Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Ebenes Federpendel

Betrachten Sie ein Pendel im homogenen Schwerefeld der Erde, das anstelle der üblichen starren Stange an einer Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge l_0 aufgehängt ist. Die Pendelmasse m wird als punktförmig und die Feder als masselos angenommen. Es soll eine ebene Bewegung in der Ebene $z = 0$ betrachtet werden.

a) Leiten Sie die Lagrange-Funktion L des Systems als Funktion der zweidimensionalen Polarkoordinaten φ und l her. Dabei ist φ der Winkel, der die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage beschreibt und l die Länge der Feder. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis schreiben lässt als

$$L = \frac{m}{2}\left(l^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2\right) + m\,g\,l\,\cos\varphi - \frac{k}{2}\left(l + \frac{m\,g}{k} - l_G\right)^2,$$

wobei l_G die Länge der Feder in der Gleichgewichtslage (d.h. in Ruhe) ist. (10 Punkte)

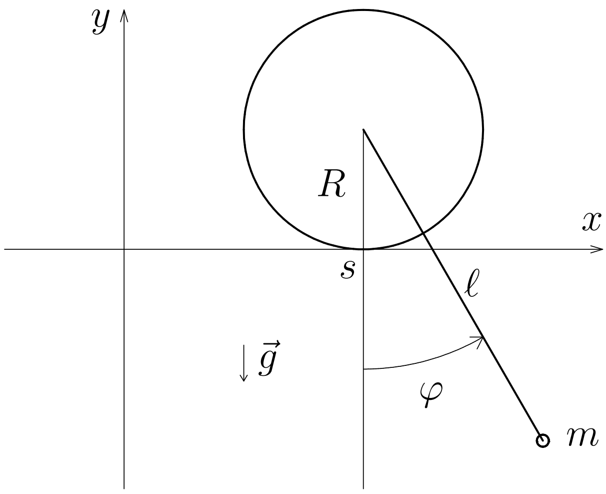
b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Funktion her. (5 Punkte)

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen in harmonischer Näherung für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Dabei werde die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage mit $s = l - l_G$ bezeichnet. Geben Sie die Eigenfrequenzen und die explizite Lösung für allgemeine (mit der Annahme kleiner Auslenkungen verträglichen) Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$, $s(t=0) = s_0$, $\dot{s}(t=0) = v_0$ an. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Rollpendel

Eine Punktmasse m ist mit Hilfe eines Stabes der Länge ℓ an einem Rad (Radius R) starr befestigt, wobei ℓ größer oder kleiner als R sein kann. Das Rad kann in der vertikalen (x, y)-Ebene entlang der x-Achse reibungsfrei und ohne Schlupf rollen. Die x-Koordinate des Berührungspunktes des Rades mit der x-Achse werde mit s bezeichnet, der Drehwinkel mit φ, und die Koordinaten seien so gewählt, dass $s = 0$ für $\varphi = 0$. Die Masse von Rad und Stab seien vernachlässigbar gegenüber der Masse m. Es wirke die Schwerkraft (siehe Abbildung).



a) Stellen Sie die Rollbedingung auf, und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems. Verwenden Sie φ als generalisierte Koordinate.

Ergebnis zur Kontrolle: $L = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\left(R^2 + \ell^2 - 2R\ell\cos\varphi\right) + mg\ell\cos\varphi$. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Frequenz ω der *kleinen* Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ des Rollpendels. Diskutieren Sie die Grenzfälle $\ell \gg R$, $\ell = R$, $\ell = 0$, und skizzieren Sie ω^2 als Funktion von ℓ. (7 Punkte)

c) Das Rollpendel werde aus der labilen Gleichgewichtslage $\varphi = \pi$ mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit gestartet. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ beim Durchgang des Pendels durch den tiefsten Punkt mit Hilfe des Energiesatzes. (7 Punkte)

d) Fassen Sie das Rollpendel nun als starren Körper auf, und bestimmen Sie sein Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse, die senkrecht zur Pendelebene durch den Auflagepunkt s geht. Welche Interpretation der kinetischen Energie aus Teil a ergibt sich hieraus? (4 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Geladene Platten

Eine ebene, unbegrenzte Fläche ($x = 0$) trage die homogene Flächenladungsdichte σ.

a) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im ganzen Raum mit Hilfe des Satzes von Gauss. (8 Punkte)

b) Geben Sie das zugehörige elektrostatische Potential Φ an. Legen Sie den Nullpunkt des Potentials in die geladenen Fläche. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie Potential und elektrische Feldstärke im ganzen Raum für den Fall von zwei Ebenen mit entgegengesetzt gleichen Flächenladungsdichten $\pm\sigma$, die

   1. parallel zueinander im Abstand d sind (Flächen $x = 0$ und $x = d$),
   2. senkrecht aufeinander stehen (Flächen $x = 0$ und $z = 0$).

   Skizzieren Sie jeweils den Verlauf der Feldlinien und Äquipotentiallinien in der (x, z)-Ebene. (12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Lorentz-Kraft

Auf ein nicht-relativistisches Teilchen der Masse m und der Ladung q wirke die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\Big(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big)\,. \tag{1}$$

Es soll zunächst Folgendes gezeigt werden: Wenn sich das Teilchen in zeitunabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern bewegt, dann ist die Energie

$$U = \tfrac{1}{2} m\, \vec{v}(t)^2 + q\,\Phi(\vec{r}(t)) \tag{2}$$

des Teilchens zeitlich konstant. Dabei bezeichnet $\Phi(\vec{r})$ das elektrostatische Potential, und $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$ sind die zeitabhängige Geschwindigkeit und Position des Teilchens. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Benutzen Sie (1), um

$$\vec{v} \cdot \left(m\dot{\vec{v}} - q\vec{E}\right) = 0 \tag{3}$$

zu zeigen. (2 Punkte)

b) Benutzen Sie (3), um

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tfrac{1}{2} m\vec{v}(t)^2 + q\Phi(\vec{r}(t))\right] = 0 \tag{4}$$

herzuleiten. (3 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben wird $\vec{B} = 0$ gesetzt. Das elektrische Feld $\vec{E}$ werde erzeugt durch eine homogen geladene Platte mit Flächenladungsdichte $\sigma_0 > 0$, die sich in der (x, y)-Ebene bei $z = 0$ befindet. Sie können die Dicke der Platte vernachlässigen.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld mit Hilfe der Symmetrie des Problems und des Satzes von Gauß. (8 Punkte)

Ergebnis zur Kontrolle: $\vec{E} = \pm\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$ mit „+“ für $z > 0$ und „−“ für $z < 0$.

d) Wie lautet das zugehörige Potential Φ? (5 Punkte)

e) Das Teilchen habe eine positive Ladung $q > 0$, befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{r}(t = 0) = z_0\vec{e}_z$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}(t = 0) = v_0\vec{e}_z$ mit $z_0 > 0$ und $v_0 > 0$. Bestimmen Sie die Position des Teilchens als Funktion der Zeit für $t \geq 0$ (es ist keine Gravitationskraft zu berücksichtigen). (7 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: **Van der Waals-Gas**

Ein Gas sei durch die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{c}\left(p - \frac{a(V-2b)}{V^3}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V-b}{c} \tag{1}$$

charakterisiert, wobei a, b und c positive Parameter sind. Die Teilchenzahl N werde im Folgenden festgehalten.

a) Zeigen Sie, dass die beiden partiellen Ableitungen die Integrabilitätsbedingung erfüllen und somit mit einer thermischen Zustandsgleichung $T = T(p, V)$ verträglich sind. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie aus den partiellen Ableitungen (1) die zugehörige thermische Zustandsgleichung. Wählen Sie die auftretende Integrationskonstante so, dass sich bei geeigneter Wahl der Parameter a, b und c die Zustandsgleichung des idealen Gases ergibt. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie die isotherme Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

als Funktion von Druck und Volumen. Skizzieren Sie qualitativ die Kurve im (p, V)-Diagramm, auf der die isotherme Kompressibilität divergiert. Bestimmen Sie dazu insbesondere die Kurvenpunkte, an denen der Druck verschwindet oder maximal wird. (11 Punkte)

Hinweis: Es ist sinnvoll, im Diagramm die dimensionslosen Variablen $v = V/b$ und $\pi = (b^2/a)p$ zu verwenden.

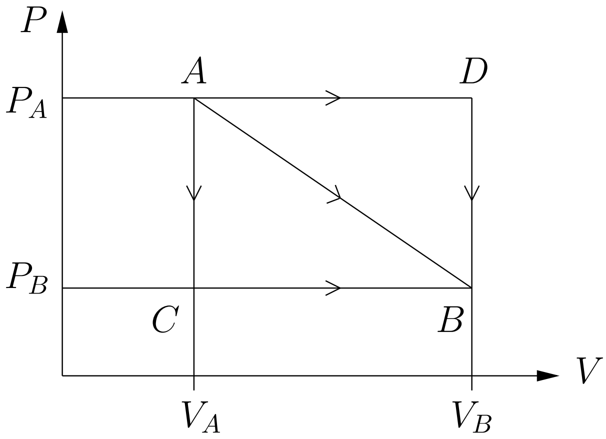
Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Prozesse im (P, V)-Diagramm eines Gases**

Ein Gas sei in einem Zylinder mit beweglichem Kolben eingeschlossen. Wenn die Wände des Behälters wärmeisoliert sind, beobachtet man den folgenden Zusammenhang zwischen Druck und Volumen des Gases,

$$PV^{5/3} = \text{const.} \quad \text{für } \Delta Q = 0\,. \tag{1}$$

Im folgenden (P, V)-Diagramm sollen die Punkte A und B auf einer (nicht eingezeichneten) Adiabaten, Gl. (1), liegen:



Die Größen P_A, P_B, V_A, V_B seien bekannt und erfüllen Gl. (1).

a) Der Prozess AD besteht in der Erwärmung des Gases bei konstantem Druck, der Prozess DB in der Abkühlung bei konstantem Volumen. Welche Wärmemenge wird im Prozess ADB übertragen?

   Hinweis: Berechnen Sie separat $U_B - U_A$ und die verrichtete Arbeit. (9 Punkte)

b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wärmemenge bei den Prozessen AB und ACB.

   Hinweis: Welche physikalische Bedeutung haben die Flächen zwischen den Wegen ADB und AB bzw. AB und ACB im (P, V)-Diagramm? (6 Punkte)

c) Das Gas werde nun bei konstantem Volumen durch einen kleinen, motorgetriebenen Propeller (Drehmoment $\mathcal{N}$, Winkelgeschwindigkeit ω) erwärmt. Dabei wächst der Druck pro Zeiteinheit gemäß

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\,\frac{\omega \mathcal{N}}{V} \tag{2}$$

   an. Bestimmen Sie hieraus die innere Energie U an einem beliebigen Punkt (P, V) relativ zu U_A.

   Hinweis: Die Leistung $\mathcal{N}\omega$ ist gleich der Ableitung der inneren Energie des Gases nach der Zeit. Berechnen Sie die innere Energie, indem Sie vom Punkt (P_A, V_A) auf einem Weg zum Punkt (P, V) gehen, der sich aus einer Adiabaten und einer Isochoren zusammensetzt. (10 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Zwei δ-Potentiale

Gegeben sei ein Potential mit zwei δ-förmigen Anteilen an den Stellen $x = \pm a$,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} W \left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right] \quad \text{mit} \quad W > 0\,.$$

Im Folgenden sollen gebundene Eigenzustände (also mit der Energie $E < 0$) untersucht werden. Dazu soll ein Ansatz

$$\phi_\pm(x) = A \begin{cases} \mathrm{e}^{\kappa(x+a)} & \text{für } x < -a \\ b\left(\mathrm{e}^{\kappa x} \pm \mathrm{e}^{-\kappa x}\right) & \text{für } -a < x < a \\ \pm \mathrm{e}^{-\kappa(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases} \tag{1}$$

(mit noch zu bestimmenden reellen Konstanten κ und b) für die Eigenfunktionen gemacht werden. (Die Normerungskonstante A bleibt irrelevant.)

An den Stellen $x = \pm a$ gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\phi'(\pm a + \epsilon) - \phi'(\pm a - \epsilon)\right] = -W\phi(\pm a)$$

für die Wellenfunktionen (mit $\phi'(x) \equiv \mathrm{d}\phi(x)/\mathrm{d}x$).

a) Welche Einheit hat W? Geben Sie zwei (oder mehr) Gründe dafür an, dass die Ansätze (1) für die drei Bereiche sinnvoll sind. Wie hängt die (noch zu bestimmende) Energie mit der Konstanten κ zusammen? (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Konstante b aus den Anschlussbedingungen für die Wellenfunktionen. Zeigen Sie, dass man aus der Bedingungen für die Ableitungen der Wellenfunktionen die Bestimmungsgleichung

$$Wa = \frac{2\kappa a}{1 \pm \mathrm{e}^{-2\kappa a}}\,. \tag{2}$$

für die Konstante κ erhält. (10 Punkte)

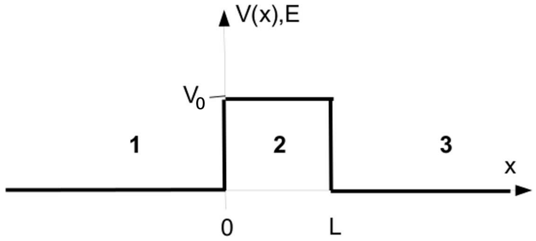
c) Fertigen Sie eine Skizze an, aus welcher man die Konstante κ graphisch bestimmen kann. Wie viele gebundene Zustände gibt es? Skizzieren Sie die Eigenenergien als Funktion von W. Untersuchen Sie (analytisch) die Grenzfälle großer und kleiner Werte von κa. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: **Potentialschwelle**

Betrachtet werden soll die Wellenfunktion eines Teilchens in einer Dimension mit Koordinate $-\infty < x < \infty$. Der zeitunabhängige Hamilton-Operator ist $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$ mit einem stückweise konstanten Potential $V(x)$ (siehe Abbildung). Das Potential und der Ansatz für den zeitunabhängigen Anteil der Wellenfunktion $\Psi_i(x,t) = \psi_i(x)\,\chi_i(t)$ sind in den drei Bereichen $i = 1, 2, 3$ mit jeweils konstantem $V(x)$ gegeben durch

$$\begin{array}{llll} i=1: & x<0 & V(x)=0 & \psi_1(x)=b_1e^{-\mathrm{i}kx} \\ i=2: & 0\leq x\leq L & V(x)=V_0 & \psi_2(x)=a_2e^{-\kappa x}+b_2e^{\kappa x} \\ i=3: & x<L & V(x)=0 & \psi_3(x)=a_3e^{\mathrm{i}kx}+b_3e^{-\mathrm{i}kx} \end{array} \qquad k,\kappa,L \text{ reell und positiv} \tag{1}$$



a) Geben Sie den Zusammenhang der Größen k und κ mit der Energie des Teilchens und die zeitabhängigen Faktoren $\chi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ der Wellenfunktionen an. Warum gilt $0 < E < V$ für den Ansatz (1)? (4 Punkte)

b) Geben Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = L$ an, und bestimmen Sie die Konstanten a_2, b_2 im Ansatz für die Wellenfunktion im Bereich $i = 2$ in Abhängigkeit vom Normierungskoeffizienten b_1 im Bereich $i = 1$. (4 Punkte)

c) Geben Sie in den Bereichen $i = 1$ und $i = 3$ jeweils die links-laufenden Stromdichten $j_{L,i}$ und die rechts-laufenden Stromdichten $j_{R,i}$ als Funktion der Parameter im Ansatz (1) an. Interpretieren Sie den Ansatz (1) für die Wellenfunktion physikalisch. (4 Punkte)

d) Die (nicht zu berechnende) Lösung der Randbedingungen für die Konstanten im Bereich $i = 3$ ist

$$a_3 = -\mathrm{i}b_1e^{-\mathrm{i}kL}\frac{\kappa^2+k^2}{2k\kappa}\sinh(\kappa L)\,, \quad b_3 = b_1e^{\mathrm{i}kL}(\cosh(\kappa L)+\mathrm{i}\mu\sinh(\kappa L))\,, \quad \mu = \frac{\kappa^2-k^2}{2k\kappa}\,. \tag{2}$$

Der Transmissionskoeffizient T ist definiert als der Betrag des Verhältnisses der Stromdichten $j_{L,1}$ und $j_{L,3}$. Berechnen Sie T als Funktion von k, κ und $\sinh(\kappa L)$. (4 Punkte)

e) Zeigen Sie, dass im Grenzfall $\kappa L \gg 1$ das führende Verhalten von T von der Form

$$T = \alpha\mathrm{e}^{-\beta L}$$

ist, und bestimmen Sie die Konstanten α und β als Funktion von κ, k und L. Welchen Wert für T würde man im Teilchenbild der klassischen Mechanik erwarten? Welcher Wert für T ergibt sich quantenmechanisch im Grenzfall $V_0 \to \infty$ bei fester Energie? *(Begründungen!)* (5 Punkte)

f) Skizzieren Sie qualitativ (keine Rechnung notwendig) den Verlauf der *Wahrscheinlichkeitsdichte* $\rho(x)$ in Abhängigkeit von x. (4 Punkte)