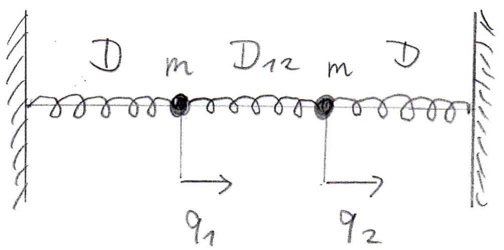
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Schwebung

Zwei gleiche Punktmassen m sollen in einer Raumdimension schwingen. Sie sind sowohl an je einer Wand mit der Federstärke D, als auch untereinander mit D_{12}, durch lineare Federn gekoppelt. In der Ruhelage der beiden Teilchen sollen die Federn entspannt sein, und die Auslenkungen aus dieser Ruhelage sollen durch die beiden Funktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ beschrieben werden, wie in der Skizze gezeigt.



a) Geben Sie die potenzielle Energie $V(q_1, q_2)$ des Systems an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die beiden Auslenkungen. (4 Punkte)

c) Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 der gekoppelten Schwingungen. (3 Punkte)

d) Beschreiben Sie kurz in Worten die beiden Eigenmoden der Schwingungen zu den beiden Frequenzen ω_1 und ω_2. (3 Punkte)

e) Geben Sie die Lösung für den Fall an, dass anfangs nur eine Masse ausgelenkt ist, $q_1(0) = A, q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. (3 Punkte)

f) Betrachten Sie nun den Fall schwacher Kopplung D_{12}, also $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$. Skizzieren Sie die Auslenkung $q_1(t)$ der ersten Masse. Wie lange dauert es etwa, bis die Energie der ersten Masse auf die zweite übergegangen ist? (6 Punkte)

Hinweis: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$, $\quad \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$.

g) Unter welcher Bedingung für die beiden Eigenfrequenzen ist die Lösung periodisch? (3 Punkte)

Aufgabe 2: Bewegung im magnetischen Monopolfeld

Ein Elektron der Masse m und Ladung $-e$ bewege sich im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = g\,\vec{r}/r^3$ eines am Ursprung fixierten (hypothetischen) magnetischen Monopols. Es wirkt die Lorentzkraft.

a) Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für das Elektron auf und weisen Sie nach, dass die kinetische Energie während der Bewegung konstant ist. Im Folgenden wird ihr Wert mit $T_{\mathrm{kin}} = mv_0^2/2$ bezeichnet. (5 Punkte)

b) Weisen Sie zuerst die Beziehung $r\dot{r} = \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$ nach und zeigen Sie dann, dass die Kombination $\vec{J} = \vec{L} + eg\,\vec{r}/r$, mit $\vec{L}$ dem Bahndrehimpuls, eine Konstante der Bewegung ist. Betrachten Sie das Skalarprodukt $\vec{J}\cdot\vec{r}$ und beschreiben Sie die Fläche, auf der die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ verläuft. (8 Punkte)

Hinweis: Für das doppelte Kreuzprodukt von drei Vektoren gilt: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)$.

c) Berechnen Sie die zweite Zeitableitung des Abstandsquadrats $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$ für das vorliegende Bewegungsproblem. Bestimmen Sie daraus die Lösung für den zeitabhängigen Abstand $r(t)$ mit der Bedingung, dass zur Zeit $t = 0$ der minimale Abstand r_0 erreicht wird. (6 Punkte)

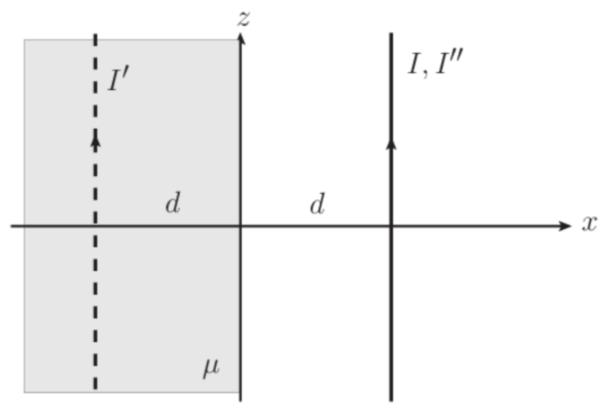
d) Berechnen Sie in Kugelkoordinaten (r, θ, φ), wobei im vorliegenden Fall der Polarwinkel θ konstant ist, die kinetische Energie T_{kin} und den Betrag des Bahndrehimpulses $L = |\vec{L}\,|$. Folgern Sie durch Kombination beider Ergebnisse, dass die Beziehung $L = \sqrt{J^2 - e^2g^2} = mr_0v_0$ gilt. (6 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Strom vor dia- oder paramagnetischem Halbraum

Gegeben sei ein (unendlich langer) gerader linienförmiger Strom der Stärke I in z-Richtung, der im Abstand d parallel zu einem magnetischen Medium mit Permeabilitätskonstante μ verläuft, das den linken Halbraum $x < 0$ ausfüllt (siehe untenstehende Figur).



a) Bestimmen Sie mithilfe des Ampère'schen Durchflutungsgesetzes das vom Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{B}_I(\vec{r})$ in Abwesenheit des magnetischen Mediums in kartesischen Koordinaten. (5 Punkte)

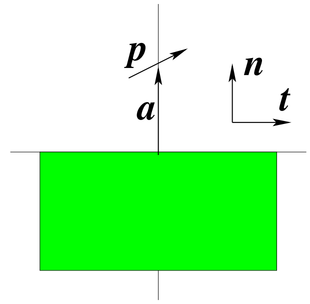
b) Die physikalische Situation mit magnetischem Medium kann auf zwei Ersatzprobleme abgebildet werden. Für den rechten Halbraum $x > 0$ wird angenommen, das neben dem Strom I bei $x = d$ ein paralleler Bildstrom I' bei $x = -d$ vorliegt. Für den linken Halbraum $x < 0$ nimmt man an, dass zusätzlich zum Strom I bei $x = d$ ein Bildstrom auftritt, die sich beide zu einem effektiven Strom I'' bei $x = d$ zusammenfassen lassen.
Geben Sie in kartesischen Koordinaten die Magnetfelder $\vec{B}_>(\vec{r})$ und $\vec{B}_<(\vec{r})$ in den beiden Halbräumen $x > 0$ und $x < 0$ an. (7 Punkte)

c) Gemäß der Anschlussbedingungen sind die Normalkomponente von $\vec{B}$ und die Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ stetig an der Grenzebene $x = 0$. Bestimmen Sie damit die Ströme I' und I''.
Zum Vergleich: $(\mu + 1)I' = (\mu - 1)I, \quad (\mu + 1)I'' = 2\mu I.$ (7 Punkte)

d) Berechnen Sie die Kraft pro Länge $\vec{F}/l$, welche das magnetische Medium auf den Stromleiter ausübt. Beachten Sie hierzu, dass im rechten Halbraum $x > 0$ die Wirkung des magnetischen Mediums durch den Bildstrom I' repräsentiert wird. Untersuchen Sie die Richtung der Kraft $\vec{F}$, wenn das Medium paramagnetisch ($\mu > 1$) oder diamagnetisch ($\mu < 1$) ist. (6 Punkte)
Hinweis: Auf ein Stromelement $I\mathrm{d}\vec{l}$ am Ort $\vec{r}$ wirkt die magnetische Kraft $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$.

Aufgabe 2: Elektrischer Dipol vor metallischer Ebene

Ein elektrischer Punkt-Dipol $\vec{p}$ mit beliebiger Orientierung befinde sich im Abstand a vor einer ebenen Metalloberfläche. Die nebenstehende Skizze zeigt die Ebene, in welcher der Dipol liegt und welche senkrecht auf der Oberfläche steht.



Es soll das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ und das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit der Methode der Spiegelladungen bestimmt werden. Dazu ist es praktisch, (1) koordinatenfrei vorzugehen und (2) den Dipol in normale (senkrecht zur Oberfläche) und transversale (parallel zur Oberfläche) Anteile zu zerlegen,

$$\vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_t \,. \tag{1}$$

Das elektrische Potential eines am Ursprung gelegenen Punkt-Dipols in Abwesenheit des Metalls ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \,. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie Lage $\vec{a}\,'$ und Orientierung des Bilddipols $\vec{p}\,' = \vec{p}_n{}' + \vec{p}_t{}'$. Hier ist es praktisch, den Dipol als aus zwei nahe beieinander liegenden Ladungen gebildet zu betrachten. (5 Punkte)

b) Geben Sie einen Ausdruck für $\phi(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des Metalls an, und zeigen Sie, dass $\phi(\vec{r})$ an der Oberfläche verschwindet. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ eines am Ursprung liegenden Punkt-Dipols $\vec{p}$ in Abwesenheit des Metalls durch

$$4\pi\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = 3\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \tag{3}$$

gegeben ist. (5 Punkte)

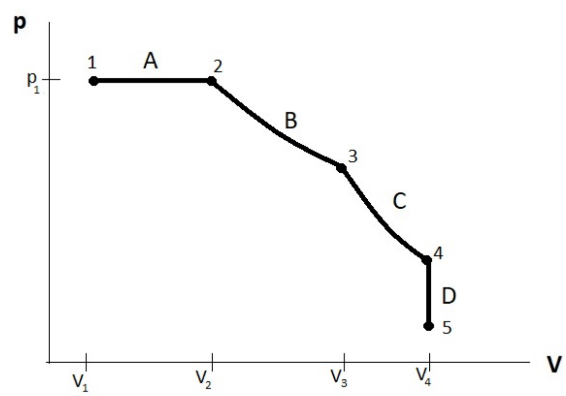
d) Geben Sie einen Ausdruck für $\vec{E}(\vec{r})$ für das Bildladungsproblem innerhalb und außerhalb des Metalls an, und spezialisieren Sie dann das Ergebnis für Orte auf der Metalloberfläche. (10 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Gesamtentropie

Ein einatomiges ideales Gas durchläuft vier Prozesse dicht am thermischen Gleichgewicht, wie in der Skizze gezeigt: A: Isobare Heizung, B: Isotherme Expansion, C: Adiabatische Expansion, D: Isochores Abkühlen. Die Heizung geschieht durch ein großes Reservoir mit der Temperatur T_2, und die Kühlung durch ein großes Reservoir mit der Temperatur T_5.



Die in der Skizze bezeichneten Größen p_1, V_1, V_2, V_3, V_4 sowie T_5 seien bekannt, und alle im Folgenden zu berechnenden Größen sollen durch diese gegebenen Parameter ausgedrückt werden.

Das ideale Gas genügt den bekannten Zustandsgleichungen

$$U = \frac{3}{2} N k_B T, \quad pV = N k_B T, \quad S = N k_B [\frac{3}{2} \ln T + \ln V] + konst\,.$$

a) Berechnen Sie die Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_4. (5 Punkte)

b) Bei welchen Prozessen wird eine Wärmemenge Q zu- bzw. abgeführt? Berechnen Sie die Wärmemenge Q für die vier Prozesse. (7 Punkte)

c) Berechnen Sie die Entropieänderungen des Gases für jeden der vier Prozesse. (5 Punkte)

d) Bei welchen der vier Prozesse gilt: Die Gesamtentropie von Gas plus Reservoir nimmt zu, nimmt ab oder bleibt konstant? Begründen Sie das Ergebnis in Worten. (8 Punkte)

Aufgabe 2: **Spezifische Wärme in der Virialentwicklung**

In der Virialentwicklung wird die Zustandsgleichung in Potenzen der Teilchendichte entwickelt. In dieser Aufgabe soll nur die führende Korrektur berücksichigt werden, die durch den temperaturabhängigen zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ charakterisiert ist. Die Zustandsgleichung lautet dann

$$p = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{B_2(T)}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right] , \tag{1}$$

mit dem Druck p, dem Molvolumen v und der universellen Gaskonstanten R.

a) Die Zustandsgleichung des van-der-Waals-Gases ist durch

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

mit positiven Konstanten a und b gegeben. Bestimmen Sie den in (1) auftretenden zugehörigen zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie unter Verwendung einer geeigneten Maxwellrelation den allgemeinen Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v ,$$

mit dessen Hilfe sich die Ableitung der molaren Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_V nach dem Molvolumen aus der Zustandsgleichung erhalten lässt. (7 Punkte)

c) Analog zur Entwicklung (1) lässt sich die molare Wärmekapazität

$$c_V = R\left(c_1 + \frac{c_2(T)}{v} + \mathcal{O}(v^{-2})\right)$$

in Potenzen des inversen Molvolumens entwickeln. Dabei ist c_1 eine temperaturunabhängige Konstante, die die molare Wärmekapazität im unendlich verdünnten Grenzfall charakterisiert. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen $c_2(T)$ und der in (1) auftretenden Funktion $B_2(T)$ her. Was ergibt sich für $c_2(T)$ im Spezialfall des van-der-Waals-Gases? (13 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Potentialtopf mit nichttrivialem Boden

In dieser Aufgabe soll die Wellenfunktionen eines Teilchens in einer Dimension in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden betrachtet werden. Zunächst ist der Boden des Potentialtopfes eben, dann wird seine Form geändert.

a) Ein Teilchen (Masse: m) bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss eines Kastenpotentials

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a \leq x \leq a \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}, \tag{1}$$

wobei $a > 0$. Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für den Bereich $|x| < a$ auf und bestimmen Sie die möglichen Energieniveaus $E_n, n = 1, 2, \ldots$ und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen ψ_n unter der Randbedingung, dass $\psi_n(\pm a) = 0$. (10 Punkte)

Kontrolle: $E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/(8ma^2)$.

Es wird nun zusätzlich angenommen, dass das Teilchen die Ladung q trägt, und ein konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E}$ in die negative x-Richtung wirkt. Das Potential ist jetzt also

$$V(x) = V_0(x) + V_{\mathcal{E}}(x), \qquad V_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} q\mathcal{E}x & \text{für } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2}$$

b) Die Änderung der Energieniveaus durch den neuen Potentialterm ist für ein schwaches elektrisches Feld durch $\Delta E_n \approx \langle \psi_n | V_{\mathcal{E}} | \psi_n \rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Energieniveaus in dieser Näherung nicht ändern. (4 Punkte)

c) Die Zustände ψ_n aus a) sind bezüglich des Potentials $V_{\mathcal{E}}$ nicht mehr stationär. Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im ungestörten Grundzustand ψ_1 aus a). Die Zeitentwicklung dieses Zustandes kann als $\psi(t) = U(t)\psi_1$ mit dem Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$ geschrieben werden. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t in den ersten angeregten Zustand ψ_2 des ungestörten Systems gewechselt zu sein, mit $p(t)$. Entwickeln sie $p(t)$ bis zur Ordnung t^2, indem Sie den Zeitentwicklungsoperator entsprechend entwickeln. Sie dürfen dabei das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} y \sin(y) \cos(y/2)\, \mathrm{d}y = 32/9$ verwenden.

(6 Punkte)

Betrachten Sie nun die folgende Störung des Potentialtopfes:

$$V(x) = V_0(x) + V_\lambda(x), \qquad V_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x^2 & \text{für } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{3}$$

d) Betrachten Sie wieder die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ aus c). Zeigen Sie, dass diese nun für alle Zeiten verschwindet. (5 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung des Operators $P : \psi(x) \longmapsto \psi(-x)$.

Aufgabe 2: Wasserstoffatom in einer Dimension

Für das eindimensionale quantenmechanische Coulombproblem, eingeschränkt auf den Bereich $x > 0$, lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\alpha \hbar c}{x}\,,$$

mit m der Elektronenmasse und $\alpha\hbar c$ der Stärke des anziehenden $1/x$-Potentials.

a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf. Welche Bedingung muss die Wellenfunktion $\psi(x)$ bei $x = 0$ erfüllen? (4 Punkte)

b) Es werden nun gebundene Zustände zu negativer Energie $E < 0$ untersucht. Zuerst werden die dimensionslose Variable $\xi = x\sqrt{-2mE}/\hbar$ und der dimensionslose Parameter $\eta = \alpha c\sqrt{2m/(-E)}$ eingeführt, so dass die resultierende Differentialgleichung die einfachere Form

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\eta}{\xi} - 1\right)\psi(\xi) = 0$$

hat. Erzeugen Sie mit dem Ansatz $\psi(\xi) = v(\xi)e^{-\xi}$ eine neue Differentialgleichung zweiter Ordnung für $v(\xi)$, welche dann mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes $v(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k$ gelöst werden soll. Leiten Sie die Rekursionsrelation für die Entwicklungskoeffizienten a_k her. (7 Punkte)

Zum Vergleich:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k - \eta}{k(k+1)}\,.$$

c) Aus Gründen der Normierbarkeit muss die Potenzreihe für $v(\xi)$ abbrechen. Folgern Sie aus der Abbruchbedingung, dass das Spektrum der Bindungsenergien E_n die Form

$$E_n = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}\,, \qquad n \in \{1, 2, 3, ...\}\,,$$

hat. Welchen Entartungsgrad g_n haben die einzelnen Energieeigenwerte E_n? (7 Punkte)

d) Bestimmen Sie unter Verwendung des Bohr'schen Radius $a_B = \hbar/(mc\alpha)$ die normierte Grundzustandswellenfunktion $\psi_1(x)$ und skizzieren Sie diese. Berechnen Sie damit den Erwartungswert des reziproken Abstands $\langle\psi_1|x^{-1}|\psi_1\rangle$. (7 Punkte)

Nützliches Integral:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}u\, u^n e^{-u} = n!$$