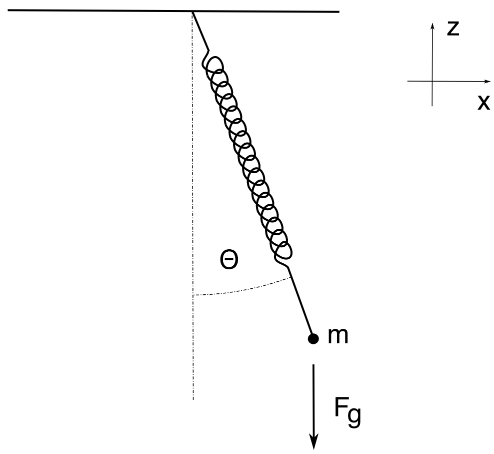
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Ebenes Federpendel

Betrachtet wird eine Masse m, die an einer Feder aufgehängt ist und unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen kann, siehe Abbildung. Die Länge der Feder im ungedehnten Zustand wird mit ℓ_0 bezeichnet, die Federkonstante mit k. Betrachtet wird im Folgenden nur die Bewegung des Pendels in der (x, z)-Ebene. Das Gewicht der Feder, die Ausdehnung der Masse und die Reibung sind zu vernachlässigen.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion für das Pendel. Verwenden Sie als Variablen den Winkel Θ und den Abstand r der Masse vom Aufhängepunkt. (5 Punkte)

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems ab. (6 Punkte)
Kontrolle:

$$\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2 - a\cos\Theta + b(r - \ell_0) = 0, \qquad \ddot{\Theta} + c\frac{\dot{r}}{r}\dot{\Theta} + \frac{a}{r}\sin\Theta = 0.$$

mit Konstanten a, b, c.

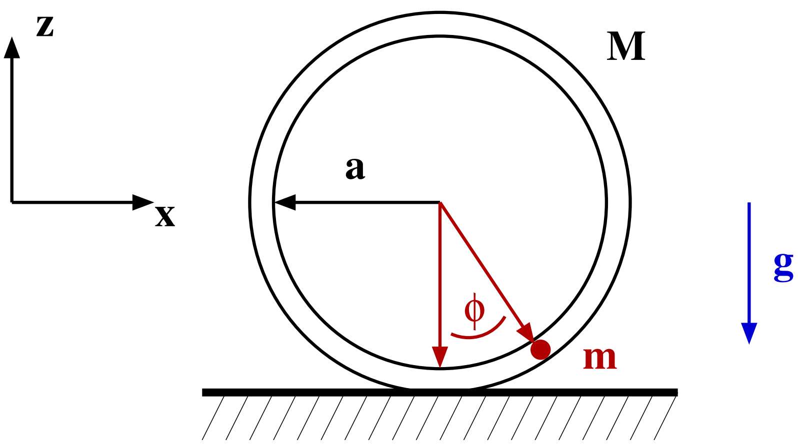
c) Geben Sie eine Symmetrie des Systems und die dazugehörige Erhaltungsgröße an. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Länge ℓ des Pendels, wenn es in der stabilen Ruhelage hängt. (5 Punkte)

e) Betrachten Sie kleine Auslenkungen des Pendels um $\Theta = 0$ und $r = \ell$ und nähern Sie die Bewegungsgleichungen in führender Ordnung. Geben Sie die allgemeine Lösung der genäherten Gleichungen an. (5 Punkte)

Aufgabe 2: **Oszillierender Massenpunkt in massivem Block**

Wir betrachten eine Punktmasse m, die reibungsfrei in einer vertikalen, kreisförmigen Führungsschiene mit dem Radius a in einem Block der Masse M im vertikalen Schwerefeld oszilliert, siehe Abbildung. Die Breite der Führungsschiene entspricht dem Radius der Punktmasse und wird somit vernachlässigt, d.h. wir betrachten den Grenzfall, dass die beiden Kreise in der Abbildung den gleichen Radius a haben. Der Block kann reibungsfrei auf der horizontalen Unterlage hin und her gleiten. Der Mittelpunkt des Blocks befinde sich bei $z = 0$.



a) Leiten Sie die Lagrangefunktion des Systems unter Verwendung von x und ϕ als unabhängigen Koordinaten her. (5 Punkte)
Zur Kontrolle:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2a\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi\right) + mga\cos\phi$$

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems her. (8 Punkte)

c) Folgt aus den Euler-Lagrange-Gleichungen eine Erhaltungsgröße außer der Energie und wenn ja, welche ist dies und welche Bedeutung hat sie? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie für kleine Oszillationen ϕ die zeitliche Funktion $\phi(t)$ für allgemeine Anfangsbedingungen. (8 Punkte)

e) Wie sind die freien Parameter der Lösung zu wählen, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ der Winkel ϕ maximal sein soll $\phi(0) = \phi_{\max}$? (2 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Wellenausbreitung in Ohmschem Leiter

Betrachtet wird ein homogenes und isotropes leitendes und ungeladenes Material mit Leitfähigkeit σ, Permittivität ϵ und magnetischer Permeabilität μ. Elektrische Felder verursachen Ströme in diesem Material. Als Ansatz für die Stromdichte $\vec{j}$ und die Ladungsdichte ρ werden im Folgenden

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \sigma \vec{E}(t, \vec{x}), \qquad \rho(t, \vec{x}) = 0 \tag{1}$$

gewählt.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen und (1) die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \tag{2}$$

für das elektrische Feld im Leiter her. (6 Punkte)
Hinweis: Für beliebige Vektorfelder $\vec{V}$ gilt $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}$.

b) Setzen Sie zur Lösung von (2) eine (zunächst komplexwertige) ebene Welle

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{3}$$

mit Frequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$ an und leiten Sie die Dispersionsrelation

$$-\vec{k}^2 + \mathrm{i}\mu\sigma\omega + \mu\epsilon\omega^2 = 0 \tag{4}$$

her. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Dispersionsrelation für reelles $\vec{k}$ und ω nur eine triviale Lösung hat. Machen Sie dann den Ansatz

$$\vec{k} = \vec{\alpha} + \mathrm{i}\vec{\beta} \tag{5}$$

mit reellen Vektoren $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ gleicher Richtung und bestimmen Sie $\alpha := |\vec{\alpha}|$ als Funktion von ω, ϵ und μ und $\beta := |\vec{\beta}|$ als Funktion von α, ω, ϵ und μ. (7 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass im Fall $\sigma \ll \epsilon\omega$ ("schlechter Leiter") gilt:

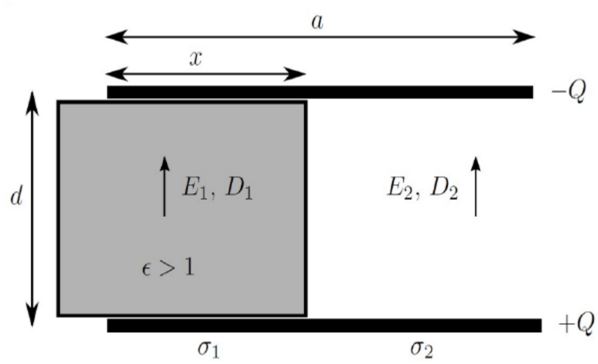
$$\alpha \approx \omega\sqrt{\epsilon\mu}, \qquad \beta \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \tag{6}$$

(2 Punkte)

e) Eine sich in z-Richtung ausbreitende ebene Welle trifft aus dem Vakuum kommend auf das leitende Material, welches den Halbraum $z > 0$ ausfüllt, und erzeugt in diesem Material ebenfalls eine ebene, in z-Richtung propagierende Welle. Bestimmen Sie eine reelle Lösung für das elektrische Feld dieser Welle im leitenden Material. Geben Sie in der Näherung aus d) die Wellenlänge der Welle an, sowie eine Größe, welche die Eindringtiefe der Welle in das leitende Material charakterisiert. (5 Punkte)

Aufgabe 2: **Dielektrikum im Plattenkondensator**

In einen rechteckigen Plattenkondensator (Plattenabstand d und Fläche $a \cdot b$) ist um eine Strecke x (mit $0 < x < a$) ein Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstante $\epsilon > 1$ eingeschoben (siehe Abbildung). Der restliche Raum zwischen den (beliebig dünn angenommenen) Platten ist leer. Die Ladungen auf der unteren und oberen Platte sind Q und $-Q$. Alle Felder zwischen den Platten können als (stückweise) homogen angenommen werden.



a) Welche Beziehung gilt zwischen den elektrischen Feldern E_1 und E_2? Folgern Sie daraus eine Beziehung zwischen den dielektrischen Verschiebungen D_1 und D_2. (4 Punkte)

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen D_1, D_2 und den homogenen Flächenladungsdichten σ_1, σ_2 auf der unteren Platte? (3 Punkte)

c) Berechnen Sie in Abhängigkeit von Q und x die elektrischen Felder E_1, E_2 und die dielektrischen Verschiebungen D_1, D_2 im Raum zwischen den Platten. (8 Punkte)

$$\textit{Zum Vergleich}: \qquad D_2 = \frac{Q}{b[a + (\epsilon - 1)x]}$$

d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von Q und x die elektrostatische Feldenergie $W(x) = \frac{1}{2} \int dV \vec{E} \cdot \vec{D}$. (6 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Kraft F, mit der das Dielektrikum in den Kondensator hineingezogen wird. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Gummielastizität

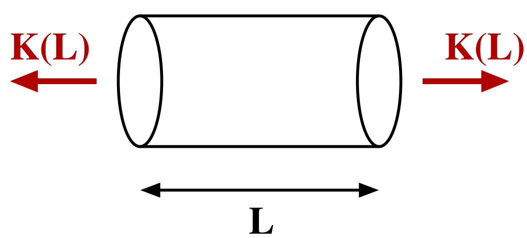
Wenn man einen Gummizylinder entlang seiner Symmetrieachse streckt, lässt sich die Spannungskraft vom Betrag $K(L)$ als Funktion der Zylinderlänge L in guter Näherung wie folgt parameterisieren, siehe Abbildung.

$$K(L) = \kappa T \left(\frac{L}{L_0(T)} - \frac{[L_0(T)]^2}{L^2} \right) \tag{1}$$

wobei κ eine positive Konstante, T die Temperatur und L_0 die (temperaturabhängige) Länge ist, bei der die Spannungskraft Null ist. Wir betrachten nur den Fall $L > L_0$. Das Vorzeichen ist so gewählt, dass die am System geleistete Arbeit $dW = KdL$ ist.
Die Temperaturabhängigkeit von L_0 sei gegeben durch

$$\frac{dL_0(T)}{dT} = \alpha L_0(T) \tag{2}$$

mit dem linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha > 0$. Für Gummi ist dies eine kleine Korrektur.



a) Der Zylinder wird isothermisch und reversibel deformiert. Wie hängt die freie Energie von der Länge L ab, wenn sie für $L = L_0$ den Wert $F(T, L_0)$ hat? (7 Punkte)

b) Wie ändert sich hierbei die Entropie, die für $L = L_0$ den Wert $S(T, L_0)$ habe, als Funktion von L? (7 Punkte)

Zur Kontrolle:

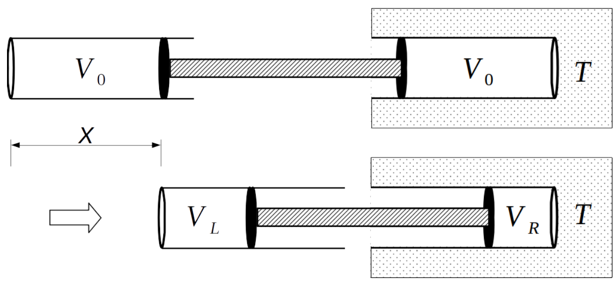
$$\begin{aligned} S = & -\kappa \left(\frac{L^2}{2L_0} + \frac{L_0^2}{L} - \frac{3}{2} L_0 \right) \\ & - \kappa T \, \alpha L_0 \left(-\frac{L^2}{2L_0^2} + \frac{2L_0}{L} - \frac{3}{2} \right) + S(T, L_0) \end{aligned} \tag{3}$$

c) Wieviel Wärmeenergie muss vom Zylinder zu- oder abgeführt werden, damit sich seine Temperatur nicht ändert, wenn er von der Länge L_0 auf $2L_0$ gestreckt wird? (2 Punkte)

d) Leiten Sie die relevante Maxwell-Relation für $(\partial S/\partial L)_T$ her. Berechnen sie die Ableitung $\partial T/\partial L$ für eine quasistatische, adiabatische Expansion. Schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung der Wärmekapazität C_L. (9 Punkte)

Aufgabe 2: **Kompression gekoppelter Kolben**

Zwei Kolben mit gleicher Querschnittsfläche A, die sich in zwei gegenüber liegenden Zylindern befinden, seien durch eine Stange verbunden. Der rechte Zylinder ist fest angebracht und in ein Wärmebad mit der Temperatur T eingebettet. Der linke Zylinder ist in Richtung der Stange verschiebbar und perfekt wärmeisoliert. In beiden Zylindern befinde sich ein ideales Gas mit dem Adiabatenexponent $\kappa = 2$. In der im oberen Teil der Abbildung gezeigten Anfangskonfiguration sei $V_L(0) = V_R(0) = V_0$, $T_L(0) = T_R(0) = T$ und $p_L(0) = p_R(0) = p_0$.



Der linke Zylinder werde nun langsam um die Distanz x nach rechts geschoben, wodurch die Gase auf beiden Seiten komprimiert werden. Das System ist dabei durch die Größen $V_L(x)$, $V_R(x)$, $p_L(x)$, $p_R(x)$, $T_L(x)$ und $T_R(x)$ charakterisiert.

a) Wie sind die genannten Größen aufgrund der Versuchsanordnung verknüpft? (4 Punkte)

b) Welche thermodynamischen Zustandsänderungen finden in den Teilsystemen statt? Geben Sie die entsprechenden Gleichungen an. (8 Punkte)

c) Berechnen Sie $V_L(x)$ und $T_L(x)$ für gegebenes A, T, V_0 als Funktion von x. (8 Punkte)
Zur Kontrolle: $V_L(x) = \frac{V_0}{2}\left(-1 + \sqrt{9 - \frac{4Ax}{V_0}}\right)$.

d) Benutzen Sie das Ergebnis von c), um für $x = \frac{5V_0}{4A}$ die an das Wärmebad abgeführte Entropie als Funktion der Temperatur zu berechnen. (5 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Messung an Quantenzuständen

Betrachten Sie ein teilweise entartetes Dreizustandssystem mit dem Hamiltonoperator H und einem zweiten kommutierenden Operator L. Eine mögliche Basis von normierten simultanen Eigenzuständen bilden $|E_1, 0\rangle$, $|E_2, 1\rangle$ und $|E_2, -1\rangle$ mit den Eigenwerten $E_1 < E_2$ von H und $\ell = 0, \pm 1$ von L. Betrachten Sie den Zustand

$$|\alpha\rangle = N(|E_1, 0\rangle + |E_2, 1\rangle - 2|E_2, -1\rangle)\,. \tag{1}$$

a) Untersuchen Sie zunächst die Zeitentwicklung des Zustandes $|\alpha\rangle$, wobei sich zur Zeit $t = 0$ das System im Zustand $|\alpha\rangle$ befindet. Wie lautet die Wellenfunktion $|\alpha(t)\rangle$ zu späteren Zeiten als Funktion der angegebenen Eigenzustände? (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, mit denen Sie die verschiedenen Eigenwerte von H und L messen können. (5 Punkte)

c) Was sind die Erwartungswerte für H und L und deren Varianzen im Zustand $|\alpha\rangle$? (6 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von H den Eigenwert E_1 zu messen und bei einer späteren Messung von L den Wert $\ell = -1$? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von H den Eigenwert E_2 zu messen und bei einer späteren Messung den Wert $\ell = 1$ für die Observable L? (7 Punkte)

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen im Zustand $|\alpha\rangle$, dieses im Zustand $|\beta\rangle = N_\beta(|E_1, 0\rangle - |E_2, 1\rangle)$ zu finden? (3 Punkte)

Aufgabe 2: **Zweidimensionaler harmonischer Oszillator**

Betrachtet wird ein zweidimensionaler harmonischer Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right). \tag{1}$$

Dabei sind x und y die den kartesischen Koordinaten entsprechenden Operatoren und p_x, p_y die zugehörigen Impulsoperatoren. Der Drehimpulsoperator ist durch

$$L = x\,p_y - y\,p_x \tag{2}$$

gegeben. Mithilfe der Definitionen

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,x + \frac{\mathrm{i}}{\alpha\hbar}\,p_x,\right) \qquad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,y + \frac{\mathrm{i}}{\alpha\hbar}\,p_y\right), \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{3}$$

lässt sich der Hamiltonoperator als

$$H = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1) \tag{4}$$

schreiben. Im Folgenden sollen Eigenzustände von H und L untersucht werden.

a) Berechnen Sie $[a_x, a_x^\dagger]$ und schließen Sie aus dem Ergebnis auf $[a_y, a_y^\dagger]$. Begründen Sie auch, warum $[a_x, a_y] = 0 = [a_x, a_y^\dagger]$ (4 Punkte)

b) Geben Sie die Energieniveaus des Systems sowie deren Entartungsgrad an. (5 Punkte)

c) Drücken Sie L durch $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger$ aus. (5 Punkte)
Kontrolle: $L = c(a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger)$ mit einer Konstanten c.

d) Zeigen Sie, dass $[L, H] = 0$. (6 Punkte)

e) Die Energieeigenräume können in Eigenräume von L_z zerlegt werden. Nennen Sie den Grund dafür. Berechnen Sie diese Zerlegung sowie die zugehörigen Eigenwerte von L_z für das erste angeregte Niveau. (5 Punkte)