Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bewegung mit Reibung

In dieser Aufgabe soll die eindimensionale Bewegung eines kleinen kugelförmigen Körpers mit Volumen V in einem viskosen Medium betrachtet werden. Die Reibungskraft werde durch einen geschwindigkeitsabhängigen Term

$$F_R = -\alpha v \,, \tag{1}$$

berücksichtigt, wobei α eine reelle positive Konstante ist.

a) Welche Einheit hat die Konstante α? Berechnen Sie die Teilchenbahn $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $v(0) = v_0 > 0$. Welche Position $x(t)$ ergibt sich für große t? (4 Punkte)

b) Zusätzlich wird nun ein konstantes Gravitationsfeld in die negative x-Richtung betrachtet. Die Massedichte des Teilchens und des Mediums seien ρ und ρ_0, mit $\rho > \rho_0$. Berechnen Sie die Auftriebskraft, die resultierende Schwerkraft F_G, sowie die stabile Endgeschwindigkeit v_G des Teilchens einschließlich des Vorzeichens. (6 Punkte)

c) Das Teilchen trage außerdem eine elektrische Ladung $q > 0$. Es wird ein konstantes elektrisches Feld E in die positive x-Richtung angelegt, die eine der Schwerkraft F_G entgegengerichtete Kraft F_E mit $|F_E| > |F_G|$ bewirkt. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit v_E für diesen Fall. (6 Punkte)

d) In einem Experiment werden die Geschwindigkeiten v_G und v_E gemessen, um die Ladung des Teilchens zu bestimmen. Drücken Sie die Ladung q des Teilchens unter Elimination von α durch die Geschwindigkeiten und Parameter des Experiments aus, also $q = q(v_G, v_E, \rho, \rho_0, E)$. Welche Besonderheit erwartet man für die im Experiment beobachteten Werte von q? (9 Punkte)

Aufgabe 2: Rotierende Stange mit zwei Massen

Zwei Massenpunkte mit der gleichen Masse m können reibungsfrei auf einer masselosen Stange gleiten. Die erste Masse ist mit einer Feder mit der Federkonstante k und Ruhelänge a an den Punkt $r = 0$ auf der Stange gebunden, die zweite Masse mit einer gleichartigen Feder an die erste Masse und mit einer dritten gleichartigen Feder an den Punkt $r = 3a$ auf der Stange, siehe Figur. Es werden nur kleine Auslenkungen betrachtet, so dass die Massen weder miteinander noch mit den Punkten $r = 0$ und $r = 3a$ kollidieren können. Die Stange kann um den Punkt P bei $r = 0$ frei rotieren. Der Winkel zwischen Stange und der x-Achse sei ϕ. Die Positionen der Massen entlang der Stange seien mit r_1 und r_2 bezeichnet ($0 < r_1 < r_2 < 3a$). Die Schwerkraft, welche in negativer z-Richtung wirkt, spielt in dieser Aufgabe keine Rolle.

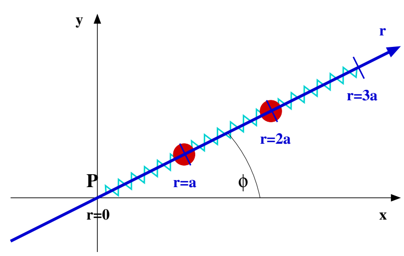

Abbildung 1: Die Anordnung in Ruhelage, d.h. $r_1 = a$ und $r_2 = 2a$.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\phi}, r_1, r_2, \phi)$ auf, und begründen Sie insbesondere die Form der potentiellen Energie V.

Zur Kontrolle:
$V(r_1, r_2) = \frac{k}{2}(r_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(r_2 - r_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(r_2 - 2a)^2$ (4 Punkte)

b) Wie lauten die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen? (6 Punkte)

c) Ist eine der Koordinaten zyklisch? Welches ist die zugehörige Erhaltungsgröße? Gibt es weitere Erhaltungsgrößen? (4 Punkte)

d) Eliminieren Sie die zyklische Koordinate in den Bewegungsgleichungen unter Verwendung der zugehörigen Erhaltungsgröße. (5 Punkte)

e) Ersetzen Sie r_1 und r_2 durch die neuen Koordinaten

$$S(t) = r_1(t) + r_2(t)$$
$$s(t) = r_2(t) - r_1(t)$$

und leiten Sie die Gleichungen für $\ddot{S}$ und $\ddot{s}$ her. Sind diese Gleichungen separiert oder gekoppelt? Sind sie linear oder nicht-linear? (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Wellenreflektion an einem bewegten Spiegel

Eine ebene elektromagnetische Welle bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum entlang des Wellenvektors $\vec{k}_I = k_I \vec{e}_x$ in positive x-Richtung mit der Frequenz ω und der Amplitude E_0:

$$\vec{E}_I = E_0 \cos(k_I x - \omega_I t)\vec{e}_z\,.$$

Die Welle trifft auf einen mit 45 Grad zur x-Achse geneigten Spiegel. Im Vakuum gilt die Dispersionsrelation

$$\omega_I = ck_I\,.$$

Die schrägliegende und ebene Oberfläche des Spiegels wird mit den rellen Parametern χ und μ wie folgt dargestellt:

$$\vec{x} = \chi(1,1,0) + \mu(0,0,1)\,.$$

Betrachten Sie den Spiegel als idealen Leiter, d.h. die Elektronen im Spiegel bewegen sich ohne Reibung, und ihre Trägheit ist vernachlässigbar. Die an der Oberfläche des Spiegels reflektierte Welle wird beschrieben durch

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{0R} \cos(k_{Rx}x + k_{Ry}y - \omega_R t).$$

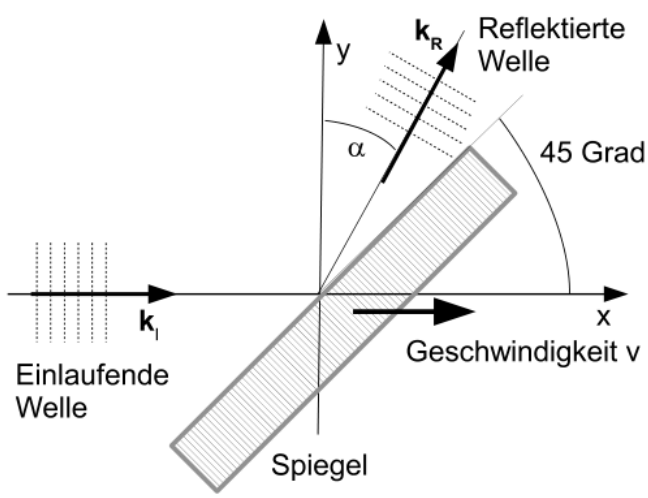

Abbildung 2: Skizze der verwendeten Geometrie (Spiegelquerschnitt grau schraffiert)

a) Warum gibt es keine durch den Spiegel transmittierte Welle? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

b) Drücken Sie unter Verwendung der Randbedingungen für das elektrische Feld die an der Spiegeloberfläche reflektierte Welle durch die einlaufende Welle aus. Wie groß ist der Betrag und die Richtung der Amplitude $\vec{E}_R$ der reflektierten Welle als Funktion der einlaufenden Welle? Welche Relation zwischen der Frequenz ω_R für die reflektierte Welle und ω_I für die einlaufende Welle folgt mit der Randbedingung für das elektrische Feld? Begründen Sie, dass diese Relation zwischen den Frequenzen gelten muss. (7 Punkte)

c) Welche Beziehung gilt zwischen den Wellenvektoren $\vec{k}_I$ und $\vec{k}_R$ aufgrund der Randbedingung für das elektrische Feld? Begründen Sie wiederum, dass diese Beziehung gelten muss.
(3 Punkte)

d) Berechnen Sie $\tan(\alpha) = k_{Rx}/k_{Ry}$ für den Winkel α zwischen dem Wellenvektor der reflektierten Welle und der y-Achse. (6 Punkte)

e) Es wird nun angenommen, dass sich der Spiegel mit einer konstanten Geschwindigkeit v in positive x-Richtung bewegt, d.h. die Spiegeloberfläche kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\vec{x} = \chi(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) + (vt, 0, 0)\,.$$

Wie groß ist im Fall des bewegten Spiegels die Amplitude $\vec{E}_{0R}$ der reflektierten Welle und wie groß ist $\tan(\alpha)$? (6 Punkte)

Aufgabe 2: Bezugssysteme

Ein Elektron mit der Ladung $q = -e < 0$ soll sich vor einem langen geraden Draht befinden. Der Draht sei zylinderförmig mit einer Querschnittsfläche A und das Elektron befinde sich im Abstand d zur Achse des Zylinders.

a) In dem Draht fließt ein Strom I. Zeigen Sie mithilfe der Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ am Ort des Elektrons den Betrag

$$B = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{d}$$

hat. (4 Punkte)

b) Nun soll der Draht mit der konstanten Ladungsdichte $\rho > 0$ geladen sein. Zeigen Sie mithilfe der Maxwellgleichung $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ am Ort des Elektrons den Betrag

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho A}{d} \tag{1}$$

hat. (5 Punkte)

c) Im Folgenden betrachten wir zwei verschiedene Inertialsysteme. Im Bezugssystem S des Labors soll sich das Elektron parallel zum Draht mit der Geschwindigkeit v bewegen. Der Strom I im Draht wird durch die Bewegung der Elektronen mit der Ladungsdichte ρ_- verursacht, wobei die positiv geladenen Atomrümpfe mit der Ladungsdichte ρ_+ in Ruhe bleiben. Der Draht ist nicht geladen, $\rho = \rho_- + \rho_+ = 0$. Die Elektronen im Draht sollen sich mit derselben Geschwindigkeit v bewegen wie das Elektron außerhalb des Drahtes, es gilt also $j = \rho_- v$. Zeigen Sie, dass die Lorentzkraft auf das Elektron den folgenden Betrag hat:

$$F_\mathrm{S} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{q\rho_- A v^2}{d}$$

(8 Punkte)

d) Im Bezugssystem S' des Elektrons erzeugen die positiven Ladungen im Draht einen Strom. Allerdings ruht das Elektron und erfährt deshalb keine Kraft durch diesen Strom. Dennoch bewegt es sich durch eine Kraft $F_{\mathrm{S'}}$, die nur durch eine Ladungsdichte $\rho' > 0$ im Draht zustande kommen kann. Berechnen Sie diese Ladungsdichte unter der Annahme, dass auf das Elektron in beiden Bezugssystemen dieselbe Kraft wirkt, $F_\mathrm{S} = F_{\mathrm{S'}}$.

Zur Kontrolle:

$$\rho' = |\rho_-|\frac{v^2}{c^2}$$

(8 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Clausius-Clapeyron-Gleichung aus einem Kreisprozess

Wir betrachten eine zyklische Wärmekraftmaschine zwischen zwei Reservoirs mit den Temperaturen $T_1 > T_2$, die sich den Phasenübergang ihres Arbeitsmediums vom flüssigen in den gasförmigen Zustand und zurück zunutze macht. Der Zyklus ist in Abbildung 3 skizziert. In den Prozessen $1 \to 2$ und $3 \to 4$ wird isobar und isotherm im Kontakt mit dem jeweiligen Reservoir Flüssigkeit in Gas bzw. Gas in Flüssigkeit umgewandelt. Die Punkte 1 und 3 liegen auf dem Rand des Koexistenzbereiches. Die Prozesse $2 \to 3$ und $4 \to 1$ verlaufen adiabatisch. Wir bezeichnen die in den Teilprozessen vom Arbeitsmedium geleisteten Arbeiten mit $W_{i\to j}$, die vom Arbeitsmedium aufgenommenen Wärmemengen mit $Q_{i\to j}$ für $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$.

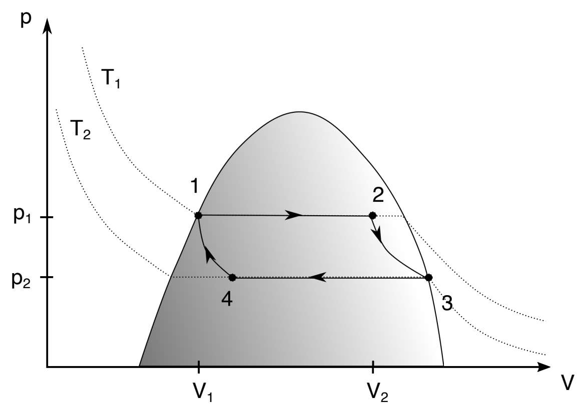

Abbildung 3: Der Kreisprozess aus der Aufgabe. Gestrichelte Linien sind Isothermen, der schraffierte Bereich ist der Koexistenzbereich für Flüssigkeit und Dampf.

a) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad der Maschine als Funktion der Arbeiten $W_{i\to j}$ und der Wärmemengen $Q_{i\to j}$. (2 Punkte)

b) Wenn die Temperaturen T_1 und T_2 nahe beieinander liegen, kann man den Kreisprozess im pV-Diagram näherungsweise durch ein Parallelogramm beschreiben. Geben Sie in dieser Näherung eine Formel für den Wirkungsgrad als Funktion von p_1, p_2, V_1, V_2 und $Q_{1\to 2}$ an. (3 Punkte)

c) Wenn alle Prozessschritte sehr langsam durchgeführt werden, ist der Wirkungsgrad dieser Maschine der eines Carnot-Prozesses. Erklären Sie, warum das so ist. (2 Punkte)

d) Benutzen Sie die Resultate aus b) und c) und den Grenzübergang $(T_2, p_2) \longrightarrow (T_1, p_1)$ um die Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{1\to 2}}{T(V_2 - V_1)} \tag{1}$$

für die Koexistenzkurve herzuleiten. (8 Punkte)

e) Wir beschreiben die Gasphase des Mediums nun als ideales Gas mit Volumen V_g und vernachlässigen das Volumen der flüssigen Phase, $V_2 - V_1 \approx V_g$. Es wird angenommen, dass

$Q_{1\to 2} = N(\alpha + \beta T)$ mit der Teilchenzahl N und Konstanten α, β. Dann folgt, dass $p(T)$ von der Form

$$p(T) = p_0 f(T, T_0) \left(\frac{T_0}{T}\right)^c \tag{2}$$

ist, wobei (T_0, p_0) einen Punkt auf der Koexistenzkurve bezeichnet. Bestimmen Sie die Funktion $f(T, T_0)$ und die Konstante c. (10 Punkte)

Aufgabe 2: **Das Berthelot-Modell für reale Gase**

Das Berthelot-Gas ist ein Modell für ein reales Gas, das durch die folgende Zustandgleichung beschrieben wird:

$$p(V,T) = \frac{Nk_BT}{V-Nb} - \frac{N^2 a}{TV^2}\,. \tag{1}$$

a) Drücken Sie für die weitere Rechnung den Druck durch das Volumen pro Teilchen $v = V/N$ aus. In welchem Temperaturbereich besitzen die Isothermen $p(v)$ zwei Extrema $v_{1,2}$? Berechnen Sie diese und die kritischen Werte v_c und T_c. Betrachten Sie in der weiteren Rechnung den Fall $b \ll v$, d. h. vernachlässigen Sie b^2 gebenüber bv. Skizzieren Sie für das Berthelot-Gas den Kurvenverlauf von $p(v)$ für drei Temperaturen $T > T_c$, $T = T_c$ und $T < T_c$. (9 Punkte)

b) Die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \tag{2}$$

beschreibt die Volumenänderungen eines Systems als Reaktion auf Druckänderungen. Welche Bedeutung besitzen unterschiedliche Vorzeichen von κ_T für das jeweilige System? (2 Punkte)

c) Welche Vorzeichen besitzt κ_T für das Berthelot-Gas in unterschiedlichen Bereichen von v im Fall $T > T_c$ und im Fall $T < T_c$? Beschreibt das Berthelot-Modell koexistierende Aggregatzustände? Wenn ja, für welche Parameter treten diese auf? In welchen Größen unterscheiden sie sich? Nennen Sie ein Beispiel für zwei mögliche Aggregatzustände. (9 Punkte)

d) Welches Vorzeichen besitzt der isobare, thermische Ausdehnungskoeffizient

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{3}$$

in den Fällen $T > T_c$ und $T < T_c$? In welchem Parameterbereich stimmen die Vorzeichen von α und κ_T überein? (5 Punkte)

Hinweis Kettenregel:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -1\,. \tag{4}$$

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Gaußsches Wellenpaket

Betrachten Sie für ein Quantenteilchen der Masse m in einer Raumdimension die zeitabhängige Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = N(t)^{-1} \exp\Big(-\frac{x^2}{2a + 2i\hbar t/m}\Big).$$

Hier bezeichnet x die Ortskoordinate, t die Zeit, und $a > 0$ eine reelle Konstante. Die Normierungskonstante ist $N(t) = (\pi/a)^{1/4}\sqrt{a + i\hbar t/m}$, so dass $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$.

a) Welche physikalischen Einheiten muss a haben? (Begründung!) Welche Symmetrieeigenschaften besitzt die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ unter Rauminversion $x \to -x$? Folgern Sie daraus die Resultate für die beiden Erwartungswerte $\langle x\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$, wobei $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ der Impulsoperator ist. (5 Punkte)

b) Skizzieren Sie zur Anfangszeit $t = 0$ die gegebene Wellenfunktion $\Psi(x,0)$ für zwei unterschiedliche Werte von a. Berechnen Sie für $t = 0$ die Erwartungswerte $\langle x^2\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie jeweils explizit die beiden Ausdrücke $i\hbar\partial\Psi(x,t)/\partial t$ und $\hat{p}^2\Psi(x,t)/(2m)$. Stimmen beide Resultate überein oder nicht? Welchen physikalischen Prozess beschreibt damit die Zeitentwicklung? Was folgt für das zeitliche Verhalten von $\langle\hat{p}^2\rangle$? (10 Punkte)

Aufgabe 2: Ein System mit drei Zuständen

Wir betrachten ein System mit drei Zuständen

$$|\psi_A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi_C\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

das durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} b & -b & 0 \\ -b & b & -2b \\ 0 & -2b & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

beschrieben wird. Sie können z.B. an ein dreiatomiges lineares Molekül denken, und an ein Elektron, das an einem der Atome lokalisiert ist.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Hamilton-Operators (2) zu den folgenden, auf Eins normierten Eigenvektoren

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(6 Punkte)

b) Bestimmen Sie für den Eigenvektor $|\psi_1\rangle$ die Wahrscheinlichkeiten, dass der Zustand $|\psi_A\rangle$, $|\psi_B\rangle$ oder $|\psi_C\rangle$ vorliegt. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie für alle drei Zustände $|\psi_A\rangle$,$|\psi_B\rangle$, $|\psi_C\rangle$ jeweils den Erwartungswert des Hamilton-Operators und die Varianz
$\mathrm{var}_j(\hat{H}) = \langle\psi_j|\hat{H}^2|\psi_j\rangle - \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_j\rangle^2$ mit $j = A, B, C$. (6 Punkte)

d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|\psi_B\rangle$. Geben Sie die explizite Form des Systemzustands für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ an. (7 Punkte)

e) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System sich bei einer Messung zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $|\psi_A\rangle$, $|\psi_B\rangle$ oder $|\psi_C\rangle$ befindet. Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf mit Worten. (3 Punkte)