
Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

Kennzahl: 78235

Kennwort: urtica

Arbeitsplatz-Nr.: 58

**Frühjahr
2021**

64013

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Physik (verteilt studiert)**

Einzelprüfung: **Theoretische Physik**

Anzahl der gestellten Aufgaben: 8 Aufgaben, von denen 4 gemäß untenstehender
Auswahlregel zu bearbeiten sind

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 9

Zu den vier Themenschwerpunkten A (Mechanik), B (Elektrodynamik), C (Thermodynamik) und D (Quantenmechanik) ist jeweils entweder die Aufgabe 1 oder 2 zu wählen. Auf der Vorderseite des Kopfbogens sind im Feld „Gewähltes Thema: Nr.“ die Nummern der vier gewählten Aufgaben anzugeben (z. B. A2, B1, C1, D2)!

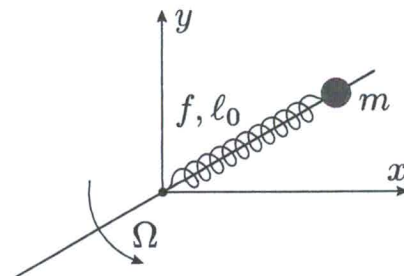
Bitte wenden!

Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Rotierende Feder

Eine punktförmige Masse m befinde sich auf einer Stange, entlang der sie sich reibungsfrei bewegen kann. Zusätzlich sei die Masse mit Hilfe einer Feder mit Federkonstante f und Ruhelänge ℓ_0 an den Koordinatenursprung gebunden. Die Stange rotiere in der horizontalen (x, y) -Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\Omega < \sqrt{f/m}$ um den Koordinatenursprung. Das Gravitationsfeld bleibe im Folgenden außer Betracht.



- a) Betrachten Sie zunächst eine frei in der (x, y) -Ebene bewegliche Punktmasse m . Bestimmen Sie die kinetische Energie dieser Masse in Polarkoordinaten, ausgehend vom Zusammenhang

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1)$$

zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (ρ, φ) . (4 Punkte)

- b) Geben Sie nun die Lagrangefunktion für die Masse in der im Vortext beschriebenen Situation an. Zeigen Sie, dass die Radialbewegung der Masse durch die Kopplung an den Ursprung mit Hilfe einer Feder mit einer effektiven Federkonstanten $\bar{f}(\Omega)$ und einer effektiven Ruhelänge $\bar{\ell}_0(\Omega)$ beschrieben werden kann. Geben Sie die Funktionen $\bar{f}(\Omega)$ und $\bar{\ell}_0(\Omega)$ an, und stellen Sie deren Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit Ω graphisch dar. (11 Punkte)
- c) Lösen Sie die radiale Bewegungsgleichung für die Masse mit den Anfangsbedingungen $\rho(0) = \rho_0 < 2\bar{\ell}_0$ und $\dot{\rho}(0) = 0$. (6 Punkte)
- d) Bestimmen Sie die diskreten Werte der Winkelgeschwindigkeit Ω der Stange, für die die Bahn der Masse in der (x, y) -Ebene geschlossen ist, so dass nach einem Umlauf die Anfangswerte von ρ und $\dot{\rho}$ wieder erreicht werden. Geben Sie in diesem Fall den Maximalwert für die Winkelgeschwindigkeit an. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Zwei geladene Teilchen in einem Magnetfeld

Zwei Punktteilchen mit gleicher Masse m und gleicher Ladung q bewegen sich in einem räumlich und zeitlich konstanten magnetischen Induktionsfeld \vec{B} . Im Folgenden soll die Bewegung dieser Ladungen untersucht werden. Betrachten Sie dazu kleine Geschwindigkeiten, die Coulombsche Wechselwirkung der Teilchen und die durch das äußere Feld \vec{B} entstehenden Kräfte.

- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Bezeichnen Sie dabei die Orte der Teilchen mit \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . (4 Punkte)
- b) Bestimmen Sie entkoppelte Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes \vec{R} und der Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. (5 Punkte)

Kontrolle:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (1)$$

- c) Wählen Sie die Koordinaten so, dass $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Zeigen Sie: Eine mögliche Lösung der Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes ist von der Form

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \ell [\cos(\omega t)\vec{e}_x - \sin(\omega t)\vec{e}_y] \quad (2)$$

mit einem gewissen ω . Bestimmen Sie die Frequenz ω . (6 Punkte)

- d) Betrachten Sie nun die Relativbewegung. Setzen Sie dazu wieder $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und betrachten Sie zur Vereinfachung nur Bewegungen mit \vec{r} senkrecht zu \vec{e}_z . Benutzen Sie Polarkoordinaten $\vec{r} = r(\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) = r\vec{e}_r$ und berechnen Sie Radial- und Tangentialkomponente der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung. Sie dürfen die Gleichungen

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \quad (3)$$

ohne Beweis verwenden. (6 Punkte)

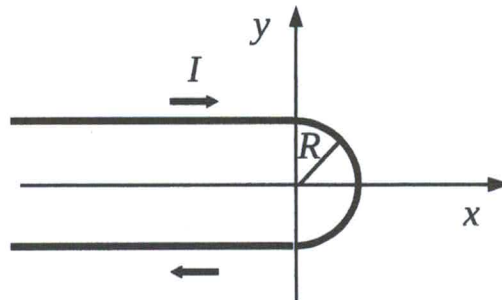
- e) Zeigen Sie, dass die Größe

$$L = mr^2 \left(\dot{\varphi} + \frac{qB}{2m} \right) \quad (4)$$

eine Konstante der Bewegung ist. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt B**Elektrodynamik/Optik****Aufgabe 1: Teilchen im Magnetfeld einer Leiterschleife**

Durch eine ebene, halb unendliche Leiterschleife L der im Bild gezeigten Form in der (x, y) -Ebene fließe ein zeitlich konstanter Strom I im Uhrzeigersinn.



Das Gesetz von Biot-Savart für das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}_L(\vec{r})$ der Leiterschleife lautet

$$\vec{B}_L(\vec{r}) = b \int_L \frac{I d\vec{r}_I \times (\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3}, \quad b = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (1)$$

wobei \vec{r}_I den Ortsvektor des Linienelements $d\vec{r}_I$ entlang der Leiterschleife bezeichnet.

- Begründen Sie zunächst aus der Geometrie des Problems, welche Komponenten des Feldes $\vec{B}_L(x, y, 0)$ in der (x, y) -Ebene ungleich null sein können. (3 Punkte)
- Berechnen Sie nun das Feld \vec{B}_L am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ aus dem Gesetz von Biot-Savart. Definieren Sie hierzu drei geeignete Teilstrecken für die Integration und verwenden Sie das Superpositionsprinzip. (9 Punkte)
- Ein Teilchen der Ladung $q > 0$ befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$. Berechnen Sie zunächst unter der Annahme eines homogenen Feldes $\vec{B}_{\text{konst}}(\vec{r}) = -B\vec{e}_z$, mit $B > 0$, die Bahn $\vec{r}(t)$ des Teilchens für $t > 0$. Skizzieren Sie die Bahnen für $v_0 > 0$ und $v_0 < 0$. (9 Punkte)
- Vergleichen Sie nun die Teilchenbahnen mit den oben genannten Anfangsbedingungen in den beiden Feldern \vec{B}_{konst} und $\vec{B}_L(\vec{r})$ für $\vec{B}_{\text{konst}} = \vec{B}_L(\vec{0})$. Beschreiben Sie qualitativ die Veränderung der Stärke des Feldes $\vec{B}_L(\vec{r})$ und des lokalen Radius der Teilchenbahn weg vom Ursprung. Skizzieren Sie die Abweichung der Bahnen im Feld $\vec{B}_L(\vec{r})$ im Vergleich zu denen im Feld \vec{B}_{konst} für kleine Anfangsgeschwindigkeiten und einen halben Umlauf. (4 Punkte)

$$\text{Hinweis: } \int \frac{dx}{(x^2 + a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a(x^2 + a)^{\frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 2: Zylinderkondensator

Ein Zylinderkondensator bestehe aus zwei konzentrischen, ideal leitenden Zylindern mit Radien R_1 und $R_2 > R_1$. Die Höhe L der beiden Zylinder sei sehr groß gegenüber den Zylinderradien, so dass Effekte der endlichen Höhe vernachlässigt werden können. Der Raum zwischen den Zylindern sei mit einem Dielektrikum mit relativer Dielektrizitätskonstante ϵ_r gefüllt. Der innere Zylinder trage die Ladung $-Q$, der äußere Zylinder die Ladung Q mit $Q > 0$.

- a) Lösen Sie die durch eine geeignete Maxwellgleichung gegebene Differentialgleichung, um einen allgemeinen Ausdruck für die dielektrische Verschiebung \vec{D} im Bereich zwischen den beiden Zylindern zu finden. (5 Punkte)
- b) Leiten Sie aus einer geeigneten Maxwellgleichung mit Hilfe des Satzes von Gauß die Randbedingung

$$[\vec{D}(R_i^+) - \vec{D}(R_i^-)] \cdot \vec{e}_r = \sigma_i \quad (1)$$

für die dielektrische Verschiebung am Übergang zwischen Dielektrikum und ideal leitendem Zylinder her. Hier ist σ_i die Flächenladungsdichte auf der Metalloberfläche $i = 1$ bzw. 2, und der Einheitsvektor \vec{e}_r steht senkrecht auf der Zylinderoberfläche. (8 Punkte)

- c) Bestimmen Sie das elektrische Feld \vec{E} im Kondensator als Funktion der Ladung Q und berechnen Sie daraus die Potentialdifferenz V zwischen den beiden Zylindern. Schließen Sie damit auf einen Ausdruck für die Kapazität des Zylinderkondensators. (12 Punkte)

Hinweis: In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt für die Divergenz eines Vektorfeldes \vec{v}

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Themenschwerpunkt C**Thermodynamik****Aufgabe 1: Chemisches Potential eines idealen Gases**

Im Folgenden sollen zunächst die allgemeinen Eigenschaften der freien Enthalpie $G(T, p, N)$ betrachtet werden, wobei T die Temperatur, p den Druck und N die Teilchenzahl bezeichnen. Anschließend soll das chemische Potential eines idealen Gases untersucht werden.

- a) Geben Sie an, welche der Zustandsgrößen G, p, T, N extensiv bzw. intensiv sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Zeigen Sie, dass für die funktionelle Abhängigkeit von der Teilchenzahl die Relation

$$G(T, p, N) = Ng(T, p)$$

gilt. (5 Punkte)

- b) Das Differential der inneren Energie $U(S, V, N)$ ist $dU = T dS - p dV + \mu dN$. Leiten Sie hieraus die folgenden Beziehungen her:

$$S = -N \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_p, \quad V = N \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_T. \quad (1)$$

Drücken Sie das chemische Potential μ durch die spezifische Enthalpie g aus. (7 Punkte)

- c) Leiten Sie nun die Relation

$$S dT - V dp + Nd\mu = 0 \quad (2)$$

her. (5 Punkte)

- d) Das chemische Potential für ein ideales Gas hat die Form

$$\mu(T, p) = aT \ln \frac{p}{p_0} + bT \ln \frac{T}{T_0}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichung (1) die dimensionsbehafteten Konstanten a und b in Abhängigkeit von der spezifischen Wärmekapazität c_V . (8 Punkte)

Hinweis: Lösen Sie die Legendre-Transformation von U nach G nach der Entropie S auf.

Aufgabe 2: Mischungsentropie

Ein ideales Gas wird durch die thermische Zustandsgleichung

$$pV = Nk_B T \quad (1)$$

beschrieben, wobei p , V und T Druck, Volumen beziehungsweise Temperatur angeben. N ist die Anzahl der Moleküle und k_B ist die Boltzmannkonstante. Weiter gilt für die Änderung der inneren Energie U bei einer Änderung der Temperatur

$$dU = Nc_V dT, \quad (2)$$

wobei c_V die Wärmekapazität pro Molekül ist.

- a) Verwenden Sie den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, um einen Ausdruck für die Entropie $S(T, V)$ des idealen Gases herzuleiten. (7 Punkte)

Zur Kontrolle: $S = Nc_V \ln(T) + Nk_B \ln(V) + S_0(N)$

- b) In der Thermodynamik gibt es neben extensiven Größen wie der Entropie auch intensive Größen. Geben Sie ein Beispiel für eine intensive Größe an. Geben Sie einen Ausdruck für die Integrationskonstante $S_0(N)$ an, der aus der Forderung nach der Extensivität der Entropie folgt. Folgern Sie damit einen neuen Ausdruck für die Entropie. Zeigen Sie für Ihr Ergebnis explizit, dass sich dieses nicht ändert, wenn Sie alle extensiven Größen mit einem Faktor λ multiplizieren. (6 Punkte)

Es sollen nun zwei unterscheidbare ideale Gase mit der gleichen Wärmekapazität c_V betrachtet werden. Die beiden Gase seien zunächst in zwei getrennten Behältern bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T eingeschlossen, wobei die Teilchenzahlen und Volumina durch N_1, V_1 bzw. N_2, V_2 gegeben sind. Die beiden Gase werden nun in einem reversiblen isothermen Prozess so gemischt, dass am Ende im Volumen $V = V_1 + V_2$ ein Gemisch der beiden Gase bei der Temperatur T vorliegt.

- c) Berechnen Sie die Mischungsentropie, also die Änderung ΔS der Entropie bei diesem reversiblen Prozess. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\Delta S(x)$, wenn $x = N_1/N$ mit $N = N_1 + N_2$ ist. Bestimmen Sie außerdem denjenigen Wert von x , bei dem die Mischungsentropie maximal wird, und geben Sie den Wert an, den die Mischungsentropie im Maximum annimmt. Skizzieren Sie $\Delta S(x)$. (12 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Gebundene Zustände eines Delta-Potentials

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einer Dimension unter dem Einfluss von zwei verschiedenen Potentialen $V_1(x)$ bzw. $V_2(x)$. Diese lauten

$$V_1(x) = -\frac{\beta\hbar^2}{2m}\delta(x), \quad V_2(x) = \begin{cases} -\frac{\beta\hbar^2}{2m}\delta(x) & \text{für } x > -a \\ +\infty & \text{für } x \leq -a \end{cases}, \quad (1)$$

wobei β und a positive Konstanten sind. Eine Lösung Ψ der Schrödingergleichung mit einem Delta-Potential $-\frac{\beta\hbar^2}{2m}\delta(x)$ muss an der Stelle $x = 0$ unter anderem die Bedingung

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Psi'(\epsilon) - \Psi'(-\epsilon)] = -\beta\Psi(0) \quad (2)$$

erfüllen, wobei $\Psi'(x)$ die Ableitung von Ψ nach x bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie eine normierte Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit dem Potential V_1 . Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$\Psi(x) = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x|}. \quad (3)$$

Bestimmen Sie κ und die Grundzustandsenergie. (7 Punkte)

- b) Gesucht ist nun ein gebundener Zustand im Potential V_2 . Stellen Sie geeignete Ansätze für die Bereiche I: $x \in [-a, 0]$ und II: $x \in [0, \infty)$ auf. Geben Sie Randbedingungen bei $-a$ und ∞ sowie Anschlussbedingungen bei 0 an. (7 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass aus den Gleichungen aus Teilaufgabe b) die Bedingung

$$a\kappa \left(1 + \frac{1}{\tanh a\kappa} \right) = \beta a \quad (4)$$

mit $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ folgt. (6 Punkte)

- d) Skizzieren Sie die linke Seite von (4) als Funktion von $a\kappa$. Zeigen Sie, dass der gebundene Zustand nicht immer existiert. Geben Sie die Bedingung an, die βa für die Existenz des Grundzustandes erfüllen muss. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Teilchen in gekreuzten Feldern

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m und Ladung q befindet sich in einem homogenen magnetischen Induktionsfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ und einem dazu senkrechten, homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = (E, 0, 0)$. Es soll das Spektrum der Eigenenergien für dieses System bestimmt werden.

Nach der Wahl der Eichung $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ für das Vektorpotential und $\Phi = -E(x - x_0)$ für das Skalarpotential lautet der Hamiltonoperator:

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + (p_y - qBx)^2 + p_z^2 \right] - qE(x - x_0). \quad (1)$$

- a) Geben Sie diejenigen Komponenten des Ortsoperators \vec{r} oder des Impulsoperators \vec{p} an, die mit H kommutieren. Begründen Sie den Ansatz

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} \psi(x) \quad (2)$$

für die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators. (5 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass für diesen Ansatz der (nichttriviale) x -abhängige Teil von H dem Hamiltonoperator eines verschobenen harmonischen Oszillator entspricht. Geben Sie die Verschiebung x_1 und die Oszillatorfrequenz ω an. Bestimmen Sie das Spektrum der Energieeigenwerte von H . (8 Punkte)

- c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle$ von x bezüglich der Wellenfunktion $\psi(x)$, und setzen Sie dann $x_0 = \langle x \rangle$. Zeigen Sie, dass sich das Energiespektrum zu

$$\epsilon(k_z, n) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{\hbar |qB|}{2m} (2n + 1) + \frac{mE^2}{2B^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

vereinfacht. (7 Punkte)

- d) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Operators $v_y = (p_y - qA_y)/m$ der Geschwindigkeit in y -Richtung. Interpretieren Sie mit diesem Ergebnis die drei Terme im Energiespektrum. (5 Punkte)

