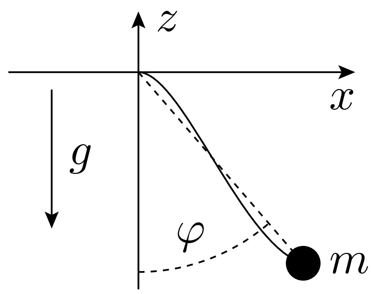
Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Fadenpendel

Eine Punktmasse m sei an einem masselosen, undehnbaren Faden der Länge ℓ aufgehängt. Die Anordnung befinde sich in einem homogenen Schwerefeld, und die Bewegung der Masse sei auf die (x, z)-Ebene eingeschränkt. Zur Analyse dieses Systems betrachten wir die Masse zunächst ohne Faden, anschließend an einer starren Stange und schließlich an einem Faden.



a) Nehmen Sie zunächst an, dass sich die Punktmasse unter dem Einfluss der Schwerkraft frei in der (x, z)-Ebene bewegen kann. Wie lautet dann die Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten? Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung. (4 Punkte)

Nun sei die Punktmasse mittels einer drehbar gelagerten, starren Stange der Länge ℓ am Koordinatenursprung befestigt.

b) Bestimmen Sie die von der Stange ausgeübte Zugkraft als Funktion des Winkels φ und der Geschwindigkeit v_0 der Masse bei $\varphi = 0$, sowie den maximalen Winkel φ_{max}, den die Masse bei einem gegebenen v_0 erreichen kann. Zeigen Sie, dass für $\sqrt{2g\ell} \leq |v_0| \leq \sqrt{5g\ell}$ ein Winkel φ_0 erreicht wird, an dem die Zugkraft verschwindet. (8 Punkte)

Im Weiteren soll nun ein beweglicher Faden angenommen werden. Die Geschwindigkeit der Masse bei $\varphi = 0$ sei $v_0 = 2\sqrt{g\ell}$.

c) Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von φ_0 und den Geschwindigkeitsvektor (v_x, v_z) an dem durch diesen Winkel beschriebenen Punkt. Geben Sie die Bewegung der Punktmasse von diesem Punkt bis zu dem Punkt an, an dem der Faden wieder eine Zugkraft ausübt. Dabei muss die Lage des Endpunktes nicht berechnet werden. (8 Punkte)

Ergebnis zur Kontrolle: $v_x = -\sqrt{\frac{8}{27}g\ell}$, $v_z = \sqrt{\frac{10}{27}g\ell}$

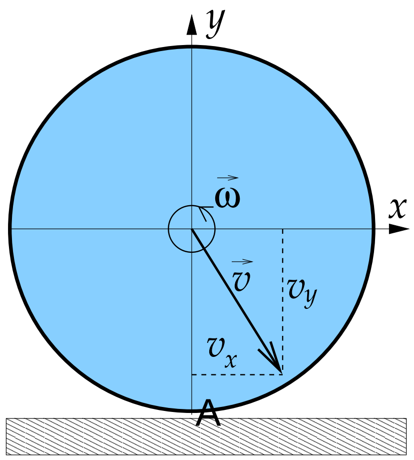
d) Welche maximale Höhe erreicht die Punktmasse? Vergleichen Sie diesen Wert mit der Maximalhöhe, die eine an einer Stange der Länge ℓ befestigte Masse erreicht hätte. Erklären Sie das Ergebnis. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Reflexion eines rauen Balles an einer rauen Wand (2013-IB)

Der Schwerpunkt des Balles (Masse M, Radius R, Trägheitsmoment $\Theta = \gamma M R^2$) bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ wie skizziert in der (x, y)-Ebene; der Ball rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ (die z-Achse zeige aus der Zeichenebene heraus).

Der Ball werde an einer rauen, starren Wand parallel zur (x, z)-Ebene reflektiert. Im Moment der Berührung des Balles mit der Wand kommt die x-Komponente der Geschwindigkeit *des Berührungspunktes* A zur Ruhe (das ist das „Raue" an dem Stoß), und die y-Komponente wechselt ihr Vorzeichen. Gravitationskräfte werden vernachlässigt.



Es seien v_x und v_y die Komponenten des Vektors der Schwerpunktsgeschwindigkeit (parallel bzw. senkrecht zur Wand) *vor* dem Auftreffen auf die Wand; *nach* dem Auftreffen auf die Wand seien die Größen mit ω', v'_x und v'_y bezeichnet.

a) Drücken Sie Geschwindigkeit des Berührungspunktes A (siehe Skizze) vor und nach dem Stoß durch v_x und ω bzw. durch v'_x und ω' aus. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Größen vor und nach dem Stoß die Gleichung

$$v'_x - v_x = \gamma R \left(\omega' - \omega\right) \ . \qquad (1)$$

erfüllen.
Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass die Horizontalkomponente der Kraft (der Wand auf den Ball) sowohl zur Änderung des Drehimpulses als auch zur Änderung der horizontalen Impulskomponente des Balles führt. (10 Punkte)

c) Unter welcher Bedingung an die Größen ω, v_x und v_y springt der Ball nach dem Stoß in y-Richtung (also senkrecht zur Wand)? (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment des Balles, wenn man ihn als Hohlkugel idealisiert, durch $\Theta = \frac{2}{3} M R^2$ gegeben ist. (6 Punkte)

e) Der Ball (als Hohlkugel) treffe mit $\omega = 0$ unter dem Winkel von 45° auf die Ebene. Bestimmen Sie den Winkel θ, unter dem der Ball (als Hohlkugel) reflektiert wird. (3 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Geladenes Teilchen in homogenen, statischen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldern

Ein nicht-relativistisches Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich in räumlich und zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Feldern. $\vec{E} = E\vec{e}_y$ und $\vec{B} = B\vec{e}_z$ seien senkrecht zueinander. Das Teilchen werde im Koordinatenursprung aus der Ruhe losgelassen. Gesucht ist die vollständige Beschreibung der Bewegung, nämlich $\vec{r}\,(t)$ sowie die Form der Bahnkurve.

a) Wie lautet der Ausdruck für die Lorentz-Kraft, die auf das Teilchen wirkt? Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung als Differentialgleichung erster Ordnung für die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ auf. Integrieren Sie diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\vec{v}\,(0) = \vec{0}$. (7 Punkte)

b) Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung aus Teilaufgabe a) den Energiesatz her. Überprüfen Sie zur Kontrolle Ihrer Lösung der Bewegungsgleichung, dass die Energie tatsächlich erhalten ist. (6 Punkte)

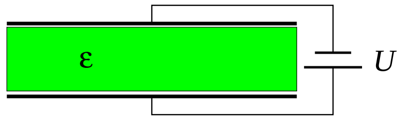
c) Bestimmen Sie $\vec{r}\,(t)$ durch eine weitere Integration mit der oben angegebenen Anfangsbedingung $\vec{r}\,(0) = \vec{0}$. (6 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Teilchens. Diskutieren Sie Umkehrpunkte der Bahnkurve mit Hilfe der analytischen Ergebnisse. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Kondensator mit Dielektrikum unter Spannung (2013-IB)

Gegeben sei ein Plattenkondensator (Fläche A, Abstand d). Zwischen den Kondensatorplatten befinde sich ein Dielektrikum (relative Dielektrizitätskonstante ε). Am Kondensator sei die Spannung U angelegt.



Die Flächenausdehnung sei so groß gegen den Abstand, dass Randeffekte vernachlässigt werden sollen.

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebungen auf beiden Seiten einer Flächenladungsdichte σ erfüllt die Sprungbedingung

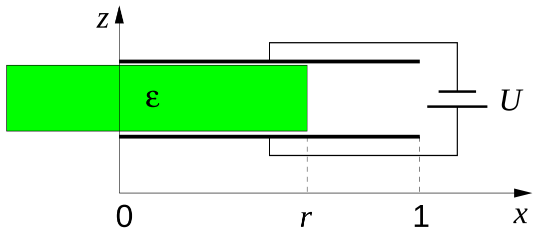
$$\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_{\text{aussen}} - \vec{D}_{\text{innen}} \right) = \sigma \; .$$

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ zwischen den und außerhalb der Kondensatorplatten, die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ und die Flächenladungsdichten σ auf jeder der Platten als Funktion der angelegten Spannung U. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Kapazität C des Kondensators. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Feldenergie $W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, \mathrm{d}V$ als Funktion der Gesamtladung Q und der Spannung U. (4 Punkte)

Der Kondensator sei nun nur zu einem Teil r mit Dielektrikum gefüllt, zum anderen mit Luft (relative Dielektrizitätskonstante 1), wie in der folgenden Abbildung skizziert.



Hinweis: Es ist hilfreich, wenn das System als Parallelschaltung zweier Kondensatoren mit bzw. ohne Dielektrikum behandelt wird.

d) Bestimmen Sie $\vec{E}$, $\vec{D}$ und σ in den Bereichen des Dielektrikums bzw. der Luft. (7 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Kapazität C und die Energie W als Funktion von r. (4 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Clausius-Clapeyron-Gleichung

Zwei unterschiedliche thermodynamische Phasen 1 und 2, z. B. Gas und Flüssigkeit, sind für ein einkomponentiges System entlang einer Linie $p(T)$ (Siedelinie im Fall Gas–Flüssgkeit) im thermodynamischen Gleichgewicht.

a) Welche thermodynamischen Variablen müssen in beiden Phasen identische Werte annehmen, damit die Phasen 1 und 2 im Gleichgewicht sind? (jeweils mit Begründung) (6 Punkte)

b) Leiten Sie aus den Gleichgewichtsbedingungen aus Teilaufgabe a) eine Gleichung ab, welche die Steigung $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ der Trennlinie mit der Differenz $s_1 - s_2$ der spezifischen Entropien und der Differenz der spezifischen Volumina $v_1 - v_2$ jeweils pro Teilchen in den beiden Phasen verknüpft. (9 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Gibbs-Duhem Relation für das chemische Potential in der Form

$$\mathrm{d}\mu = -s\,\mathrm{d}T + v\,\mathrm{d}p$$

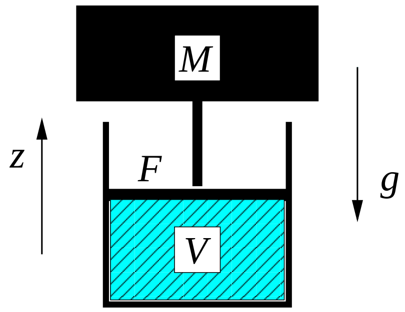
c) Bestimmen Sie die explizite Temperaturabhängigkeit $p_S(T)$ des Drucks entlang der Siedelinie durch Integration der Clausius-Clapeyron-Gleichung $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T = \Delta q/T\Delta v$ unter den Annahmen

1. $v_{\text{flüssig}}$ ist vernachlässigbar gegen v_{gas}, und das Gas ist ideal,
2. die latente Wärme Δq pro Teilchen ist eine Konstante. (10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Luftfederung (ohne Stoßdämpfer)

Gegeben sei ein Gefäß mit enem Kolben der Fläche F. Im Inneren des Gefäßes befinde sich ein ideales Gas mit der Zustandsgleichung $pV = RT$. Auf den Kolben drücke das Gewicht einer Masse M im Schwerefeld. Das Gas und die Masse seien im Gleichgewicht.



a) Geben Sie den Gleichgewichtsdruck p_0 und das Gleichgewichtsvolumen V_0 bei einer gegebenen Temperatur T_0 an. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Adiabaten der Gleichung

$$TV^\beta = \text{const.} \quad \text{und} \quad pV^\gamma = \text{const.}$$

gehorchen. Bestimmen Sie die Koeffizienten β und γ. (11 Punkte)

Eine kleine Verschiebung δz der Masse M und damit des Kolbens aus der Ruhelage führt zu einer Druckänderung δp und damit zu einer Rückstellkraft δK. Die Verschiebungen bzw. Druckänderungen seien so schnell, dass die Prozesse als adiabatisch angesehen werden können.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage von Masse und Kolben stabil ist. Betrachten Sie dazu kleine Auslenkungen δz der Masse und damit des Kolbens aus der Gleichgewichtslage, und bestimmen Sie die zugehörige Kraft δK auf die Masse M in niedrigster Ordnung in δz. Zeigen Sie, dass es eine Rückstellkraft ist, und bestimmen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage in Abhängigkeit vom Exponenten γ und von der Temperataur T_0 von Teilaufgabe a). (11 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Drehimpuls und Unschärferelation

Wir betrachten die Drehimpulsoperatoren L_x und $L_\alpha = \cos\alpha\, L_x + \sin\alpha\, L_y$ mit einem reellen Parameter α.

Die Drehimpulsoperatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[L_x, L_y] = \mathrm{i}\hbar L_z \quad \text{und zyklisch.}$$

Die Leiteroperatoren sind $L_\pm = L_x \pm \mathrm{i}L_y$ mit $L_\pm|l,m\rangle \propto |l, m\pm 1\rangle$.

a) Die allgemeine Heisenberg'sche Unschärferelation für zwei beliebige Observablen A und B ist $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\,|\langle[A,B]\rangle|$. Geben Sie die Unschärferelation für die Drehimpulskomponenten L_x und L_α an, und berechnen Sie explizit den auf der rechten Seite auftretenden Kommutator. (5 Punkte)

b) Ein System sei in dem durch die Gleichungen

$$L^2|l,m\rangle = \hbar^2\, l(l+1)|l,m\rangle \quad \text{und} \quad L_z|l,m\rangle = \hbar\, m|l,m\rangle$$

definierten Eigenzustand mit dem Eigenvektor $|l,m\rangle$. Zeigen Sie zunächst, dass für einen solchen Zustand $\langle L_x\rangle = 0$ gilt. Argumentieren Sie nun, dass die Beziehung $\Delta L_i = \Delta L_x = \Delta L_y$ gilt, und berechnen Sie ΔL_x. (9 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie entweder die Symmetrie des Problems oder die Leiteroperatoren.

Ergebnis zur Kontrolle: $\Delta L_x = \Delta L_i = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2 + l - m^2}$.

c) Für welche m sind ΔL_x und ΔL_i bei gegebenem l minimal? Verifizieren Sie die Gültigkeit der Unschärferelation für diesen speziellen Zustand. (5 Punkte)

d) Für welche Quantenzahlen (l,m) oder Parameterwerte α können die Drehimpulsobservablen L_x und L_i gleichzeitig genau gemessen werden? (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Landau-Niveaus

Ein Elektron mit Ladung $q = -e$ bewege sich in der (x, y)-Ebene unter dem Einfluss eines senkrechten, räumlich konstanten Magnetfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z$. In der Quantenmechanik wird dies durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{m\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right)}{2}$$

eines freien Teilchens beschrieben. Dabei sind die Operatoren $\hat{v}_{x,y} = (\hat{p}_{x,y} + eA_{x,y})/m$ der Teilchengeschwindigkeiten in x- bzw. y-Richtung mit den Impulsoperatoren $\hat{p}_{x,y}$ durch die entsprechenden Komponenten des Vektorpotentials $\vec{A}$ verknüpft (das Vektorpotential bestimmt das Magnetfeld durch die übliche Relation $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$).

a) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{v}_x, \hat{v}_y]$ der Komponenten des Geschwindigkeitsoperators aus den fundamentalen Vertauschungsrelationen $[\hat{p}_x, f(\vec{x})] = (\hbar/\mathrm{i})\,\partial_x f$ und $[\hat{p}_y, f(\vec{x})] = (\hbar/\mathrm{i})\,\partial_y f$.

   Ergebnis: $[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = -\mathrm{i}\hbar eB/m^2$ (8 Punkte)

b) Definieren Sie die Operatoren

$$\hat{a} = \left(\frac{m}{2\hbar\omega_c}\right)^{1/2} (\hat{v}_x - \mathrm{i}\hat{v}_y) \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger = \left(\frac{m}{2\hbar\omega_c}\right)^{1/2} (\hat{v}_x + \mathrm{i}\hat{v}_y)$$

   ($\omega_c = eB/m$ ist die klassische Zyklotronfrequenz), und bestimmen Sie deren Vertauschungsrelationen. (8 Punkte)

   Hinweis: Harmonischer Oszillator

c) Drücken Sie den Hamilton-Operator $\hat{H}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus, und bestimmen Sie daraus das Energiespektrum des Elektrons im Magnetfeld. (9 Punkte)