und Hochfrequenzverhalten? (11 Punkte)

Konstanten:

Dielektrizitätskonstante des Vakuums:	$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\dfrac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V\cdot m}}$
Elektronenmasse:	$m = 9{,}109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Elementarladung:	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Polarisierung und Temperaturänderung

Ein dielektrische System befinde sich in einem elektrischen Feld E und sei charakterisiert durch eine Polarisation

$$P = \alpha \frac{T_c}{T - T_c} E$$

und eine Wärmekapazität (bei konstantem Feld E)

$$C_E = c \frac{T_c^2}{(T - T_c)^2} \; .$$

T_c, c und α sind positive Konstanten.

Der erste Hauptsatz lautet für dieses System

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + E\,\mathrm{d}P$$

(enstprechend der Relation $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$ für ein kompressibles System).

a) Welches ist das thermodynamische Potential mit den natürlichen Variablen T und E? Beweisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \; .$$

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Wärmemenge im dielektrischen System bei einem quasistatischen Prozess gegeben ist durch

$$\delta Q = C_E\,\mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \mathrm{d}E \; . \tag{1}$$

(5 Punkte)

c) Falls kein Wärmeaustauch zwischen dem dielektrischen System und der Umgebung stattfindet, lautet die Differentialgleichung für die Temperatur $T(E)$ des dielektrischen Systems

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_S = \frac{\alpha}{c}\,\frac{T}{T_c}\,E \; .$$

Zeigen Sie dies. (5 Punkte)

d) Das dielektrische System habe eine Anfangstemperatur T_0 und befinde sich in einem Feld $E = E_0$. Dieses Feld werde so schnell abgeschaltet, dass kein Wärmeaustausch zwischen dem dielektrischen System und der Umgebung stattfindet, aber so langsam, dass der Prozess als quasistatisch behandelt werden kann.
Bestimmen Sie die Temperatur T_1 des dielektrischen Systems nach Abschalten des Feldes.
Nimmt die Temperatur zu oder ab? (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Temperaturausgleich

Zwei Körper gleicher Wärmekapazität C, aber mit verschiedenen Anfangstemperaturen T_1 und T_2, werden durch einen thermodynamischen Prozess auf die gemeinsame Endtemperatur T_e gebracht.

a) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie $U(T)$ und der Entropie $S(T)$ eines beliebigen Körpers im thermischen Gleichgewicht, dessen Wärmekapazität C temperaturunabhängig sei.

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Gesamtsystems beim Temperaturausgleich als Funktion derTemperaturen T_1, T_2 und T_e, und geben Sie eine vom detaillierten Prozess unabhängige untere Schranke für die Endtemperatur T_e an. Unter welchen Bedingungen wird diese Schranke realisier?

(8 Punkte)

c) Berechnen Sie Endtemperatur T_e explizit für den Fall, dass während des Prozesses keine Arbeit verrichtet wird. Zeigen Sie allgemein, dass die entsprechende Temperatur die aus Teilaufgabe (b) bekannte Ungleichung erfüllt. (6 Punkte)

d) Geben Sie die maximale Arbeit an, die beim Temperaturausgleich der beiden Körper gewonnen werden kann. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Konstruktion von Streulösungen

Es soll die Streuung eines Teilchens der Masse m an einem deltaförmigen Potential $V(x) = \alpha\delta(x)$ mit $\alpha > 0$ untersucht werden.

a) Geben Sie die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung an, und leiten Sie hieraus die Sprungbedingung

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = c\psi(0) \tag{1}$$

für die Ableitung der Wellenfunktion her. Welcher Wert ergibt sich für die Konstante c?
(4 Punkte)

b) Bestimmen Sie unter Beachtung der Sprungbedingung (1) den symmetrischen und antisymmetrischen Eigenzustand $\psi_\mathrm{s}(x)$ bzw. $\psi_\mathrm{a}(x)$ zur Energie $E = \hbar^2 k^2/(2m)$.
(8 Punkte)

c) Betrachten Sie nun die Linearkombination der beiden Eigenzustände,

$$\psi(x) = C_\mathrm{s}\psi_\mathrm{s}(x) + C_\mathrm{a}\psi_\mathrm{a}(x)\,,$$

und bestimmen Sie das Verhältnis der Koeffizienten C_s und C_a so, dass die Wellenfunktion für $x > 0$ lediglich durch eine nach rechts laufende Welle gegeben ist. Was ergibt sich damit für die Wellenfunktion für $x < 0$?
(6 Punkte)

d) Verwenden Sie das Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe, um den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R zu bestimmen. Überzeugen Sie sich davon, dass $T + R = 1$ gilt.
(7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Kontinuitätsgleichung

Vorgelegt sei die zeitabhängige Schrödingergleichung mit reellem Potential $V(\vec{x},t)$,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\vec{x},t)\psi\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der reellen Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}(\vec{x},t) = 0\,, \tag{2}$$

wobei $\rho(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t)$ gilt. Welche physikalische Interpretation besitzen $\rho(\vec{x},t)$ und $\rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}V$ mit dem Volumenelement $\mathrm{d}V$? Zeigen Sie, dass die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x},t)$ die Form

$$\vec{j}(\vec{x},t) = c\,(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \tag{3}$$

hat, und bestimmen Sie die Konstante c. (9 Punkte)

Vorgelegt sei eine eindimensionale Potentialstufe $V(x) = 0$ für $x < 0$ und $V(x) = V_0 > 0$ für $x > 0$. Es wird ein stationärer Strom von von links einfallenden Teilchen mit Energie $E > V_0$ betrachtet.

b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $x < 0$ und $x > 0$, und bestimmen Sie die Stromdichten j_E des einfallenden Teilchenstroms und j_D des durchgehenden Teilchenstroms. (5 Punkte)

c) Welche Anschlussbedingungen gelten für die Wellenfunktion und ihre Ableitung an der Stufe? Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Anschlussbedingungen und der Kontinuitätsgleichung die Stromdichte $j_R(x)$ der reflektierten Welle. (6 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten $T = j_D/j_E$, wobei j_E die einfallende und j_D die durchgehende Stromdichte bezeichnen. Wie verhält sich der Transmissionskoeffizient T für $E \to \infty$? (5 Punkte)