Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Bestimmung des Potentials aus Erhaltungsgrößen

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewegt sich in einem konservativen Kraftfeld mit dem Potential $V(\vec{r})$.

a) Es sei bekannt, dass L_x, die x-Komponente des Bahndrehimpulses, erhalten ist. Welche Form muss $V(\vec{r})$ dann haben? (4 Punkte)

b) Zusätzlich zu L_x sei auch L_y erhalten. Begründen Sie, warum hieraus auch die Erhaltung von L_z folgt, und geben Sie wiederum die Form des Potentials an. (4 Punkte)

c) Für den Spezialfall eines Zentralpotentials $V(r)$ werde eine vektorielle Erhaltungsgröße der Form

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + C\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

beobachtet (mit Impuls $\vec{p}$, Bahndrehimpuls $\vec{L}$, Ortsvektor $\vec{r}$, Konstante C). Leiten Sie aus $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t = 0$ die Differentialgleichung

$$mr^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + C = 0 \tag{2}$$

her. Bestimmen Sie schließlich das Potential $V(r)$ so weit wie möglich. (10 Punkte)

Hinweis:

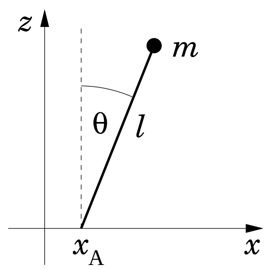
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right), \tag{3}$$

$$\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r}. \tag{4}$$

d) Wie viele unabhängige Erhaltungsgrößen kann es für ein Teilchen in einem Potential $V(\vec{r})$ maximal geben? Leiten Sie Beziehungen zwischen den Erhaltungsgrößen E (Energie), $\vec{L}$ und $\vec{A}$ aus Teilaufgabe c) her, indem Sie Skalarprodukte aus den beiden Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{A}$ bilden. (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Umgekehrtes Pendel



Gegeben sei ein ebenes Pendel mit der Masse m und der Pendellänge l in der (x, z)-Ebene. Das Pendel befinde sich im (homogenen, in die negative z-Richtung zeigenden) Schwerefeld mit der Schwerebeschleunigung g. Der Winkel gegen die z-Achse sei θ. Bei festem Aufhängepunkt x_A ist der Winkel $\theta = 0$ bekanntlich eine instabile Gleichgewichtslage.

Allerdings soll sich der Aufhängepunkt mit der Abhängigkeit $x_A(t)$ bewegen, siehe die Skizze, und im Folgenden soll diese Bewegung des Aufhängepunkts näherungsweise so bestimmt werden, dass das Pendel nicht hinabfällt, sondern um die instabile Gleichgewichtslage schwingt.

Hinweis: Es ist geschickt, die Abkürzungen $\xi = x_A/l$ und $\lambda = \sqrt{g/l}$ einzuführen.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrange-Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$. Geben Sie die Bewegungsgleichung an. (3 Punkte)

b) Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für den Fall kleiner Winkel θ bis zur ersten Ordnung in θ. (4 Punkte)

Zwischenergebnis zur Kontrolle:

$$\ddot{\theta} - \lambda^2 \theta = -\ddot{\xi} \, . \tag{1}$$

c) Geben Sie die Eigenlösungen und die allgemeine Lösung $\theta^{(0)}(t)$ des homogenen Teils

$$\ddot{\theta} - \lambda^2 \theta = 0 \tag{2}$$

der Gleichung (1) an. Warum enthält die allgemeine Lösung zwei Integrationskonstanten? (4 Punkte)

d) Für die Funktion $\xi(t)$ wird eine harmonische Form

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t)$$

vorgegeben. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung $\theta^{(1)}(t)$ von Gleichung (1). (6 Punkte)

Hinweis: Machen Sie einen Ansatz

$$\theta^{(1)}(t) = \theta_0 \sin(\omega t) \, .$$

e) Die allgemeine Lösung $\theta(t) = \theta^{(0)}(t) + \theta^{(1)}(t)$ ist nur dann beschränkt, wenn eine Beziehung zwischen den Anfangsbedingungen $\theta(0)$ und $\dot{\theta}(0)$ erfüllt ist. Bestimmen Sie diese Beziehung sowie die Integrationskonstanten von Teilaufgabe c). (8 Punkte)

Themenschwerpunkt B

Elektrodynamik/Optik

Aufgabe 1: Magnetischer Spiegel

Ein nichtrelativistisches Teilchen mit Masse m und Ladung $q > 0$ bewege sich im Magnetfeld

$$\vec{B}(\rho, z) = B(z)\,\vec{e}_z - \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}(z)\,\vec{e}_\rho$$

mit positiven Werten von $B(z)$ und $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z$ in einem Teilgebiet um den Ursprung herum (Zylinderkoordinaten ρ, φ, z).

a) Verifizieren Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. (5 Punkte)

Hinweis: Ein Vektorfeld der Form $\vec{A}(\rho, \varphi, z) = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$ hat die Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

b) Zeigen Sie, dass die z-Komponente der Bewegungsgleichung der Ladung die Form

$$m\ddot{z} = \frac{q}{2}\rho^2 \dot{\varphi} \frac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}$$

besitzt. (5 Punkte)

Hinweis: $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$.

c) Wenn sich das Magnetfeld nur schwach in axialer Richtung (z-Achse) ändert, dann kann die transversale (ρ, φ) Bewegung des Teilchens in guter Näherung als Kreisbewegung $\dot{\varphi}(z) = -\omega_c(z)$ mit längs der z-Achse variabler Kreisfrequenz $\omega_c(z) = qB(z)/m$ und variablem Radius $\rho(z) = v_\perp(z)/\omega_c(z)$ beschrieben werden. Zeigen Sie, dass der Quotient $v_\perp^2(t)/B(z(t))$ aus dem Quadrat der transversalen Geschwindigkeit und dem Magnetfeld in dieser Näherung zeitunabhängig ist. (8 Punkte)

Hinweis: Drücken Sie $v_\perp^2$ mit Hilfe des Energiesatzes (Begründung?) durch v_z^2 und das Quadrat $v^2(0)$ der Anfangsgeschwindigkeit aus, und verifizieren Sie, dass die Konstanz von $v_\perp^2/B$ direkt aus der Bewegungsgleichung für die z-Komponente der Bahn folgt.

d) Bestimmen Sie mit den Anfangsbedingungen $z(0) > 0$ und $v_z(0) > 0$ die Lösung $z(t)$ und den Umkehrpunkt der Bewegung explizit für den Fall $B(z) = \alpha z$ mit einer gegebenen Konstanten $\alpha > 0$. Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien im Halbraum $z > 0$. (7 Punkte)

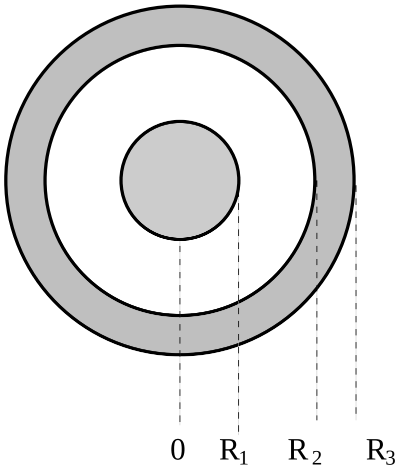
Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel besteht aus einem zentralen Zylinder als Hinleitung und einem konzentrischen Hohlleiter zur Rückleitung des Stroms I. Die Stromverteilung in den Leitern soll homogen und zeitlich konstant sein. Das Magnetfeld $\vec{H}$ wird in diesem Fall durch die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

beschrieben, wobei $\vec{j}$ die Stromdichte ist.



a) In welche Richtung zeigt das Magnetfeld? (3 Punkte)

b) Begründen Sie, dass das Magnetfeld zwischen den Leitern und außerhalb eine Überlagerung der Felder der beiden einzelnen Leiter ist. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im ganzen Raum. (12 Punkte)

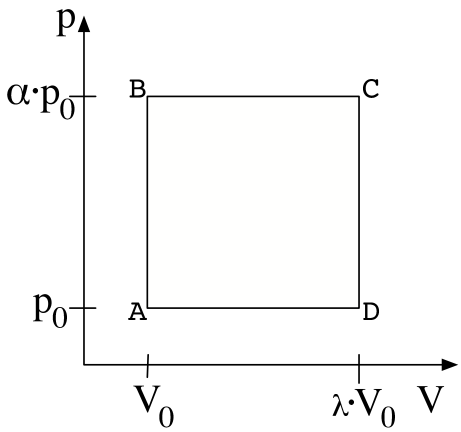
d) Skizzieren Sie $|\vec{H}|$ als Funktion des Radius ρ. (7 Punkte)

Themenschwerpunkt C

Thermodynamik

Aufgabe 1: Kreisprozess

Betrachten Sie den dargestellten Kreisprozess, der mit einem einatomigen idealen Gas als Arbeitsgas durchgeführt wird. Die Zustandsänderungen erfolgen quasistatisch in der Reihenfolge $A \to B \to C \to D \to A$. Die Teilchenzahl N sei dabei konstant, und die Werte von p_0, V_0, N, α und λ seien bekannt.



a) Welche Arbeit wird von diesem Prozess in einem Zyklus geleistet (als Funktion von α, λ, und $p_0 V_0$)? (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die Temperaturverhältnisse T_B/T_A, T_C/T_A und T_D/T_A in den mit B, C und D bezeichneten Zuständen des Systems als Funktion von α und λ. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die in jedem Schritt vom/am System geleistete Arbeit sowie die dem System zugeführte/abgeführte Wärme als Funktion von α, λ und $p_0 V_0$. In welchen Prozessschritten wird demnach Wärme zugeführt bzw. abgeführt und Arbeit vom System bzw. am System geleistet? (12 Punkte)

d) Berechnen Sie den thermischen Wirkungsgrad als Funktion der Parameter α und λ. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Wärmekapazitäten einer Flüssigkeitsoberfläche

Ein Flüssigkeitstropfen der Oberfläche A habe bei der Temperatur T die Oberflächenspannung $\sigma(T, A)$. Es soll gezeigt werden, dass sich die Differenz der Wärmekapazitäten C_A und C_σ bei konstanter Oberfläche bzw. konstanter Oberflächenspannung mit Hilfe der Beziehung

$$C_A - C_\sigma = T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_A \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_\sigma \tag{1}$$

berechnen lässt.

a) Verwenden Sie den ersten Hauptsatz $\mathrm{d}U = \delta Q + \sigma\,\mathrm{d}A$, um die Wärmekapazität $C_A = (\delta Q/\mathrm{d}T)_A$ durch eine geeignete Ableitung der inneren Energie U auszudrücken.
(3 Punkte)

b) Zeigen Sie nun die Beziehung

$$C_\sigma = C_A + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_T - \sigma\right] \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_\sigma .$$

(8 Punkte)

c) Leiten Sie schließlich unter Verwendung des Differentials der freien Energie $\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + \sigma\,\mathrm{d}A$ die Beziehung (1) her.
(14 Punkte)

Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Zweidimensionales Wasserstoff-Atom

Die Bindung zwischen einem Elektron und einem Loch (Exziton) in einem Halbleiter-„Quantum well“ kann man in guter Näherung durch die Relativbewegung zweier Teilchen mit Ladung $q_{1,2} = \pm e/\sqrt{\varepsilon}$ (ε ist die statische Dielektrizitätskonstante des Trägermaterials) und üblicher Coulomb-Wechselwirkung $V(r) = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r$ beschreiben, wobei die Bewegung nun aber in einer Ebene (Polarkoordinaten r, φ) stattfindet. Die reduzierte Masse μ definiert einen effektiven Bohr-Radius $a_B = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\hbar^2/\mu e^2$.

a) Wie lautet die stationäre Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion $\psi(r, \varphi)$ der Relativbewegung der beiden Teilchen im Potential $V(r)$ mit negativen Energien $E = -E_b = -\hbar^2\kappa^2/2\mu$, also für gebundene Zustände? (6 Punkte)

   Hinweis: Verwenden Sie a_B und κ als Parameter und die Darstellung

   $$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

   des Laplace-Operators in Polarkoordinaten r, φ.

b) Welche Werte kann die Quantenzahl m im Separationsansatz $\psi(r, \varphi) = \phi(r) \cdot \exp(im\varphi)$ annehmen, und was ist ihre physikalische Bedeutung? (4 Punkte)

c) Machen Sie für die (nicht normierte und φ-unabhängige) Wellenfunktion des Grundzustandes den Ansatz $\phi_0(r) = \exp(-r/\ell_0)$, und verifizieren Sie, dass dies für ein geeignetes ℓ_0 tatsächlich eine Lösung ist. (10 Punkte)

   Hinweis: Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung legt aus der Identität von rechter und linker Seite für alle r sowohl ℓ_0 als auch die Energie fest.

d) Wie groß ist die Bindungsenergie des Grundzustandes in Einheiten der effektiven Rydberg-Energie $\mathrm{Ry} = \hbar^2/2\mu a_B^2$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem des üblichen Wasserstoff-Atoms im drei-dimensionalen Fall. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Linearer Stark-Effekt im angeregten Wasserstoff-Atom

Bei Vernachlässigung des Spins ist der Zustand des Wasserstoff-Atoms mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ vierfach entartet mit der Eigenenergie E_2 und mit den Eigenzustandsvektoren, welche als $|2s\rangle$, $|2p_x\rangle$, $|2p_y\rangle$ und $|2p_z\rangle$ gewählt werden können. Im Unterraum dieser vier Zustände hat die Hamilton-Matrix die Form

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} .$$

Die zugehörige $2s$-Zustandsfunktion ist sphärisch-symmetrisch, $\phi_{2s}(-\vec{r}) = \phi_{2s}(\vec{r})$ (positive Parität), und die zugehörigen $2p_i$-Funktionen kehren ihr Vorzeichen um bei Vorzeichenumkehr der Komponente x_i des Ortsvektors, also z.B. $\phi_{2p_x}(-x, y, z) = -\phi_{2p_x}(x, y, z)$ und entsprechend für ϕ_{2p_y} und ϕ_{2p_z} (negative Parität: antisymmetrisch in x_i und symmetrisch in den anderen Koordinaten).

Das Wasserstoff-Atom befinde sich nun in einem zeitlich und räumlich konstanten elektrischen Feld $\vec{E}^{\text{ext}} = E^{\text{ext}}\vec{e}_x$; der zugehörige Stör-Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H_1 = exE^{\text{ext}} .$$

Im Folgenden sollen die durch das elektrische Feld verursachten Energiekorekturen bestimmt werden.

a) Zeigen Sie unter Verwendung von Symmetrieargumenten (also ohne explizite Rechnung), dass die Matrixelemente von H_1 im Unterraum der vier angegebenen Zustände zu der Matrix

$$H_1 = eE^{\text{ext}} \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

führen, dass also $X = \langle 2s|x|2p_x\rangle$ sowie das Komplex-Konjugierte davon die einzig nichtverschwindenden Matrixelemente sind. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie die Eigenenergien E von $H = H_0 + H_1$, d. h. diagonalisieren Sie die Hamilton-Matrix H in dem Unterraum der vier Zustände mit $n = 2$, und skizzieren Sie die Abhängigkeit der Energien vom elektrischen Feld.
Bestimmen Sie die zugehörigen normierten Eigenvektoren. (17 Punkte)