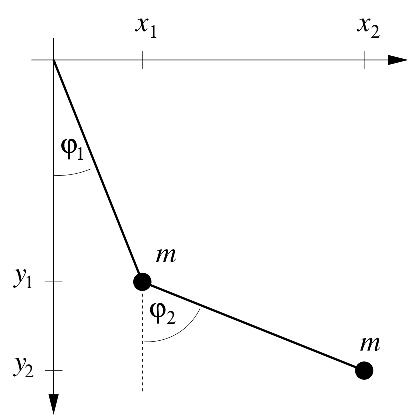
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Doppelpendel

Ein Doppelpendel mit zwei identischen punktförmigen Massen m schwinge reibungsfrei im Schwerefeld. Die Massen der beiden starren Stangen mit der Länge l sollen vernachlässigt werden, und das Pendel schwinge in der (x, y)-Ebene, wie in der Skizze gezeigt. Die Koordinate y soll in Richtung der Schwerkraft zeigen.



a) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion dieses Doppelpendels unter Benutzung der verallgemeinerten Koordinaten φ_1 und φ_2. (6 Punkte)

Zur Kontrolle: $L = \frac{ml^2}{2}[2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + mgl[2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2]$

b) Entwickeln Sie die Lagrange-Funktion für kleine Winkel φ_1, φ_2 und kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ bis zur quadratischen Ordnung. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkel. (6 Punkte)

Zur Kontrolle:

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\frac{g}{l}\varphi_1 = 0$$
$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0$$

d) Ohne Rechnung: Beschreiben Sie qualitativ die Eigenschwingungen und die allgemeine Bewegung des Doppelpendels für kleine Winkel. (5 Punkte)

e) Berechnen Sie für kleine Winkel die Eigenfrequenzen mit dem Ansatz

$$\varphi_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \varphi_2 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,,$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Fallender Stab

Ein homogener Stab der Länge l und Masse m ist am unteren Ende im Koordinatenursprung gelenkig fixiert, so dass er sich in der (x, z)-Ebene drehen kann. Das Trägheitsmoment des Stabes für Drehungen um seinen unteren Endpunkt beträgt $\Theta = ml^2/3$. Der Stab fällt aus der Ruhe unter dem Einfluß der Schwerkraft.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\dot{\phi}, \phi)$ des Stabes auf (mit dem Winkel ϕ als generalisierter Koordinate), und leiten Sie die Bewegungsgleichung ab. (7 Punkte)

b) Die Ausgangsstellung des Stabes sei mit ϕ_0 bezeichnet. Welche Abhängigkeit für $\dot{\phi}$ von ϕ und ϕ_0 liefert der Energieerhaltungssatz? (3 Punkte)

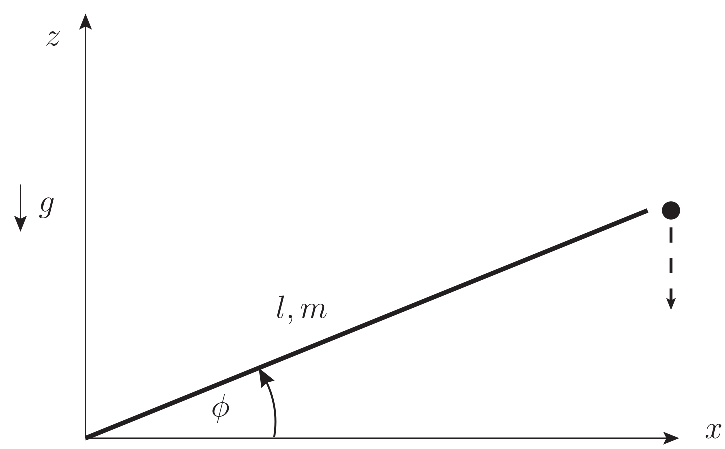
c) Berechnen Sie die Vertikalbeschleunigung $\ddot{z}$ des oberen Stabendes $z = l \sin \phi$. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\ddot{z} = -gN(s, s_0)$ gilt, wobei

$$N(s, s_0) = \frac{3}{2} + 3ss_0 - \frac{9}{2}s^2 , \qquad s = \sin \phi , \quad s_0 = \sin \phi_0 .$$

(6 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Funktion $N(s, s_0)$ im Bereich $0 < s < s_0$. Bestimmen Sie den Startwert, den Endwert und den Maximalwert der Vertikalbeschleunigung $|\ddot{z}|$ im Verlauf der Fallbewegung des Stabes bis zur Horizontalen. (5 Punkte)

e) Neben dem oberen Ende des Stabes befindet sich eine kleine Kugel, die gleichzeitig mit dem Stab losgelassen wird. Welche Bedingung muss die Anfangsstellung ϕ_0 erfüllen, damit bis zum Erreichen der horizontalen Lage der Stab stets der Kugel voraus ist? Welche Kräfte sind für Beschleunigungen über g verantwortlich? (4 Punkte)



Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Magnetfeld eines zylindrischen Stromträgers

Ein unendlich langer, sehr dünnwandiger Zylinder habe den Radius a. Die Koordinatenachse in z-Richtung liegt auf der Zylinderachse, d. h. bei $\varrho = 0$ für Zylinderkoordinaten (ϱ, ϑ, z). Auf der Oberfläche dieses Zylinders fließt der Strom in helikaler Richtung mit der Oberflächenstromdichte

$$\vec{K} = K_0(\vec{e}_z \cos\alpha + \vec{e}_\vartheta \sin\alpha) \; .$$

$\vec{e}_z$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung und $\vec{e}_\vartheta$ der Einheitsvektor in ϑ-Richtung. K_0 und der Winkel α sind Konstanten. Für diese Stromdichte besitzt die Anordnung Zylindersymmetrie, und die Volumenstromdichte $\vec{(}\varrho - a)$ ausgedrückt werden. Der Zylinder befindet sich im Vakuum, und die magnetische Induktion $\vec{B}$ strebt gegen Null für $\varrho \to \infty$.

a) Zeigen Sie, dass die radiale Komponente B_ϱ der magnetischen Induktion aus Symmetriegründen gleich Null sein muss. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ (Größe und Richtung!) innerhalb des Zylinders (d. h. für $\varrho < a$). (10 Punkte)

c) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ (Größe und Richtung!) außerhalb des Zylinders (d. h. für $\varrho > a$). (6 Punkte)

d) Nehmen Sie jetzt an, dass das Ohm'sche Gesetz $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ gilt und die Leitfähigkeit σ konstant ist. Nehmen Sie weiterhin an, dass das elektrische Feld $\vec{E}$ zeitunabhängig ist, d. h. dass $\vec{E} = -\nabla\phi$ gilt (mit dem elektrostatischen Potential ϕ). Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Winkel $\alpha = 0$ sein muss. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Inhomogener Kugelkondesator

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei konzentrische, unendlich dünne, leitende Kugelschalen mit den Radien a bzw. b mit $a < b$. Die Schalen sind voneinander durch ein inhomogenes Dielektrikum isoliert, dessen relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon(r) > 1$ durch

$$\epsilon(r) = \frac{1}{1 - Kr} \tag{1}$$

gegeben ist. K ist eine Konstante, die der Ungleichung $0 < K < 1/b$ genügt. r bezeichnet den radialen Abstand vom Symmetriezentrum der Anordnung.

Eine Ladung Q wird auf die innere Schale aufgebracht.

a) Berechnen Sie die dielektrische Verschiebung $\vec{D}(\vec{r})$ im Bereich $a < r < b$. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Kapazität C der Anordnung. (8 Punkte)

c) Im Dielektrikum entsteht eine Polarisation $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$ und eine zugehörige Polarisationsladungsdichte

$$\rho_{\text{pol,vol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie $\vec{P}$ und $\rho_{\text{pol,vol}}$ im Bereich $a < r < b$. (7 Punkte)

Hinweis: Für ein radiales Vektorfeld $\vec{v} = v_r \vec{e}_r$ gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r)\,. \tag{3}$$

d) Da die Polarisation bei $r = a$ und $r = b$ einen Sprung hat, entsteht an diesen Oberflächen eine Polarisations-Flächenladungsdichte $\rho_{\text{pol,fl}}$. Geben Sie das Vorzeichen von $\rho_{\text{pol,fl}}$ an der Fläche $r = a$ und an der Fläche $r = b$ für den Fall $Q > 0$ an. Begründen Sie Ihre Antworten. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Polarisation

Betrachten Sie ein dielektrisches Material, das durch ein elektrisches Feld polarisiert wird. Dessen Wärmekapazität $C_E(T, E)$ bei konstantem elektrischem Feld E und dessen Polarisation $P(T, E)$ seien als Funktion der Temperatur T und des elektrischen Feldes E bekannt. Die Thermodynamik dieses Materials wird durch seine innere Energie $U(S, P)$ als Funktion der Entropie S und der Polarisation P beschrieben, deren Differential die Form

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + E\,\mathrm{d}P$$

hat.

a) Welche der Größen U, T, S, E, P sind extensiv bzw. intensiv? (3 Punkte)

b) Leiten Sie das Differential $\mathrm{d}G$ der freien Enthalpie $G(T, E)$ her. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Änderung der Entropie bei konstanter Temperatur gleich der Änderung der Polarisation bei konstantem Feld ist,

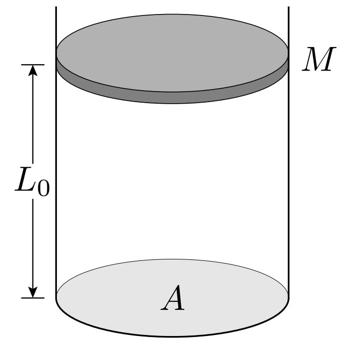
$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E .$$

(5 Punkte)

d) Drücken Sie die Änderung der Temperatur bei adiabatischer (= isentroper) Änderung des elektrischen Feldes durch $C_E(T, E)$ und $P(T, E)$ aus. (12 Punkte)

Aufgabe 2: Ideales Gas in einem Zylinder mit beweglichem Deckel

n Mol eines idealen Gases, dessen Molwärme C_V unabhängig von der Temperatur sei, befinde sich in einem Zylinder mit Grundfläche A. Die Unterseite des Deckels der Masse M sei anfänglich in der Höhe L_0 über der Grundfläche fixiert. Das Gas habe in dieser Situation die Temperatur T_0. Auf den Deckel wirke die Erdbeschleunigung $\vec{g}$ in Richtung der Zylinderachse. Die Wirkung der Erdbeschleunigung auf das ideale Gas sowie der Außendruck auf den Deckel seien vernachlässigbar. Die Wärmekapazitäten von Zylinder und Deckel sind ebenfalls zu vernachlässigen.



Nachdem die Fixierung des Deckels gelöst wurde, bewege sich der Deckel reibungsfrei in die Gleichgewichtslage, in der seine Unterseite die Höhe L_1 über der Grundfläche habe. Das System sei dabei thermisch von seiner Umgebung isoliert. Es soll die Temperatur T_1 berechnet werden, die das ideale Gas besitzt, nachdem sich das Gleichgewicht eingestellt hat.

a) Bestimmen Sie für das ideale Gas die innere Energie $U_g(T)$ in Abhängigkeit von der Temperatur T sowie die Entropie $S(U_g, V)$ als Funktion der inneren Energie und des Volumens V. (10 Punkte)

b) Berechnen Sie unter Verwendung der Energieerhaltung die innere Energie U_g des Gases in der Gleichgewichtssituation als Funktion der Ausgangshöhe L_0 und der anfänglichen Gastemperatur T_0 sowie der Endhöhe L_1. (5 Punkte)

c) Verwenden Sie den in Teilaufgabe a) hergeleiteten Ausdruck für die Entropie, um die Gleichgewichtshöhe L_1 des Deckels zu bestimmen. Welche Temperatur hat das ideale Gas demnach im Gleichgewicht? (10 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Bewegung im harmonischen Potential

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen harmonischen Potential mit der Frequenz ω. Der quantenmechanische Grundzustand sowie der erste angeregte Zustand sind durch

$$\psi_0(x) = \mathcal{N}_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \psi_1(x) = \mathcal{N}_1 \frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei die Normierungskonstanten $\mathcal{N}_0$ und $\mathcal{N}_1$ über die Beziehung $\mathcal{N}_1 = \sqrt{2}\mathcal{N}_0$ zusammenhängen.

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi_0(x)$ die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators löst. Bestimmen Sie x_0 und die Eigenenergie E_0 des Grundzustands als Funktion der Systemparameter m und ω. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}_0$ der Grundzustandswellenfunktion. Zeigen Sie ferner, dass die allgemeine Superposition

$$\psi(x) = \cos\tfrac{\alpha}{2}\,\psi_0(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\psi_1(x) \tag{2}$$

der beiden in (1) gegebenen Wellenfunktionen mit $0 \leq \alpha < \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ normiert ist. (7 Punkte)

c) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle x \rangle$ des durch (2) definierten Zustands. Welchen Wert kann der Ortserwartungswert maximal annehmen? (6 Punkte)

d) Es soll die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ mit der Anfangsbedingung

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(x) + \mathrm{i}\psi_1(x)\right] \tag{3}$$

betrachtet werden. Berechnen Sie unter Benutzung der Ergebnisse von Teilaufgabe c) die Zeitentwicklung des Ortserwartungswerts $\langle x \rangle(t)$. (6 Punkte)

Nützliche Formeln:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \exp(-u^2) = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\, u^2 \exp(-u^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Aufgabe 2: Asymmetrischer Kasten

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \infty \quad \text{für} \quad x < 0\,, \quad V(x) = -V_0 < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad V(x) = 0 \quad \text{für} \quad a < x\,.$$

Wenn das Potential im Kasten tief genug ist, gibt es für $-V_0 < E < 0$ einen gebundenen Grundzustand mit der Energie $E < 0$. Dieser Zustand soll im Folgenden betrachtet werden.

a) Lösen Sie die eindimensionale Schrödinger-Gleichung in den beiden Bereichen $0 < x < a$ und $a < x$, und geben Sie die jeweilige Wellenfunktion $\Psi(x)$ an. Die Normierung brauchen Sie nicht zu bestimmen. (5 Punkte)

b) Verwenden Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$, um folgende Bestimmungsgleichung für die Energie herzuleiten:

$$\tan\left(\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\Delta E}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta E}}{\sqrt{|E|}} < 0$$

mit der Energiedifferenz $\Delta E = E - (-V_0) = V_0 - |E|$. (5 Punkte)

c) Betrachten Sie diese Gleichung für feste Energiedifferenz ΔE des Grundzustandes als Funktion von $|E|$. Welchen Wert hat ΔE im Limes $|E| \to 0$? Welchen Wert hat ΔE im Limes $V_0 \to \infty$? Für welche Werte $V_0 > 0$ gibt es keinen gebundenen Zustand? (12 Punkte)

d) Welches äquivalente bekannte Problem erhält man im Limes $V_0 \to \infty$? (3 Punkte)